

成人高等工科院校用书

高等数学

第一册

巫锡禾编

华东纺织工学院夜大学



1983·8·

总号	31301
类号	01数
分号	3852
书号	346

成人高等工科院校用书

高等数学

第一册

巫锡禾编

江南大学图书馆



91436798



华东纺织工学院夜大学

1983·8

前 言

把祖国建设成现代化的社会主义强国，需要培养大量又红又专的建设人材。大力发展投资少、效益高、学用结合的成人大学，是培养人材的另一条重要途径。针对成人大学生的特点组织教学，编写教材或参考书，是办好成人大学的关键之一。

成年人教育的特点：学生具有较好的思想基础，较丰富的生产实践经验，专业对口，学用结合，学习目的性明确；学生一般年龄较大，具有较强的理解能力和分析能力，但记忆力较差；学生边工作、边学习、以工作为主，因而学习时间少、任务重、要求高；学生集中面授，分散复习和完成作业，学习上遇到疑难问题，既不容易问老师，也难于同学之间互相研究。总之，成人大学生既具有搞好学习的有利条件，也有不利于学习的实际情况。如何发挥有利条件，减少不利因素，这是办好成人大学的一个重要课题。

成人教育，除提高讲课效率，力争课堂上基本解决问题外，有一本比较适用的参考书，便于复习自学，也能起到节省时间，提高效益，减轻负担的作用。

在我院教务处及夜大学的支持和鼓励下，于1981年编写了适用于成人大学生学习的“高等数学复习资料”。经过两届夜大学生使用，同学们是欢迎的。现在原有基础上，进行了修改补充，分三册出版。

本书是根据1981年8月全国工科院校(四年制)所审订的“高等数学大纲”编写的，并从以下几个方面努力适应成人教育的需要。

(1) 深入浅出地讲清基本概念，基本理论，基本运算，突破难点，抓住重点(对难点和重点作到有分析，有证明，有归纳。有些内容，还用了“顺口溜”或“谜语”来帮助记忆)。

(2) 每章开头有“本章学习指导”，指出其重点、难点、教学要求、学习方法。

(3) 配备了较多的例题，适量的习题(有答案)。对计算熟练程度要求高的内容，如求导运算、凑微分运算等，还安排了比计算速度的比赛题(有答案)。

(4) 概念性多、理论性强的章节配有讨论题(有解答)。每章有自我检查题(有解答)。适当的场合有小结。

(5) 每章有一至二处，安排了难度较大的习题选解，供基础好或时间较充裕的同学阅读。全书安排了六次阶段考试题(有解答)，供同学们进行阶段性的自我预考。

由于编者水平有限，经验不足，加之时间仓促，书中错误和不足之处，在所难免，殷切希望使用本书的师生及其他读者，给予批评指正。

在本书编写过程中，得到一些同志的热情帮助，提出了很多宝贵的改进意见；有些同学也提出了很好的意见，并利用休息时间帮助描绘了书中的全部插图。在此表示诚挚的谢意。

编 者

83年8月 于 华 纺

高等数学的特点及其学习方法

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，是认识世界和改造世界的工具。它来源于实践，抽象成理论，再回到实践中。它具有高度的抽象性，严密的逻辑性，应用的广泛性三大特点。

1、高等数学的特点

高等数学除上述三大特点外，还有它的特殊性，这就是，高等数学研究的基本对象是函数，它是现实世界中各种变量之间的相互依赖关系的抽象。在高等数学中，所遇到的变量，除了个别情况外，都是取实数值。实数是有理数(总可表示为 $\frac{p}{q}$ ，其中 p, q 是互质的两个整数且 $q \neq 0$)和无理数(不可表示为 $\frac{p}{q}$ 如 $\sqrt{2}$)的统称。关于实数有三个特性。

(1) 有序性 任意两个实数 a, b 之间，必有且仅有三种关系之一： $a=b$ ；或 $a>b$ ；或 $a<b$ 。

(2) 稠密性 任意两个实数 a, b 之间，必存在异于 a 和 b 的无穷多个实数。

(3) 连续性 全体实数和数轴上的全体点建立一一对应关系。也就是说，实数填满了整个数轴而无空隙。

因此，高等数学是研究以实数为变量的变量数学。从观点到方法都同常量数学即初等数学有本质的差别。但是，高等数学又以初等数学为基础，是初等数学的发展。不妨先看几个方面的例子。

