丛书主编　彭小虎

YOUXIAO JIAOXUE

GAOZHONG SHUXUE JIAOXUE ZHONG DE WENTI YU DUICE

有效教学

高中数学教学中的问题与对策

高　飞／主编

东北师范大学出版社

Northeast Normal University Press

丛书主编 彭小

YOUXIAO JIAOXUE
GAOZHONG SHUXUE JIAOXUE ZHONG DE WENTI YU DUICE

有效教学

高中数学教学中的问题与对策

1486441 高 飞 / 主编

东北师范大学出版社
长 春

□责任编辑:王宏志
□责任校对:曲　颖
□封面设计:杨　涛
□责任印制:张允豪

图书在版编目(CIP)数据

有效教学:高中数学教学中的问题与对策/高飞主编.
长春:东北师范大学出版社,2010.4
ISBN 978-7-5602-6037-2

Ⅰ.①有…　Ⅱ.①高…　Ⅲ.①数学课—教学研究—高中　Ⅳ.①G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 058652 号

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号(邮政编码:130117)
电话:0431—85687213
传真:0431—85691969
网址:http://www.nenup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春市永昌印业有限公司印装
长春市义和路 25-1 号　邮编:130021
2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷

幅面尺寸:148 mm×210 mm　印张:11　字数:290 千

定价:18.00 元

总　序

在很多学者眼里，学术是一个严肃的概念，具有专属的性质，学术研究是特定时空中特定社会群体的专属工作。按此逻辑，高中教师的研究肯定不是学术研究，充其量是自己的教学经验总结。

美国当代教育家欧内斯特 L. 博耶（Ernest L. Boyer）认为学术应该有着更为广阔的含义，他提出一种新的学术范式，将学术分为探究的学术、综合的学术、应用的学术、教学的学术。教学的学术即传播知识。教学作为一种学术性活动，既可以表现为作学术报告，也可以表现为在教室里上课，它们应该得到同等的重视。

《教师法》、《教师资格条例》明确认定教师是专业技术人员。高中教师具有深厚的教学专业知识。他们在长期的教学实践中形成了对专业的科学、客观、理性思考，并通过规范的学术文章呈现出来。谁能说他们的研究不是“有系统的、较专门的学问”，即学术研究呢？

在普通教师的视角中，他们更关注的是自己的教学能否实现目标的达成以及目标达成的效益，对这两部分的关注构成了 20 世纪以来西方“有效教学”理论的核心。

有效教学的研究起始于 20 世纪 30 年代的好教师的品质特征研究。60 年代，瑞安（Ryan）等人则通过对教师课堂教学的观察，得出了与有效教学相关的三个方面相对应的两极因素：“热情与理解”对“冷漠与疏远”，“有组织与有条理”对“无计划与拖沓”，“刺激与想象”对“笨拙与呆板”。他们认为，教师的特点越是接近积极因素的一端，其教学就会越有效。60 年代后期，一些学者经过反思提出，教师的好品质不能完全代表有效教学，判断有效教学的标准应该在教学实践中去寻找，从而开始对教师课堂教学行为的研究，即好的课堂教学特点的研究。到了 70 年代后期，有关好教学的研究出现了一个新的转向，即由研究教师的教学行为转向研究学生的学习行为。90 年代后，人们试图从多方面、多角度来考察有效教学。研究认为，教学质量是一个综合的概念，有五个方面的因素影响到教学的有效性：教师所掌握的实际课程领域

的知识和教学内容的知识;教师教学法的技能,包括使用有效教学策略的意识与能力;教师教学反思的能力与自我批评的能力以及教师专业化的品质;教师的移情能力与尊重他人的品德;教师教学管理的能力。

"有效教学——学科教学中的问题与对策"丛书将有效教学关注的重点放在以下三个方面:教学是否促进学生的全面发展,特别是学生情感态度的看成和创新思维的发展;教学是否有效地改善学生的学习方式,促进学生的有效学习;教学是否有效地发展教师的教学效能,促进教师的专业成长,即从学生学习的视角来反思教学是否有效。

有效教学系列丛书的读者对象是教师。他们有自己的教学工作经验,但有些教师缺乏对自己的教学进行反思。他们如果上了一堂好课,或许并不清楚这堂课为什么能成功;他们一堂课的效果如果不佳,也应知道须要改进的地方。系列丛书希望能提供给他们思考问题的视角,即思考问题的思路与解决问题的出路。

