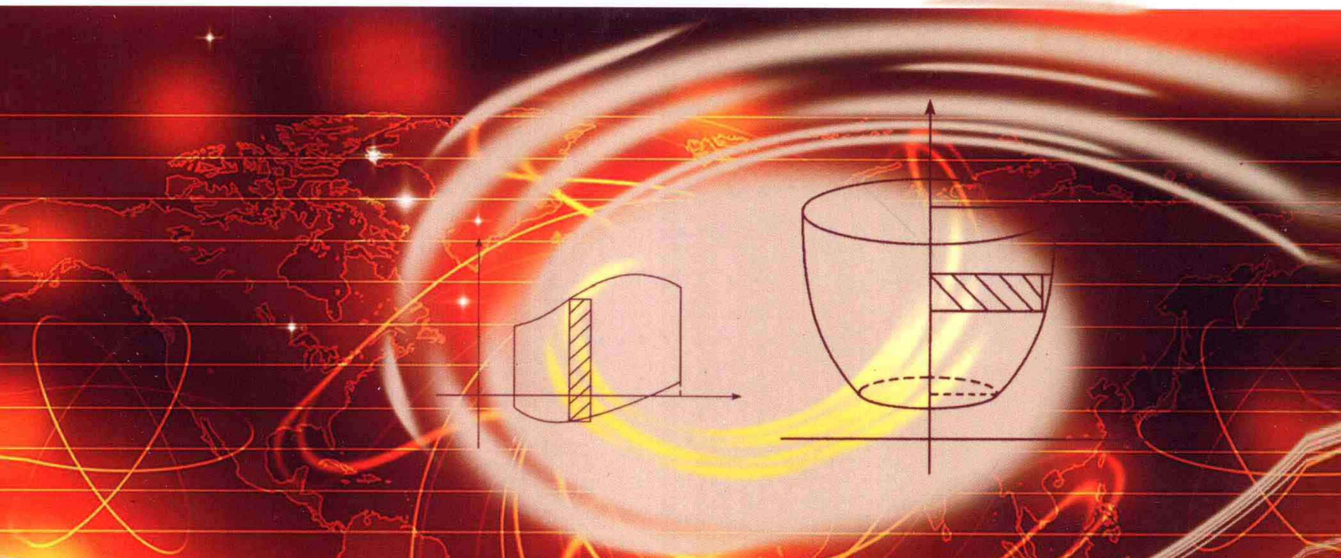
普通高等教育"十二五"规划建设教材

高等数学学习指导

gao deng shu xue xue xi zhi dao

吕振环　刘宪敏　关　驰　主编



中国農業大學出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

普通高等教育“十二五”规划建设教材

高等数学学习指导

吕振环　刘宪敏　关　驰　主编

中国农业大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是为配合惠淑荣、李喜霞主编的全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学》(第 3 版)编写的指导书。全书共分 10 章，每章均由教学基本要求、主要内容总结、重点内容拓展、教材习题解析和自测题解析五个部分组成。本书对每章的主要概念和基本理论都做了系统的概括和总结，着重讨论重点题型及其解法，并对教材中的所有习题、自测题进行详尽的分析和解答，以提高学生分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高等农林院校师生的教学参考书，也可作为学生考研的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/吕振环，刘宪敏，关驰主编. —北京：中国农业大学出版社，2011.6
ISBN 978-7-5655-0339-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吕…②刘…③关… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 129551 号

书　　名　高等数学学习指导
作　　者　吕振环　刘宪敏　关　驰　主编

策划编辑　张秀环　　**责任编辑**　尹　静
封面设计　郑　川　　**责任校对**　陈　莹　王晓凤
出版发行　中国农业大学出版社
社　　址　北京市海淀区圆明园西路 2 号　　**邮政编码**　100193
电　　话　发行部 010-62731190，2620　　读者服务部 010-62732336
编辑部 010-62732617，2618　　出　版　部 010-62733440
网　　址　http://www.cau.edu.cn/caup　　**e-mail**　cbsszs @ cau.edu.cn
经　　销　新华书店
印　　刷　北京鑫丰华彩印有限公司
版　　次　2011 年 6 月第 1 版　2011 年 6 月第 1 次印刷
规　　格　787×1092　16 开本　14.5 印张　357 千字
定　　价　25.00 元