(1) 常量与变量 例如长度为1的细棒，如果细棒的线密度是均匀的，即线密度为常量时，则细棒的质量等于线密度乘长度1。如果细棒的线密度是非均匀的，即线密度为变量时，则细棒的质量就要用高等数学来求了。

(2) “直”与“曲” 例如直线段的长度可用初等数学来求，曲线弧(圆弧除外)的长度就要用高等数学来求了。

(3) 有限与无限 例如有限项的求和可用初等数学来求，无限项的求和就要用高等数学来求了。

由常与变、直与曲、有限与无限的矛盾，就促使初等数学发展到高等数学。

此外，高等数学中许多基本概念又有如下的特点

(1) 局部与整体 有的概念是在局部范围内建立的，从局部再发展到整体。有的概念是在整体范围内建立的，从整体必须深入到局部，再从局部又回到整体。

(2) 具体与抽象 很多重要概念是从具体的有实际意义的问题着手，然后再从这具体问题中，抛去其实际意义，抽象出数学概念，再上升为理论。

(3) 简单与复杂 如何从简单过渡到复杂，是高等数学中不可缺少的思想方法。例如从简单的一元函数微积分，过渡到复杂的多元函数微积分。

2、学习高等数学的方法

高等数学的学习方法和学习目的是不可分割的。有正确的学习目的，就会探讨出好的学习方法。所谓方法就是通过符合自己情况的手段，更有效的获得新的知识。无论何种方法，都必须通过勤学苦练，才会结出丰硕成果。一般说来，提供下面几点作参考，具体地结合内容在每章开头再提供。

(1) 预习 大学里教学进度快，理论性较强，应先预习。做到带着问题有目的地听课。

(2) 听课 必须认真地听课，在不影响听课的原则下，尽可能记笔记。每听完课后，必须知道，这堂课的重点、关键、思路是什么？解决了什么问题，自己有什么体会。

(3) 复习 趁热打铁及时复习，把所讲内容全部搞懂，重要内容要记熟，在可能条件下再看有关参考书。

(4) 练习 把布置的作业及时作完，在可能条件下，自己再做一些未布置的作业。要总结解题的技巧性和方法的多样性。

(5) 阶段小结 每学完一个阶段，必须对这段的内容进行自我小结。小结时应把前后有联系的内容进行比较、归纳。在比较的基础上加以发挥，用自己的语言把主要内容表达出来，使知识条理化和系统化，瞭如指掌，融会贯通。由于高等数学是由基本概念，基本理论，基本运算和应用四个部分组成，要做到基本概念要清楚，基本理论要弄懂，基本运算要熟练，才能做到应用自由。

总之，开动脑筋，独立思考，创造性地学习。方法来自勤奋，功到必成。

第 一 册

目 录

第一章 函数	(1)
1.1 函数概念	(1)
1、常量与变量	(1)
2、函数的定义	(2)
3、函数值	(4)
4、分段函数	(4)
5、函数表示法	(5)
6、函数的图形	(5)
习题及其答案	(6)
1.2 函数的几种特性	(7)
1、奇偶性	(7)
2、单调性	(10)
3、周期性	(11)
4、有界性	(14)
习题及其答案	(15)
1.3 反函数	(17)
1、反函数概念	(17)
2、反函数的图形	(18)
3、反函数的存在性	(19)
习题及其答案	(19)
1.4 初等函数	(20)
1、基本初等函数	(20)
2、复合函数	(25)
3、初等函数	(26)
4、有理函数	(27)
5、双曲函数	(27)
习题及其答案	(29)
自我检查题	(30)
习题选解	(31)
自我检查题解答	(34)
第二章 极限	(37)

