·高中卷·

名师谈数学教与学

张孝达题

主编 左加林

科学普及出版社

名师谈数学教与学

张孝达题

·高中卷·

主编　左加林　　副主编　胡学忠

科学普及出版社

1994年9月·北京

（京）新登字026号
图书在版编目（CIP）数据

责任编辑：马　妍
封面设计：胡萌荣
正文设计：黄吉平

名师谈数学教与学
（高中卷）
主编　左加林　　副主编　胡学忠
*
科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路32号　邮政编码：100081
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
江西省吉安地区印刷厂印装
*
开本：787×1092　1/32　印张：10.5　字数：435千
1994年9月第1版　1994年9月第1次印刷
印数：1—10，000
ISBN7—110—03886—6/G·1284

定价：硬精装20.00元，软精装11.50元，平装9.80元

主 编 简 介

左加林，男，1957年6月出生．1981年元月于赣南师专数学科毕业后分配在江西省宁冈中学，任教过中学各年级数学课，其中自1986年至今一直担任高三数学教学，每年在高考中所取得的成绩均突破了或保持着本校也是本县的历史最高纪录．教学之余，致力于数学教育理论研究，迄今已在省级以上正式专业刊物发表论文170余篇．出版了题为《初中代数的形象教学》的学术论著，此书出版后受到的评价之高是本专业中所不多见的．与人合编专业书籍廿十余种(册)，主编专业著作九种(册)．现为江西省中学数学教研会理事、国家《21世纪中国数学教育展望》科研课题组中心成员．江西省宁冈县第二、三、四届政协常委．鉴于他在教学与研究中所取得的突出成绩，1987年破格晋升为中学一级教师，1992年又破格聘为中学高级教师．曾两度评为宁冈县优秀教师，1991年元月评为“江西省吉安地区有突出贡献的专业技术拔尖人才”，1992年4月评为“中国改革功勋”，11月评为吉安地区“创十佳”活动先进个人，1993年6月获宁冈县科技进步一等奖，1994年6月获江西省教育科研优秀成果二等奖(是本次评奖中江西省数学界所获的最高荣誉)．业绩载入《中国数学教育人名辞典》、《中国当代中教名师辞典》等五部辞典，并分别在《井冈山报》、《中国老区报》、《老区建设》杂志作过专题报道(人物通讯、报告文学)；1993年4月还由中央教育电视台吉安地区记者站录制题为《献给红土地的爱》的电视专题片进行电视报道．

内 容 提 要

本书根据国家教委考试管理中心数学科《考试说明》所作出的数学教学、考试要求，延请国内在数学教育研究中成就斐然，又在实际教学中长期作出突出成绩的134位一线优秀教师对其规定的所应考查的134个知识点一一进行了全方位解析．每个知识点的解析均按：一、知识解析；二、方法导引；三、基本联系；四、基本应用；五、综合应用等五个层次进行，并且一切论述和举例均严格控制在《考试说明》所规定的要求范围内，力避“超纲”现象．因而，本书是当前范围最广泛、体系最完整、、结构最系统、内容最翔实准确的高中数学教学参考用书，适合于高中各年级、各种程度的教师和学生使用．

目　　录

（作者排名不分先后）

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

第二章　三角函数

第三章 两角和与两角差的三角函数

第四章 反三角函数与简单的三角方程

第五章 不等式

第六章　数列、极限、数学归纳法

第七章　复数

第八章　排列、组合、二项式定理

第九章　直线和平面

第十章　多面体和旋转体

第十一章　直线

第十二章　圆锥曲线、坐标平移

第十三章　参数方程、极坐标

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

作者简介　尤善培，男，1959年12月出生. 1992年1月毕业于扬州师范学院数学系. 现任扬州市邗江县蒋王中学数学高级教师，教导主任. 教学之余，辛勤笔耕，在《中学数学》、《福建中学数学》等刊物上发表"目标意识与整体观念"等二十余篇论文，主编或编著了《中学数学学习指导》、《立体几何内容方法技巧》等十余部数学教学参考书. 1993年被评为江苏省"新长征突击手"和"全国优秀教师".

1. 集合

一、知识解析　我们把具有某种属性(或性质)的对象看成一个整体，便形成了一个集合，也就是说，集合是具有一定范围的、确定的对象的全体. 其中各个具体的对象叫做集合的元素.

集合的元素具有以下三个鲜明的特征：

(1)元素的确定性. 对于给定的一个集合，任何一个对象或者是这个集合的元素，或者不是这个集合的元素，二者必居其一. 由此可见，集合中的元素既是完备的(凡是具备某种性质的事物都是集合的元素)，又是纯粹的(集合中的元素都具备某种性质).

(2)元素的互异性. 在同一个集合中，它的各个对象是互不相同的，即如果有相同元素归入同一集合时，只能算作该集合的一个元素.