编审人员

主　编　吕振环　刘宪敏　关　驰

副主编　陶桂洪　宋　赞

参　编　郭志鹏　郭金亭　刘　波

主　审　惠淑荣

前　言

高等数学是高等院校学生的必修课，是学习各类专业课的重要基础，数学课是公认的理论不易掌握、解题比较困难的课程。在这门课程的学习中，通过习题解析的方式可以帮助和引导学生正确理解知识点，准确掌握理论。

大多数初学者对高等数学知识的理解会有些偏差，解题时没有思路，不得要领，在应用惠淑荣、李喜霞主编的《高等数学》（第3版）教材学习的过程中，经常有学生反映希望得到该书中的所有习题的详解，为此，我们总结多年教学经验，编写了这本《高等数学学习指导》。

本书共分10章，每章分为教学基本要求、主要内容总结、重点内容拓展、教材习题解析及自测题解析五个部分。其中，教学基本要求部分是对每章内容要求学生学习、掌握程度的说明；主要内容总结部分是对各章的主要知识点进行了归纳和总结，便于学生记忆；重点内容拓展部分，精选了各章中相应知识点的基本训练题和不同层次的考研题，附有详细的解答过程；教材习题解析及自测题解析两部分与惠淑荣、李喜霞主编的《高等数学》（第3版）（中国农业出版社）一书配套。书中“*”号习题是有关经济学的内容。

本书是与《高等数学》（第3版）配套的指导书，不仅对教师和正在学习此课的学生有极大的辅助作用，而且对准备考研的考生和科技工作者也有一定的参考价值。

本书由沈阳农业大学惠淑荣教授策划、统稿、主审，编写过程中得到了沈阳农业大学有关人士的大力支持和帮助，在此一并表示最诚挚的谢意！

书中不妥之处，恳请各位同仁及读者批评指正。

编　者

2011.3

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、教学基本要求

1. 理解函数的概念；
2. 掌握函数的单调性、周期性和奇偶性；
3. 了解反函数的概念；
4. 熟练掌握基本初等函数的性质和复合函数的概念；
5. 能正确应用极限四则运算法则；
6. 掌握两个极限存在准则，会用两个重要极限求极限；
7. 了解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较；
8. 掌握函数在一点连续与间断的概念；
9. 掌握初等函数的连续性；了解闭区间上连续函数的性质.

二、主要内容总结

(一)重要定义

1. 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

2. 函数极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

3. 左、右极限

左极限：

$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限：

$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

4. 无穷小量

以 0 为极限的函数称为无穷小量，简称无穷小.

5. 无穷大量(实际上是极限不存在的一种形式)

在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为无穷大

量,简称无穷大.

注意 无界变量与无穷大量的区别:无穷大量一定是无界变量,但无界变量不一定是无穷大量.

6. 无穷小的比较

设$\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$,

(1)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小,记为$\alpha=0(\beta)$.

(2)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称$\alpha$是比$\beta$低阶的无穷小.

(3)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c(c\neq0)$,则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小.

(4)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小,记为$\alpha\sim\beta$.

常用的等价形式:

当$x\to0$时,

$\sin x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$e^x-1\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

7. 函数连续的概念

定义 1 设函数$f(x)$在x_0的某个邻域内有定义,在x_0处给x以增量Δx,相应地得到函数增量Δy,$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若极限$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$,则称函数$f(x)$在$x_0$处连续.

定义 2 设函数$f(x)$满足下列条件:

(1)$f(x)$在x_0的某个邻域内有定义;(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;(3)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$;则称函数$f(x)$在$x_0$处连续.

8. 间断点

若$f(x)$在x_0处出现如下三种情形之一:

(1)$f(x)$在x_0处无定义;(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;(3)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$;则称$x_0$为函数$f(x)$的间断点.

(二)重要定理

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理 3 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$f(x)\geqslant0(f(x)\leqslant0)$,则$A\geqslant0(A\leqslant0)$.

定理 4 单调有界数列必有极限.

定理 5 (夹逼定理)

设在x_0的某个邻域内,有$\phi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定理 6 无穷小的运算性质

(1)有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

(2)有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

(3)无穷小乘以有界量仍为无穷小.

定理 7　(无穷大与无穷小的关系)

在自变量同一变化趋势下无穷大的倒数为无穷小,非"0"的无穷小的倒数为无穷大.

定理 8　极限运算法则

设$\lim f(x)$与$\lim g(x)$都存在,则有:

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

定理 9　初等函数在其定义区间内都连续.

(三)重要公式

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$

4. 函数 $f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=f(x_0)$.

5. 几个常用极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>0)=1$,特例$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

(3)$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$.