2.1 数列的极限	(37)
1、邻域的概念	(37)
2、数列的概念	(38)
3、数列的极限概念	(38)
4、 $\langle \varepsilon-N \rangle$ 定义的几何解释	(41)
5、运用 $\langle \varepsilon-N \rangle$ 定义证明数列极限举例	(41)
6、小结	(43)
7、一种错误的思想方法	(44)
8、子数列	(44)
9、原数列极限与子数列极限的关系	(45)
10、数列的有界性	(46)
习题及其答案	(47)
2.2 函数极限	(49)
1、自变数趋于无限时, 函数的极限	(49)
(1) $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数的极限	(49)
(2) $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数的极限	(51)
(3) $x \rightarrow \infty$ 时, 函数的极限	(52)
(4) 自变数趋于无限的三种情况, 函数极限的关系	(54)
(5) 小结	(54)
习题及其答案	(54)
2、自变数趋于有限时, 函数的极限	(55)
(1) $x \rightarrow x_0$ 时, 函数的极限	(55)
(2) $x \rightarrow x_0-0$ 时, 函数的极限	(59)
(3) $x \rightarrow x_0+0$ 时, 函数的极限	(61)
(4) 自变数趋于有限时的三种情况, 函数极限的关系	(62)
(5) 小结	(63)
3、用子数列判定函数极限不存在	(63)
习题及其答案	(64)
2.3、无穷小和无穷大	(66)
1、无穷小	(66)
(1) 无穷小的概念	(66)
(2) 有极限的函数与无穷小的关系	(66)
(3) 无穷小的性质	(67)
习题及其答案	(68)
2、无穷大	(69)
(1) 无穷大的概念	(69)
(2) $\langle M-\delta \rangle$ 定义的几何解释	(70)
(3) 利用 $\langle M-\delta \rangle$ 定义证明函数为无穷大举例	(71)
3、无穷小与无穷大的关系	(71)

4、无界函数与无穷大的关系	(72)
5、总结	(72)
习题及其答案	(74)
习题选解	(74)
2.4 极限的运算与性质	(79)
1、极限的四则运算	(79)
2、利用极限运算法则求极限举例	(81)
3、极限的性质	(89)
习题及其答案	(91)
2.5 极限存在的准则 两个重要极限	(93)
1、两个极限存在准则	(93)
2、利用两个准则证明两个重要极限	(94)
3、利用两个重要极限求极限举例	(97)
4、利用两个极限存在准则求极限举例	(100)
习题及其答案	(102)
2.6 无穷小的比较	(103)
1、两个无穷小的比较	(103)
2、利用等价无穷小求极限	(104)
习题及其答案	(106)
自我检查题	(107)
习题选解	(107)
自我检查题解答	(119)
第三章 连续函数	(123)
3.1 函数在一点的连续性	(123)
1、增量的概念	(123)
2、函数在一点连续的概念	(124)
3、左、右连续的概念	(126)
4、区间连续	(127)
习题及其答案	(128)
3.2 函数的间断点 间断点分类	(129)
1、间断点概念	(129)
2、间断点分类	(130)
习题及其答案	(132)
3.3 连续函数的运算 初等函数的连续性	(133)
1、连续函数的四则运算	(133)
2、基本初等函数的连续性	(134)
3、复合函数的连续性	(134)
4、初等函数的连续性	(135)
5、利用连续性求极限	(136)

6、利用复合函数连续性定理求极限举例·····	(137)
7、连续函数的保号性·····	(138)
习题及其答案·····	(139)
3.4 闭区间上连续函数的性质·····	(140)
1、零值定理·····	(140)
2、介值定理·····	(141)
3、最大最小值定理·····	(142)
习题及其答案·····	(143)
自我检查题·····	(144)
讨论题·····	(145)
习题选解·····	(147)
自我检查题解答·····	(150)
讨论题解答·····	(152)
第四章 导数 ·····	(158)
4.1 导数概念·····	(158)
1、三个实际问题·····	(158)
2、函数在一点的导数概念·····	(160)
3、导数的几何意义·····	(162)
习题及其答案·····	(163)
4、左、右导数概念·····	(164)
5、导函数·····	(165)
6、可导与连续的关系·····	(166)
7、函数在一点不可导·····	(166)
8、几个基本初等函数的导数公式·····	(167)
习题及其答案·····	(170)
4.2 求导的运算法则·····	(171)
1、求导的四则运算法则·····	(171)
2、复合函数求导法则·····	(174)
3、隐函数的概念及隐函数求导法·····	(179)
4、基本初等函数的导数公式和导数运算法则汇集·····	(182)
习题及其答案·····	(183)
5、对数求导法·····	(185)
6、初等函数求导小结·····	(187)
7、分段函数求导举例·····	(187)
8、杂例·····	(188)
习题及其答案·····	(190)
4.3 高阶导数·····	(191)
1、二阶导数概念·····	(191)
2、二阶导数的力学意义·····	(193)