丛书的基本结构是以教学中的问题为切入口,分为描述问题、分析问题、提出解决策略、解决问题四个部分。每一个问题都从学生的视角提出,从教师教学的行为中去反思。

首先,描述问题是发现教学中的问题表征,即阐明这是什么方面的问题,既有个案描述,也有现象描述;其次,对每一个问题的分析,大致从五方面进行:一是儿童认知发展水平,二是新课程的目标要求,三是教材的内容与结构,四是课堂的教学组织形式,五是教师的教学策略;第三,以案例说话,即提供适合问题情境的案例,并分析案例的有效或无效的方面,针对案例反思教师的教学行为,并提出解决问题的思路与策略;第四,提供有效案例,作为他山之石。

丛书的作者都是一线经验丰富的教师,他们从理论上反思了自己教学中的问题。我们认为这种教学反思是重要的学术研究。

我们按照自己设定的期望目标在努力,不当之处恳请批评指导。

彭小虎

2010 年 1 月

目录

第1章

集合与函数

问题1 怎样把握集合概念的内涵？

您遇到过这些问题吗？

什么是集合？集合中的元素有什么特性？如何表示一个集合？如何理解集合的语言？

让我们都来问问自己：

集合是高中数学中最重要的基本概念之一，集合语言是现代数学的基本语言，使用集合语言可以简洁、准确地表达数学内容.

《普通高中数学课程标准》要求：

① 通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的"属于"关系.

② 能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

1. 集合的基本概念

(1)集合的概念

集合是集合论中原始的、不定义概念. 我们一般用描述性定义来说明：把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合.

构成集合的每个对象叫做这个集合的元素，集合的元素可以是我们看到的、听到的、闻到的、触摸到的、想到的各种各样的事物或者一些抽象符号.

(2)集合中元素的特性

了解集合中元素的特性是学好集合的基础，是解集合题的关键，它

主要是指集合元素的确定性、互异性和无序性，这些性质为我们提供了解题的依据，特别是元素的互异性，稍有不慎，就易出错．下面就集合元素的这三个性质及应用加以说明．

① 确定性：对任意给定的对象，相对于某个集合来说，要么属于这个集合，要么不属于这个集合，两者必居其一，关键是理解“确定”的含义．

② 互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素一定是不同的（或者说是互异的），即同一个集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入任一个集合时，只能作为这个集合中的一个元素．

③ 无序性：由于集合中元素是确定的而且是互异的，元素完全相同的集合是相等的集合，因此，集合中的元素与顺序无关．

2．集合的表示方法

（1）列举法

把集合中的元素一一列举出来，并用大括号“{}”括起来表示集合的方法叫做列举法．列举法常用来表示有限集和其元素具有特殊规律的无限集．

（2）特征性质描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法．描述法有以下两种常见形式：

① 一般形式为$\{x \mid P(x)\}$，如满足不等式 $x<3$ 的实数构成的集合可以表示为：

$$\{x \mid x<3, x \in \mathbf{R}\}.$$

② 简单形式：把元素具有的共同性质写在大括号内，如{偶数}、{三角形}．

用描述法表示集合时，要注意集合中元素的共性和特性的区别及联系．

（3）文氏图法（Venn 图）．

3．空集的含义

把不含任何元素的集合叫做空集，记为$\varnothing$．

空集具有特殊而重要的地位，但在解题的过程中极易被忽视，特别是在题设中隐含空集时，往往因忽视空集而导致错解．例如：

若 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax-2=0\}$，且 $A\cap B=B$，求由实数 a 组成的集合 C.

错解：由 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，解得 $A=\{-1,3\}$.

$\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$，又 $ax-2=0$ 有 1 个解，从而 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{3\}$.

当 $B=\{-1\}$ 时，由 $a\times(-1)-2=0$，解得 $a=-2$；

当 $B=\{3\}$ 时，由 $a\times 3-2=0$，解得 $a=\frac{2}{3}$.

故由实数 a 组成的集合 $C=\{-2,\frac{2}{3}\}$.

反思：由交集的定义容易知道，对于任何一个集合 A，都有 $A\cap\varnothing=\varnothing$，所以错解忽视了 $B=\varnothing$ 时的情况.