(4)$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

(5)$\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

三、重点内容拓展

例 1　设 $f(x)$是奇函数,$F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$,其中 a 为不等于 1 的正数,则$F(x)$是(　　).

(A)偶函数　(B)奇函数　(C)非奇非偶函数　(D)奇偶性与 a 有关

答　选(A).

分析　$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)\\&=-f(x)\left(\frac{a^x}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)\\&=-f(x)\left[\frac{2a^x-a^x-1}{2(a^x+1)}\right]\end{aligned}$$

$$=-f(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{a^x+1}\right)$$
$$=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=F(x).$$

由偶函数的定义，$F(x)$是偶函数，所以选(A).

例 2 下列极限不存在的是(　　).

(A) $\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots$

(B) $x_n=\begin{cases}\frac{n}{1+n}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{n}{1-n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

(C) $x_n=\begin{cases}1+\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\\ (-1)^n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

(D) $x_n=\begin{cases}1, & n<10^6\\ \frac{1}{n}, & n\geqslant 10^6\end{cases}$

答 选(B).

分析 对于(B)，当 n 取奇数$\to\infty$时，$x_n\to 1$；当 n 取偶数$\to\infty$时，$x_n\to -1$，由极限的唯一性，可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在，所以选(B).

对于(A)，当 n 为奇数时，$x_n=\frac{n+2}{n+1}$，当 n 为偶数时，$x_n=\frac{n}{n+1}$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

对于(C)，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

对于(D)，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 注意，数列极限与前几项没有关系.

例 3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}$.

解 因为

$10=\sqrt[n]{10^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}<\sqrt[n]{10\cdot 10^n}=10\cdot\sqrt[n]{10}$，

而$\sqrt[n]{10}=1$，由夹逼定理知，原式$=10$.

例 4 设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n$，则 $f(x)=($　　$)$.

(A) e^{x-1}　　(B) e^{x+2}　　(C) e^{x+1}　　(D) e^{-x}

答 选(C).

分析 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to}\left[\left(1+\frac{2+x}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2+x}}\right]^{\frac{n(2+x)}{n-2}}=e^{2+x}=e^{1+(x+1)}$，所以 $f(x)=e^{1+x}$，

所以选(C).

例 5 下列极限正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=1$

(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

答 选(B).

分析 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$，所以选(B)；而$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\pi}{\pi}=0$，

又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\sin\dfrac{1}{x}$，$\sin x$是有界量，有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

注意 在重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$中，极限过程是$x\to 0$.

例 6 设$x\to 0$时，$e^{x\cos x^2}-e^x$与x^n是同阶无穷小，则n为(　　).

(A)5　　(B)4　　(C)$\dfrac{5}{2}$　　(D)2

答 选(A).

分析 由题意选取n使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\cos x^2}-e^x}{x^n}$为一不为零的常数.

因为

$$e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1],$$

当$x\to 0$时，

$$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\frac{x^4}{2}\right),$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\cos x^2}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{x^4}{2}\right)}{x^n}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^{5-n}}{2}\overset{n=5}{=\!=}-\frac{1}{2},$$

所以选(A).

例 7 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$a=$(　　).

(A)ln2　　(B)0　　(C)2　　(D)任意实数

答 选(A).

分析 $f(x)$在不是分段点处是初等函数，它是连续的，因此只讨论$f(x)$在分段点$x=1$处的情形．要使$f(x)$在$x=1$处连续，必须使

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1).$$

即$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}=3=e^{2a}-e^a+1$，解得$a=\ln 2$，所以选(A).

例 8 函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$，则$x=1$是$f(x)$的(　　).

(A)第二类间断点　　(B)第一类非可去间断点

(C)第一类可去间断点　　(D)连续点

答 选(A).

分析 $f(x)$在$x=1$处无定义，所以不选(D)．又

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$

故$x=1$是$f(x)$的第二类间断点，所以选(A).

例 9 设$f(x)$在$[0,2a]$上连续，且$f(0)=f(2a)$，证明存在$\xi\in[0,2a]$，使得

$f(\xi)=f(a+\xi)$.

证明 设函数 $\phi(x)=f(x+a)-f(x)$，有

$$\phi(0)=f(a)-f(0)=f(a)-f(2a),\phi(a)=f(2a)-f(a)=-\phi(0),$$

若 $\phi(0)=0$，则 $\xi=0$ 或 $\xi=a$ 即为所求．

若 $\phi(0)\neq 0$，由零点定理知，存在 $\xi\in(0,2a)$，使得 $\phi(\xi)=0$，即有 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

例 10 对任意的 x 总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ (　　).