3、高阶导数	(194)
习题及其答案	(197)
4.4 导数的应用举例	(198)
习题及其答案	(200)
自我检查题	(201)
习题选解	(202)
自我检查题解答	(209)
第五章 微分	(211)
5.1 微分的概念	(211)
1、为什么要引入微分	(211)
2、导数与函数增量的关系	(211)
3、微分的定义	(212)
4、微分的几何意义	(213)
习题及其答案	(214)
5.2 微分的运算法则 微分形式的不变性	(215)
1、微分的运算法则	(215)
2、微分形式的不变性——复合函数微分法则	(216)
习题及其答案	(218)
5.3 微分在近似计算中的应用	(219)
1、用线性函数近似代替非线性函数	(219)
2、用切线的纵座标近似代替曲线的纵座标	(220)
3、求一个未知函数的微分	(221)
习题及其答案	(222)
5.4 由参数方程所表示的函数的导数	(223)
习题及其答案	(224)
讨论题	(225)
习题选解	(226)
第一次考试试题	(231)
讨论题解答	(232)
第一次考试试题解答	(236)
第六章 微分学基本定理	(241)
6.1 中值定理	(241)
1、罗尔定理	(241)
习题及其答案	(245)
2、拉格朗日定理	(245)
习题及其答案	(250)
3、柯西定理	(250)
习题及其答案	(255)
6.2 罗必塔法则	(256)

习题及其答案	(265)
6.3 泰勒公式	(266)
习题及其答案	(280)
讨论题	(281)
自我检查题	(282)
习题选解	(283)
讨论题解答	(291)
自我检查题解答	(293)
第七章 导数应用	(296)
7.1 函数的单调性	(296)
习题及其答案	(300)
7.2 函数的极值	(301)
习题及其答案	(307)
7.3 函数的最大值和最小值	(308)
习题及其答案	(314)
7.4 曲线的凹凸性与拐点	(315)
习题及其答案	(320)
7.5 曲线的渐近线	(321)
习题及其答案	(323)
7.6 函数图形的描绘	(324)
习题及其答案	(326)
7.7 平面曲线的曲率	(327)
习题及其答案	(334)
讨论题	(335)
自我检查题	(335)
习题选解	(336)
讨论题解答	(344)
自我检查题解答	(346)

第一章 函 数

高等数学的研究对象基本上是函数。在中学数学课程中,就学过不少函数,在这一章里,将在原有函数知识的基础上,进行归纳和补充。

本章学习指导

本章重点是函数概念,特性,基本初等函数和初等函数。

函数好比高等数学中的纲,纲举目张。

(1) 明定义 把函数的定义彻底搞明白,确切掌握。

(2) 树直观 几何直观是领会函数的重要途径。把函数和它的几何图形相结合,和平面解析几何中的方程相对照,这样结合和对照起来就既容易理解又记得住。应注意函数 $y=f(x)$ 中, x 总表示自变数, y 表示因变数。但在解析几何方程中的 x , y 是对称的,既可把 x 看作自变数,也可把 y 看作自变数,这是两者的区别之处。

(3) 抓特性 抓住函数所具有的单调性、奇偶性、周期性和有界性。注意,不是每一个函数都同时有这四个特性,但却有函数同时有这四个特性如 $y=\sin x$ 。

(4) 记构造 那些函数叫基本初等函数,怎样构造成复合函数和初等函数,非初等函数,必须记住。

1.1 函 数 概 念

1. 常量与变量

在实际问题中,我们会经常遇到各种各样的量,如长度、重量、体积、温度、时间、速度等等。在某一个过程中,如果一个量只能取一个固定的数值,这个量就称为常量。如果一个量可以取不同的数值,这个量就称为变量。例如,取一铁块加热,则铁块重量不变,而铁块的温度、体积在变。因此,在这一块铁加热过程中,重量是常量,温度、体积是变量。