正确的解法是：

① 当 $B\neq\varnothing$ 时，解法同上，得 $a=-2$ 或 $a=\frac{2}{3}$；

② 当 $B=\varnothing$ 时，由 $ax-2=0$ 无实数根，解得 $a=0$.

综上可知，实数 a 组成的集合 $C=\{-2,0,\frac{2}{3}\}$.

原来可以这么做！

集合是数学中原始的、不定义的概念，在教学中，应从学生熟悉的实例出发，使学生感受集合的含义.

案例 1

一、创设情境，引入新课

（多媒体投影）

① 非洲草原一群大象在缓步走来.

② 蓝蓝的天空中，一群鸟儿在飞翔.

③ 一群学生在一起玩儿.

师：有句俗语叫“物以类聚，人以群分”，大家还能举出一些类似的例子吗？数学中有类似的例子吗？

【设计意图】通过多媒体展示，极大地调动了学生的积极性.

二、学生活动

学生思考并讨论给出一些类似的实例.

三、意义建构

观察学生所给的实例：

① 2008届我校高一学生；

② 我校高一(3)班的学生；

③ 我国从1991～2009年18年内发射的所有人造卫星；

④ 1～20以内的所有质数；

⑤ 所有的正方形；

⑥ 到直线 l 的距离等于定长 d 的所有的点；

⑦ 方程 $x^2+3x-2=0$ 的所有实数根.

师生共同概括这些实例的特征，得出结论，给出集合的含义：在一定范围内某些确定的、不同对象的全体构成一个集合，集合中的每一个对象称为该集合的元素.

【设计意图】使学生明确集合的含义，培养学生的概括能力.

案例2

一、创设情境

师：(上课，学生起立)请女生坐下(学生面面相觑，不知老师要做什么，但女生们还是坐下了).

师：请高个子男生坐下(学生小声议论，不知该不该坐下，只有少部分高个子男生坐下).

师：请身高在1.72米(含1.72米)以上的男生坐下(这时大家不再犹豫，除了个别不高的男生外都坐下了).

师：请剩下的同学依次介绍自己的家庭成员、毕业学校、原来的班级(教师板书).

二、意义建构

“女生”、“身高在1.72米以上的男生”、“家庭成员”、“学校”、“班级”等概念有什么共同特征？

在日常生活中，对于遇到的各种各样的事物，为了方便讨论，我们常常需要在一定范围内，按一定标准对所讨论的事物进行分类，分类后，我们会用一些术语来描述它们，如“群体”、“全体”等. 引出集合的含

义:在一定范围内某些确定的、不同对象的全体构成一个集合,集合中的每一个对象称为该集合的元素.

为什么"高个子男生"不能成为集合呢?——引出讨论集合中元素的三个特性.

能给您点启示吗?

康托与集合论

康托(*Georg Cantor*,1845—1918年)是德国伟大的数学家,集合论的创立者.

康托出生在俄国的圣彼得堡,11岁时和父母一起移居德国,17岁时入瑞士苏黎世大学,翌年转入柏林大学.此时的柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心.康托师从外尔斯特拉斯、库曼和克罗内克这几位著名的数学家.受导师的影响,康托对数论产生了兴趣,并集中精力对高斯留下的问题作了深入的研究,1867年以数论方面的论文获博士学位.1869年,康托取得在哈勒大学任教的资格,1879年任教授.

康托接受了数学家海涅的建议,研究方向从数论转到了函数的三角级数表示的唯一性,这是促使他建立集合论的最直接原因.函数可用三角级数表示,最早是由数学家傅立叶提出的,此后对于间断点的研究越来越成为分析领域中引人注目的问题.从19世纪30年代起,不少数学家从事着对不连续函数的研究,都在一定程度上与集合这一概念挂上了钩,这为康托最终建立集合论创造了条件.1871年,康托提出了集合的概念,还定义了集合的并与交等.1874年,康托发表了《关于全体实代数数的特征》,标志着集合论的诞生.

在接下来的三年时间里,康托向神秘的无穷宣战,他成功地证明了一条直线上的点能和一个平面上的点一一对应,也能和空间中的点一一对应.这一结果是出人意料的,就连康托本人也觉得简直不敢相信.从直观上看,平面上的点显然要比一条线上的点多得多,怎么可能建立一一对应呢?可这又是明摆着的事实.