(3)元素的无序性. 集合只与它的成员有关，而与它的成员的顺序无关. 因此在表示集合时，不考虑元素间的顺序.

这样，集合就成为一种简炼而精确的数学语言. 如集合$\{(x,y)\mid x^2+y^2=144\}$就表示坐标平面上以原点为圆心，12为半径的圆周上的所有点. 但是在中学数学中，集合又仅作为一种语言，不作较深刻的研究.

二、方法导引　正确理解和准确使用集合语言是中学数学的基本要求. 而问题的关键在于准确识别一个集合和选择恰当的方法来表达一个集合.

集合的表示方法有列举法，它往往适用于集合的元素不太多时，如$\{a,b,c\}$；有描述法，当集合是无限集，或者虽然是有限集，但集合中的元素过多时，用这种方法表示，如$\{x\mid x^2-3x+2>0\}$；有用区间表示的，如$(2,4]$表示集合$\{x\mid 2<x\leqslant 4\}$；还有图示法；对一些特殊的数集还有常用约定记法，如N、Z、R、C等.

对于一个给定的集合用什么方法来表示是很有讲究的. 我们追求的是正确、简

洁、清楚地把一个集合表示出来.

(1)表达要正确. 如集合$\{x|x^2+5x+6=0\}$表示满足方程$x^2+5x+6=0$的x的全体,即$\{-2,-3\}$,不能表示成$\{x^2+5x+6=0\}$. 因为前者的元素是数,而后者的元素是一个二次方程,两者根本就不是一回事.

(2)表达要清楚. 如集合$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\varphi\}$中的$k$应有明确的取确值范围,如果写成$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\varphi,k\in Z\}$就清楚了.

(3)表达要简洁. 如集合$A=\{y|y=2x^2,x\in Z\}$,$B=\{x|x=2y^2-4y-2,y\in Z\}$表示的是同一个集合,通常我们用$A$来表示,因为这样简单明了.

三、基本联系　集合作为重要的语言广泛地应用于数学的各个方面.

(1)用集合的语言来刻划数学命题. 如"证明集合$\{x|x^2+x+1=0,x\in R\}=\varnothing$",其实质就是"证明方程$x^2+x+1=0$没有实数根."

(2)用集合的语言来提出数学问题. 如$A=\{2,2x^3-x^2-5x+1,4\}$,求使$A=\{2,3,4\}$的一切x的值. 本题实际上是提出了这样一个问题:解方程$2x^3-x^2-5x+1=3$.

(3)用集合的语言表示平面图形. 如已知集合$A=\{(x,y)|x+y+1=0\}$,$B=\{x,y)|x^2+y^2=1\}$,是否存在这样的元素a满足$a\in A$,且$a\in B$. 集合A和B分别表示坐标平面内的直线和圆,而提出的问题是求直线和圆的交点.

四、基本应用

例 1. 下列命题中:(1)"所有半径较小的圆"是一个集合;(2)"所有边长为整数的直角三角形"是一个集合;(3)集合$\{a,b,c,d,a\}$中有5个元素;(4)$\{0,2,4,6,8\}$与$\{8,6,4,2,0\}$表示同一个集合. 正确的命题为(　　)

(A)仅(1)和(2)　(B)仅(2)和(4)　(C)仅(3)和(4)　(D)仅(1)和(4)

解　由集合中元素的确定性可知"所有半径较小的圆"不是集合,因为半径是否"较小"是无法确定的,如半径为1厘米相对1千米简直太小,而相对1毫米恰又太大了. 而"所有边长整数的直角三角形"是一个集合,如边长为5,12,13的三角形是这个集合中的元素,边长为4,5,6的三角形就不是这个集合中的元素. 根据集合元素另外两个性质,容易判断出集合$\{a,b,c,d,a\}$中只有4个元素,集合$\{0,2,4,6,8\}$和$\{8,6,4,2,0\}$是相同的集合(这与相同的数列不是一回事),因此,选择(B).

例 2. 已知$A=\{x|x=2n,n\in Z\}$,$B=\{x|x=2n+1,n\in Z\}$,$C=\{x|x=4n+1,n\in Z\}$,设$\alpha\in A$,$\beta\in B$,则$\alpha+\beta$,$\alpha\cdot\beta$分别是A、B、C哪个集合中的元素?

解　设$\alpha=2n_1$,$\beta=2n_2+1$,n_1、$n_2\in Z$,则$\alpha+\beta=[2(n_1+n_2)+1]\in B$,　$(n_1+n_2\in Z)$,$\alpha\cdot\beta=2n_1(2n_2+1)=2[n_1(2n_2+1)]\in A$.

注意　如果设$\alpha=2n$,$\beta=2n+1$就容易误认为$\alpha+\beta\in C$.

例 3. 用描述法表示下列集合:(1)$\{0,3.5,8.\dot{6},15.75,24.8\}$;(2)$\{(1,\sqrt{2}),(2,2),(3,\sqrt{6}),(4,2\sqrt{2}),(5,\sqrt{10})\}$.