(A)存在且等于零　　(B)存在但不一定等于零

(C)一定不存在　　(D)不一定存在

答 选(D).

分析 举反例．令 $\varphi(x)=1-\mathrm{e}^{-|x|}$，$g(x)=1+\mathrm{e}^{|-x|}$，$f(x)=1$，则有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，可排除(A)(C)选项；

又令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-|x|}$，$g(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-|x|}$，$f(x)=\mathrm{e}^x$，也有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在，可排除(B)，故选(D).

四、教材习题解析

1. 求下列函数的定义域．

(1) $y=\cos\sqrt{x}$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$\sqrt{x}$ 有定义，所以 $y=\cos\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

(2) $y=\arcsin(x-3)$.

解 当 $-1\leqslant x-3\leqslant 1$ 即 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，函数 $y=\arcsin(x-3)$ 有定义，所以该函数的定义域为 $[2,4]$.

(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

解 当 $3-x\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 3$ 时，$\sqrt{3-x}$ 有定义，当 $x\neq 0$ 时，$\arctan\dfrac{1}{x}$ 有定义，所以该函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(4) $y=\ln(x+1)$.

解 当 $x+1>0$ 即 $x>-1$ 时，函数 $y=\ln(x+1)$ 有定义，所以该函数的定义域为 $(-1,+\infty)$.

(5) $y=\log_{(x-1)}^{(16-x^2)}$.

解 当 $x-1>0$ 且 $x-1\neq 1$ 同时 $16-x^2>0$ 时，函数 $y=\log_{(x-1)}^{(16-x^2)}$ 有定义，即 $1<x<4$ 且 $x\neq 2$，所以该函数的定义域为 $(1,2)\cup(2,4)$.

(6) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

解 由题意可得$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1;\\ 2x-1\geqslant 0;\\ \ln(2x-1)\neq 0;\\ 2x-x^2\geqslant 0;\end{cases}$

解得该函数的定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

2. 判别下列函数的奇偶性.

(1)$y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$.

解 $f(-x)=-x-\dfrac{(-x)^3}{6}+\dfrac{(-x)^5}{120}=-\left(x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}\right)=-f(x)$,所以该函数为奇函数.

(2)$y=x^2+\cos x$.

解 $f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)$,所以该函数为偶函数.

(3)$y=x-x^2$.

解 $f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2\neq f(x)$,且$f(-x)\neq -f(x)$,所以该函数为非奇非偶函数.

(4)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$,所以该函数为奇函数.

3. 试证明下列函数在指定区间上的单调性.

(1)$y=x^2,x\in(0,2)$.

证明 设$x_1\in(0,2),x_2\in(0,2)$且满足$x_1<x_2$,有

$$f(x_1)=x_1^2<f(x_2)=x_2^2.$$

所以函数$y=x^2$在$(0,2)$上是单调增加的.

(2)$y=\ln x,x\in(1,\mathrm{e})$.

证明 设$x_1\in(1,\mathrm{e}),x_2\in(1,\mathrm{e})$且满足$x_1<x_2$,有

$$f(x_1)=\ln x_1<f(x_2)=\ln x_2.$$

所以$y=\ln x$在$(1,\mathrm{e})$上是单调增加的.

4. 求下列函数的周期.

(1)$y=\sin 2x+\cos\dfrac{x}{2}$.

解 $y=\sin 2x$的周期为π,$y=\cos\dfrac{x}{2}$的周期为4π,所以该函数的周期为4π.

(2)对一切实数x,有$f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,求$f(x)$的周期.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\dfrac{1}{2}+x\right)}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right]^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f^2(x)-f(x)+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2},$$

因为

$$f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以 $f(x)=f\left(\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(x-\frac{1}{2}\right)-f^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}\geqslant\frac{1}{2}$

则 $f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x)$，即 $f(1+x)=f(x)$，

所以该函数的周期为 1.

5. 下列各函数可以看做是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt{2-x^2}$.

解 $y=\sqrt{u}, u=2-x^2$，u 为中间变量.

(2) $y=\ln\sqrt{1+x}$.

解 $y=\ln u, u=\sqrt{v}, v=1+x$，$u$、$v$ 为中间变量.

(3) $y=\sin^2(1+2x)$.

解 $y=u^2, u=\sin v, v=1+2x$，u、v 为中间变量.

(4) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$.

解 $y=u^3, u=\arcsin v, v=1-x^2$，$u$、$v$ 为中间变量.