一个量是常量还是变量,随着所考虑的问题不同,可能会有变化的。例如重力加速度一般情况下看作常量,实际在不同的地方重力加速度是不同的。这就同所考虑的问题中精确度要求有关。如果精确度要求不高,把它看作常量;如果精确度要求比较高,就不能把它看作常量了。

常量与变量都各自具有其物理意义,脱离其物理意义,就其数值关系上说,某一过程中常量只能取某一固定的数值,而变量可以取不同的数值,因此常量又称常数,变量又称变数。通常用 a 、 b 、 c 等表示常数, x 、 y 、 z 等表示变数。

变数 x 所可能取到的值的全体,叫变数 x 的变域。最常见的变域是区间,但也可以不是区间。如果变数所取的数值是连续变化的,则它的变域是一个区间,这种变数称为连续变数。例如某天的最低温度是 4°C ,最高温度是 15°C 。温度 T 的变化是连续变化的。因此,变数 T 的变域是一个闭区间 $[4, 15]$,并且 T 是连续变数。如果变数所取的值是一个一个孤立的数值,则它的变域就不是一个区间,这种变数称为离散变数。例如某工厂加工的零件数是一个变

数, 这个变数是离散变数。它的变域就不是一个区间, 而是全体自然数 $1, 2, 3 \cdots$ 。如果一个变数的变域只有一个数 C , 则这个变数就是常数 C , 因此, 常数可看作是变数的特殊情况。

2. 函数的定义

在同一过程中, 往往不是只有一个变数, 而是可能有两个或两个以上的变数出现。这些变数也往往不是孤立的在变, 而是相互联系并遵循着一种客观规律在变化。我们首先研究两个变数之间所遵循着的变化规律即函数关系。

定义 设有两个变数 x 和 y , 变数 x 的变域为 D 。如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照某一种对应规律(用字母 f 表示对应规律), 都有变数 y 的一个或多个确定的值和它对应, 称 y 是 x 的函数, 记作

$$y=f(x), x \in D.$$

x 叫自变数, y 叫因变数。从 x 到 y 的对应规律 f 称为函数关系, D 叫函数的定义域。

这个定义, 可简单而形象地表示为: 每一 $x \in D \xrightarrow{f}$ 有确定的 y 值。

定义中, 如果对于 D 中的每一个 x 值, 有唯一的一个确定的 y 值和它对应, 称 y 是 x 的单值函数。这时简单的表示为: 每一 $x \in D \xrightarrow{f}$ 有唯一确定的 y 值。

定义中, 如果对于 D 中的每一个 x 值, 有多个确定的 y 值和它对应, 称 y 是 x 的多值函数。这时简单地表示为: 每一 $x \in D \xrightarrow{f}$ 有多个确定的 y 值。

高等数学中, 主要讨论单值函数。关于多值函数, 今后将看到可以把它拆成几个单值函数来讨论。

例 1 自由落体运动的规律是

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 S 表示下降距离, t 表示时间, g 是重力加速度。

在 $D=(0, T_0)$ (其中 T_0 是落到地面时所需时间)中, 对于 D 上每一个 t 值, 由上式有唯一确定的一个 S 值和它对应, 所以 S 是 t 的单值函数。定义域为 $D=(0, T_0)$, 或 $D=\{t; 0 \leq t \leq T_0\}$ 。

例 2 变数 x 和 y 满足方程

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{或} \quad y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a \text{ 为常数}).$$

在 $D=[-a, a]$ 中, 对于 x 的每一个值, 由上式都有两个确定的 y 值和它对应, 因此 y 是 x 的多值函数, 定义域为 $D=[-a, a]$, 或 $D=\{x: -a \leq x \leq a\}$ 。

由 $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ 可拆成 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, 则 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 是一个单值函数, 定义域为 $D=[-a, a]$; 而 $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ 也是一个单值函数, 定义域为 $D=[-a, a]$ 。