康托在1879—1884年间主要研究线性连续,相继发表了六篇系列文章,汇集成《关于无穷的线性点集》,里面给出了集合论的一些重要结果,讨论了由集合论产生的哲学问题.1883年,康托将它以"集合论基

础"为题作为专著单独出版.《集合论基础》是康托关于早期集合理论的系统阐述.

康托于1895年和1897年先后发表了两篇对超限数理论具有决定意义的论文,文中改变了早期用公理定义的方法,而采用集合作为基本概念.

康托创造性的工作与传统的数学观念发生了冲突,遭到了一些人的反对、攻击甚至谩骂.最激烈的反对者是他的导师克罗内克,法国数学界权威庞加莱曾预言:"我们的后一代将把集合论当做一种疾病",数学家施瓦兹由于反对集合论而与康托断交……

过度的思维劳累以及强烈的外界刺激使康托患上了精神分裂症.1918年1月6日,康托在哈勒大学的精神病院去世.

康托一生饱受磨难,曾一度对数学失去兴趣,转向哲学和文学,但始终不放弃集合论.今天集合论已成为数学大厦的基石,它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支以及物理学等,康托也因此成为最伟大的数学家之一.

公理化集合论的建立

集合论提出伊始,曾遭到许多数学家的激烈反对,康托本人一度成为这一激烈论争的牺牲品.在猛烈的攻击与过度的用脑思考中,康托得了精神分裂症,几次陷于精神崩溃.然而集合论前后经历20余年,最终获得了世界公认.到20世纪初,集合论已得到数学家们的赞同.数学家们为一切数学成果都可建立在集合论基础上的前景而陶醉,他们乐观地认为从算术公理系统出发,借助集合论的概念,便可以建造起整个数学的大厦.在1900年第二次国际数学大会上,著名数学家庞加莱曾兴高采烈地宣布:"……数学已被算术化了.今天,我们可以说绝对的严格已经达到了."然而这种自得的情绪没能持续多久.不久,集合论是有漏洞的消息迅速传遍了数学界,这就是1902年罗素得出的罗素悖论.罗素构造了一个所有不属于自身(即不包含自身作为元素)的集合**R**.现在问**R**是否属于**R**?如果**R**属于**R**,则**R**满足**R**的定义,因此**R**不应属于自身,即**R**不属于**R**;另一方面,如果**R**不属于**R**,则**R**不满足**R**的定义,因此**R**应属于自身,即**R**属于**R**.这样,不论何种情况都存在矛盾.这一仅涉及集合与属于两个最基本概念的悖论如此简单明了以

致根本留不下为集合论漏洞辩解的余地.绝对严密的数学陷入了自相矛盾之中,这就是数学史上的第三次数学危机.危机产生后,众多数学家都投入到解决危机的工作中去.1908年,策梅罗提出公理化集合论,后经改进形成无矛盾的集合论公理系统,简称ZF公理系统.原本直观的集合概念被建立在严格的公理基础之上,从而避免了悖论的出现,这就是集合论发展的第二个阶段——公理化集合论.与此相对应,在1908年以前由康托创立的集合论被称为朴素集合论.公理化集合论是对朴素集合论的严格处理,它保留了朴素集合论的有价值的成果并消除了其可能存在的悖论,因而较圆满地解决了第三次数学危机.公理化集合论的建立,标志着著名数学家希耳伯特所表述的一种激情的胜利,他大声疾呼:没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中赶出去.从康托提出集合论至今,时间已经过去了一百多年,在这段时间里,数学又发生了极其巨大的变化,包括对上述经典集合论作出进一步发展的模糊集合论的出现等,这一切都与康托的开拓性工作分不开.现在回头去看康托的贡献,我们仍然可以引用当时著名的数学家对他的集合论的评价作为我们的总结:

它是对无限最深刻的洞察,它是数学天才的最优秀作品,是人类纯智力活动的最高成就之一.超限算术是数学思想最惊人的产物,在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一.这个成就可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作.

康托的无穷集合论是过去两千五百年中对数学的最令人不安的独创性贡献之一.