(5) $y=(x-3)^{10}$.

解 $y=u^{10}, u=x-3$，u 为中间变量.

(6) $y=2^{\tan x}$.

解 $y=2^u, u=\tan x$，u 为中间变量.

(7) $\cos\sqrt{1+2x}$.

解 $y=\cos u, u=\sqrt{v}, v=1+2x$，$u$、$v$ 为中间变量.

(8) $y=e^{x^2}$.

解 $y=e^u, u=x^2$，u 为中间变量.

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求：(1) 函数 $f(\ln x)$ 的定义域；(2) 函数 $f(\sin x)$ 的定义域；(3) 函数 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 的定义域.

解 (1) 当 $\ln x\in[0,1]$，即 $x\in[1,e]$ 时，$f(\ln x)$ 有定义，所以函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,e]$.

(2) 当 $\sin x\in[0,1]$，即 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k\in Z_+$ 时，$f(\sin x)$ 有定义，所以函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k\in Z_+$.

(3) 当 $\frac{x+1}{x}\in[0,1]$，即 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 有定义，所以函数 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 的定义域为 $[1,+\infty)$.

7. 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x)$，$f(x+2)$.

解 $f(x-2)=x^2-2x+3=(x-2)^2+2(x-2)+3$，

所以

$$f(x)=x^2+2x+3, f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11.$$

8. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-x}, x<0 \\ x^2, x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解 当 $x<0$ 时，$f[\varphi(x)]=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{-x})=e^{-x}$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$f[\varphi(x)]=\frac{1}{2}(x^2+x^2)=x^2$，

即 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{-x}, x<0 \\ x^2, x\geqslant 0 \end{cases}$.

*9. 某厂生产产品 1 000 t，每吨定价为 130 元，销售量在 700 t 以内时，按原价出售，超过 700 t 时，超过的部分需按 9 折出售，试求销售总收益与总销售量的函数关系.

解 设销售总收益为 y 元，总销售量为 x t.

$$y=\begin{cases} 130x, & 0\leqslant x\leqslant 700 \\ 130\times 700+130\times 0.9\times(x-700), & 700<x<1\,000 \end{cases}.$$

*10. 某厂生产的收音机每台可卖 110 元，固定成本 7 500 元，可变成本为每台 60 元. (1)要卖多少台收音机，厂家才可保本(无盈亏)？(2)卖掉 100 台，厂家盈利或亏损了多少？(3)要获利1 250元的利润，需要卖多少台？

解 (1)设要卖 x 台收音机，厂家可保本，则 $110x=7\,500+60x$，解得 $x=150$，即要卖 150 台收音机，厂家无盈亏.

(2)卖掉 100 台的总收益为 $110\times 100=11\,000$(元)，

100 台收音机的总成本为 $7\,500+100\times 60=13\,500$(元)，

$11\,000-13\,500=-2\,500$(元)，即卖掉 100 台，厂家亏损2 500元.

(3)设要卖 x 台，可获利1 250元. $110x-7\,500-60x=1\,250$，解得 $x=175$，即要卖 175 台，厂家可获利1 250元.

*11. 有两家健身俱乐部，第一家每月收会费 300 元，每次健身收费 1 元，另一家每月收会费 200 元，每次健身收费 2 元，若只考虑经济因素，你会选择哪一家？

解 设健身的次数为 x，令 $300+x=200+2x$，解得 $x=100$，即健身的次数少于 100 时，选择第二家；健身的次数多于 100 时，选择第一家.

12. 求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限，说明 $f(x)$ 在这点的极限是否存在？并作出它的图形.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$，因为左、右极限不相同，所以在 $x=0$处的极限不存在. 图形略.

13. 下列极限存在吗？若存在，求出其值；若不存在，说明理由.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，在 $x=0$ 处左、右极限不同，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在．

14. 当 $x\to 0$ 时，两个无穷小 $(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$ 哪一个是高阶的无穷小？

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}x^2=0,$$
所以在 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小．

15. 计算下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^3+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^3+1}=\frac{1^2+1}{1^3+1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4}=\frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{5}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-3x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-3x+1}\xlongequal{\text{“抓大头”}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=3$.

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{-x}{1+x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x}{-x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{-x}{1+x}=\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-3}{x^3+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-3}{x^3+1}\xlongequal{\text{“抓大头”}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3}=0$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+3x^2-1}{x^2-2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+3x^2-1}{x^2-2x}\xlongequal{\text{“抓大头”}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^2}=\infty$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$.