由解析几何知道, $x^2 + y^2 = a^2$ 的图形是原点为心, a 为半径的圆周。而 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 为上半圆周, $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ 为下半圆周。

例 3 变数 x 和 y 满足

$$y = C, \quad (C \text{ 为常数}).$$

在 $D=(-\infty, +\infty)$ 中, 对于 x 的每一个值, 由上式都有一个确定的 y 值 C 和它对应。因此, y 是 x 的单值函数, 定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$ 。这里 $y=C$ 中, 不含自变数 x , 理解为不论 x 取什么实数, y 总是以确定的值 C 和它对应。由解析几何知, $y=C$ 表示一条平行于 x 轴且距离 x 轴为 C 个单位的直线。

例 4 变数 x 和 y 满足

$$x=a, \quad (a \text{ 为常数}).$$

是否可以确定 y 是 x 的函数呢? 不能。因为当 x 取值 a 时, 没有确定的 y 值和它对应。因此 y 不是 x 的函数。事实上, $x=a$ 只表示 x 轴上的一个点。

可见, 并不是任何两个变数之间的关系都是函数关系, 而是符合定义中规定的那种关系才是函数关系。

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母“ f ”, 表示自变数 x 与因变数 y 之间的对应规律即函数关系, 不能看作 f 乘 x 。这种对应规律是指, 对于定义域中某一个 x 值, 得到确定的 y 值的某种规律。当函数是由解析式子表示时, 这种规律是解析式子中所指定的那些数学运算(如加, 减, 乘, 除, 乘方, 等等)。当然也可以用其他字母来表示函数关系, 如 $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$ 等。但是, 如果同时考虑几个不同函数时, 就不要用同一个字母表示不同的函数关系, 以免发生混淆。

例 5 函数 $y=3x$ 的对应规律是自变数 x 乘 3。

例 6 函数 $y=\sin 5x$ 的对应规律是, 自变数 x 乘 5 再取正弦。

函数定义域 D 是表示一个函数的自变数 x 可能取实数值的全体。如果函数有实际意义,

求定义域时, 要从变数的实际意义来考虑, 如例 1 中, 自由落体运动的 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 那样。如

果函数是解析式子表示的, 定义域就是使解析式子有意义的所有自变数的集合, 称为自然定义域。求自然定义域的方法是: 在函数的式子里, 如果有分式, 则分母的值不能等于 0; 如果有偶次根式, 则根号里所含的式子的值必须大于等于 0; 如果有对数记号, 则真数必须

是正数; 如果有正切函数, 则正切函数符号下的式子的值不能等于 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n=0 \pm 1, \pm 2 \cdots$);

如果有余切函数, 则余切函数符号下的式子的值不能等于 $n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2 \cdots$); 如果有反正弦函数或反余弦函数, 则在反正弦函数、反余弦函数符号下的式子的绝对值必须小于等于 1。在函数式子里, 如果同时出现上述诸种情况的某几种, 则定义域是它们的公共部分。

例 7 求 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$ 的定义域。

解 $1-x^2 \geq 0$, 则 $x^2 \leq 1$, $|x| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$; 又 $x \geq 0$, 因此定义域为 $(0, 1)$ 或 $0 \leq x \leq 1$, 或 $D=E\{x; 0 \leq x \leq 1\}$ 。

此外, 还有一种受到限制的定义域。例如 $y=x^2$, 它的自然定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。我们也可以限制 x 只在 $(-\infty, 0)$ 或者 $(0, +\infty)$ 或 $(1, 2)$ 或 $(2, 3)$ 等内取值, 它是自然定义域的某一部分, 用 χ 表示这种定义域, χ 既可以是自然定义域, 也可以是自然定义域的一部分。而用 D 表示自然定义域。

定义域 D 和对应规律 f 是确定一个函数的要素。如果两个函数的定义域和对应规律都相同, 才能说这两个函数是相同的。只要两者之一不同, 便不能表示相同的函数。

例 8 函数 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$, 不能表示同一函数。因为 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域

为 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 。 $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 。因此定义域不相同, 所以不能表示同一个函数。