注:整系数一元 n 次方程的根,叫代数数.如一切有理数是代数数.大量无理数也是代数数.如 $\sqrt{2}$,因为它是方程 $x^2-2=0$ 的根.实数中不是代数数的数称为超越数.相比之下,超越数很难得到.第一个超越数是刘维尔于1844年提出的.关于 π 是超越数的证明在康托的研究后十年才问世.

问题❷ 集合的运算该如何思考?

您遇到过这些问题吗?

集合与集合之间有什么关系?如何进行集合的交、并、补计算?集

合中有哪些重要的思想方法？什么是 Venn 图？Venn 图在求解集合问题中有哪些方面的应用？

让我们都来问问自己：

《普通高中数学课程标准》对集合的关系与运算的教学要求是：

① 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.

② 在具体情境中，了解全集与空集的含义.

③ 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集.

④ 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

⑤ 能使用 Venn 图表达集合的关系及运算，体会直观图对理解抽象概念的作用.

1. 集合之间的关系

(1)子集

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，我们说集合 A 就是集合 B 的子集，记作：$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

理解子集的概念应注意以下几点：

① “A 是 B 的子集”的含义是：A 的任意一个元素都是 B 的元素，即由任意的 $x\in A$，都有 $x\in B$.

② 任何一个集合都是它本身的子集，记作 $A\subseteq A$.

③ 空集是任何集合的子集，即对于任一集合 A，都有$\varnothing\subseteq A$.

④ 子集具有传递性，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

⑤ 若某集合含有 n 个元素，则它的所有子集的个数是 2^n.

⑥ $A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 是同义的，而 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 是不同的.

(2)两个集合相等

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们

就说集合 A 与集合 B 相等，即对于集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

(3)真子集

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作

$$A\subsetneqq B(\text{或 } B\supsetneqq A).$$

理解真子集应注意以下三点：

① 空集是任何非空集合的真子集，即对于任一非空集合 B，都有 $\varnothing\subsetneqq B$.

② 真子集也具有传递性，即 $A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C\Rightarrow A\subsetneqq C$.

③ $A\subseteq B$ 包含两种情况：$A\subsetneqq B$ 或 $A=B$.

2. 集合间的运算

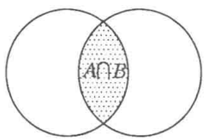
(1)交集

① 定义

文字语言表示：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集. 记作：$A\cap B$(读作："A 交 B").

符号语言表示：$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$.

图形语言(文氏图)表示，如下图：



② 关于定义的理解

对于交集"$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$"，不能简单地理解为 $A\cap B$ 中的任意元素都是 A 与 B 的公共元素，或者简单地认为 A 与 B 的公共元素都属于 $A\cap B$，这是因为并非任何两个集合总有公共元素；特别地，当集合 A 与集合 B 没有公共元素时，不能说 A 与 B 没有交集，而应表示为 $A\cap B=\varnothing$.

③ 性质

对于任意两个集合 A 与 B，有：

$A\cap B=B\cap A, A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, (A\cap B)\subseteq A, (A\cap B)\subseteq B.$

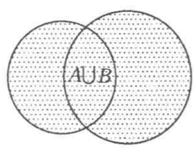
(2)并集

① 定义

文字语言表示：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的并集. 记作：$A\cup B$(读作："A 并 B").

符号语言表示：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

图形语言(文氏图)表示，如下图：



② 关于定义的理解

对于交集"$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$"，不能简单地理解为 $A\cup B$ 是由 A 的所有元素与 B 的所有元素组成的集合，因为 A 与 B 可能有公共元素.

交集和并集的符号"$\cap$"和"$\cup$"既有相同的地方，但又不完全相同，不要混淆.

"$x\in A$ 或 $x\in B$"这一条件，包含下列三种情况：$x\in A$ 但 $x\notin B$；$x\in B$ 但 $x\notin A$；$x\in A$ 且 $x\in B$(适合第三种情况的元素 x 构成的集合就是 $A\cap B$，它不一定是空集).

③ 性质

对于任意两个集合 A 与 B，有：

$A\cup B=B\cup A, A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, (A\cup B)\supseteq A, (A\cup B)\supseteq B.$

(3)全集与补集

一般地，设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$)，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 的子集 A 的补集，记作$\complement_S A$，即$\complement_S A=\{x\mid x\in S$，且 $x\notin A\}$. 如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，集合 S 就可以看做一个全集，全集通常用 S 或 U