例 9 函数 $y=ax^2$, $(x\geq 0)$ 与 $y=ax^2$, $(x<0)$ 也不能表示同一函数。因为两者的对应规律相同, 但定义域不同。

例 10 函数 $y=3x$ 与 $s=3t$ 是表示同一函数。因为两者的定义域与对应规律都相同。

由此可见, 只要定义域及对应规律一样, 不管自变数与因变数采用什么字母, 总是同一个函数。

3. 函数值

定义 设函数 $y=f(x)$, 当自变数 x 取定义域中的某一个定值 x_0 时, 因变数 y 的相应值叫做当 $x=x_0$ 时的函数值记作 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$ 。

如果 $x=x_0$ 时, 有函数值 $f(x_0)$, 称 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义。因此函数的定义域也就是使函数有定义的实数的全体。而函数值的全体叫函数的值域, 记作 R 。

这样, 函数的定义又可简单表示为

对任 $x \in D \xrightarrow{f} \text{有确定的函数值 } f(x) \in R$ 。

很明显, 只要函数的定义域及对应规律确定了, 那末这个函数的值域也就确定了。

例 11 求函数 $f(x)=2x^2-5$, 在 $x=1$, $x=2$ 处的函数值。

解 $f(1)=2 \cdot 1^2-5=-3$, $f(2)=2 \cdot 2^2-5=3$ 。

例 12 设 $f(x)=\sqrt{x-1}$, 求 $f(1)$, $f(5)$, $f(x_0)$, 定义域及值域。

解 $f(1)=0$, $f(5)=2$, $f(x_0)=\sqrt{x_0-1}$, 定义域是 $x-1\geq 0$, $x\geq 1$ 。或 $[1, +\infty)$ 。值域是 $[0, +\infty)$ 。

4. 分段函数

有些函数, 不能在整个定义域上用一个解析式子表示, 而必须用多个解析式子表示, 这种函数叫分段函数。简单的说, 由几个解析式子联立表示的函数就是分段函数。分段函数与一个解析式子表示的函数, 在性质上是不同的, 主要表现在各段的联结点(也叫分段点)上的性质, 通常要单独研究(今后再研究)。

例 13 函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

是一个分段函数(图1.1)。

例 14 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{当 } x>0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

是分段函数(图1.2)。这个函数叫做符号函数, $\operatorname{sgn} x$ 是它的特定记号。并求 $f(0)$, $f(3)$, $f(7.5)$, $f(-10.5)$, $f(-1)$ 。

解 $f(0)=0$, $f(3)=1$, $f(7.5)=1$, $f(-10.5)=-1$, $f(-1)=-1$ 。

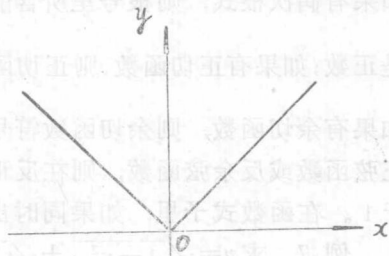


图 1.1

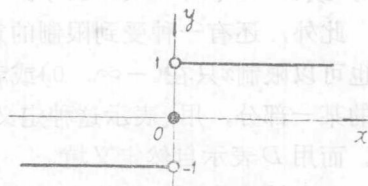


图 1.2

5. 函数的表示方法

在初等数学中我们知道, 函数有列表法、图象法、解析法三种常用表示方法。其中解析法用得最多。此外, 有时还直接用语句来反映一个函数。

例 15 “ y 是不超过 x 的最大整数”。这句话表示 y 是 x 的一个函数, 并且用记号 $y=[x]$ 来表示这个函数。

例如 $y=[-7]=-7$, $y=[-\pi]=-4$, $y=[0]=0$, $y=[1]=1$, $y=[\pi]=3$, $y=[6.5]=6\cdots$ 。

显然, 对于 $D=(-\infty, +\infty)$ 内任一个 x , 都有唯一确定的 y 值和它对应。因此, y 是 x 的单值函数, 定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$; 值域为 $R=\{\text{全体整数}\}$ (图1.3)。

例 16 “设 x 是有理数时, y 的值是1; x 是无理数时, y 的值是0”, 这句话表示 y 是 x 的一个函数, 并用符号 $D(x)$ 表示, 即

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

叫做狄利克来函数。并求 $D(-5)$, $D(-\pi)$, $D(0.1)$, $D(\sqrt{2})$, $D(\pi)$, $D(100)$, $D(3.1416)$ 。

因为对于 $D=(-\infty, +\infty)$ 内任一个 x , 都有唯一确定的 y 值和它对应, 因此 y 是 x 的单值函数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R=\{0, 1\}$ 即0与1两个数。

显然 $D(-5)=1$, $D(-\pi)=0$, $D(0.1)=1$, $D(\sqrt{2})=0$, $D(\pi)=0$, $D(100)=1$, $D(3.1416)=1$ 。

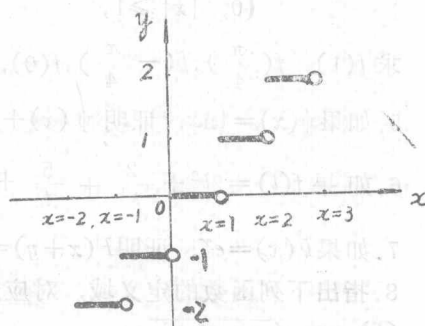


图 1.3

6. 函数的图形

一个函数 $y=f(x)$ 也就是给了一个 x , y 的方程。由解析几何知道, 满足 $y=f(x)$ 的点 (x, y) 或 $(x, f(x))$ 的轨迹是 $y=f(x)$ 的图形。因此, 一个函数 $y=f(x)$ 的图形一般说来是一条曲线。 $x=x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$ 表示这条曲线上点 $(x_0, f(x_0))$ 处的纵坐标(图1.4)。单值函数则平行 y 轴的直线与这曲线只有一个交点(图1.4)。而多值函数则平行 y 轴的直线与这曲线有两个以上的交点。例如椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 是一个多值(双值)函数。而 $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 是一个单值函数, 其图形是上半椭圆。 $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 是一个单值函数, 其图形是下半椭圆(图1.5)。

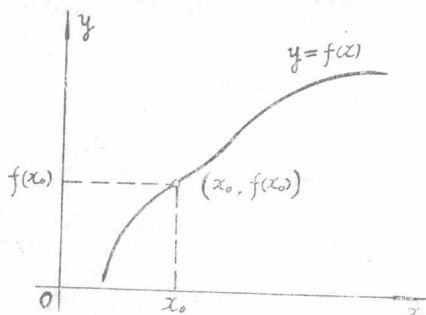


图 1.4

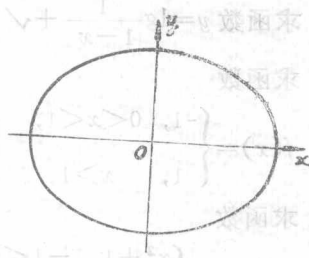


图 1.5

习 题 1.1

1. 如果 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(a+b)$.

2. 如果 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x+\Delta x) - f(x)$.

3. 如果 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$.

4. 如果

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

求 $f(1)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(-\frac{\pi}{4})$, $f(0)$, $f(3)$.

5. 如果 $\psi(x) = \ln x$, 证明 $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$.

6. 如果 $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$, 证明 $f(t) = f(\frac{1}{t})$.

7. 如果 $F(x) = e^x$, 证明 $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$; $F(x-y) = \frac{F(x)}{F(y)}$.

8. 指出下列函数的定义域, 对应规律, 值域.

(1) $y = \sqrt{3x+4}$,

(2) $y = \lg(2x-1)$.

9. 求下表中各函数的定义域

函 数	定 义 域
$y = \sqrt{-x^2}$	
$y = \sqrt{(-x)^2}$	
$y = \arcsin(\sin x)$	
$y = \sin(\arcsin x)$	
$y = 10^{\lg x}$	
$y = \lg 10^x$	

10. 求函数 $y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$ 的定义域.

11. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad \text{的定义域和值域.}$$

12. 求函数

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 < x \leq 2, \\ x^3 - 1, & 2 < x \leq 4. \end{cases} \quad \text{的定义域.}$$