分析 (1)、(2)都是用列举法表示的集合，欲用描述法表示，须考察各个对象，总结其规律，得出一般关系，并注意字母的取值范围.

解 (1)因为 $0=\frac{1^3-1}{1}$，$3.5=\frac{2^3-1}{2}$，$8.\dot{6}=\frac{3^3-1}{3}$，$15.75=\frac{4^3-1}{4}$，$24.8=\frac{5^3-1}{5}$.
所以 $\{0,3.5,8.\dot{6},15.75,24.8\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n^3-1}{n},n\in N,\text{且 } n<6\right\}$.

(2)因为 $(\sqrt{2})^2=2\cdot1$，$2^2=2\cdot2$，$(\sqrt{6})^2=2\cdot3$，$(2\sqrt{2})^2=2\cdot4$，$(\sqrt{10})^2=2\cdot5$. 所以 $\{(1,\sqrt{2}),(2,2),(3,\sqrt{6}),(4,2\sqrt{2}),(5,\sqrt{10})\}$
$=\{(x,y)\mid y^2=2x,x、y\in N\text{ 且 } x\leqslant5\}$.

在用描述法表示的集合中，左边代表集合元素的一般形式，右边描述集合元素的公共属性.

五、综合应用

例1. 已知 $A=\{1,1+d,1+2d\}$，$B=\{1,r,r^2\}$(其中 $d\neq1$)，当 a、r 满足什么条件时，$A=B$，并求 B.

解 若 $\begin{cases}1+d=r,\\1+2d=r^2.\end{cases}$ 解得 $r=1$，与已知矛盾，舍去；若 $\begin{cases}1+d=r^2,\\1+2d=r.\end{cases}$ 得 $r=-\frac{1}{2}$ 或 $r=1$(舍去). 以 $r=-\frac{1}{2}$ 代入，可得 $d=-\frac{3}{4}$，$\therefore r=-\frac{1}{2}$，$d=-\frac{3}{4}$，则 $A=B$.
因此，$B=\left\{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$.

例2. 数集 A 满足条件，若 $a\in A$，$a\neq1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，(1)若 $2\in A$，则 A 中还有另外两个数，求出这两个数；(2)若 A 是单元素集，求 a 和 A.

解 (1)$\because 2\in A$，则 $\frac{1}{1-2}=-1\in A$，又因为 $-1\in A$，则 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$，因此，$A$ 中还有另外两个数 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)$\because A$ 为单元素集，$\therefore a=\frac{1}{1-a}$，解之，$a=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，因此，$a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时，$A=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$；$a=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时，$A=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

作者简介 李德雄，男，1962年11月出生．1982年毕业于湖北大学数学系，1987年毕业于中华全国律师函授中心．曾任教导处副主任，现任校务办主任．1992年破格晋升中学高级教师．在十多家省级以上数学刊物上发表学术论文20多篇，主编或参编的数学著作有10余部已正式出版．系中国数学会会员、荆州地区超常教育研究会理事、京山县中数研究会副理事长．工作业绩已被收入《中国当代教育名人辞典》．

2. 子集、交集、并集

一、知识解析　子集概念由讨论集合与集合间的关系引起，两个集合 A 与 B 之间有如下关系：

$$\begin{cases} A\subseteq B\begin{cases} A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B, B\subseteq A, \\ A\neq B\Longrightarrow A\subset B; \end{cases} \\ A\not\subseteq B. \end{cases}$$

子集的定义：$A\subseteq B\Longleftrightarrow$ 任取 $x\in A\Longrightarrow x\in B$．子集的性质：(1) $A\subseteq A$；(2) $\varnothing\subseteq A$；(3) $A\subseteq B, B\subseteq C\Longrightarrow A\subseteq C$．真子集的定义：$A\subset B\Longleftrightarrow A\subseteq B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A．真子集的性质：(1) $\varnothing\subset A(A\neq\varnothing)$；(2) $A\subset B, B\subset C\Longrightarrow A\subset C$．由上述定义和性质可知，把 A 是 B 的子集和真子集解释成 A 是由 B 中部分元素所组成的集合都是不确切的．理由是：B 的子集也包括它本身，而该子集是由 B 的全体元素组成的；空集也是 B 的子集，而它并不含 B 的任何元素．有限集的子集数．n 元集共有 2^n 个子集，其中真子集有 2^n-1 个．该结论有两种获得方式：(1) 用排列组合知识求；(2) 先不完全归纳猜出结论，后用数学归纳法予以证明．

交集的定义：$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$．并集的定义：$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$．理解联结词“且”和“或”是掌握交集与并集定义的关键．“且”与通常说的“既是…，又是…”相同，“$x\in A$ 且 $x\in B$”表明 x 既是 A 的元素，又是 B 的元素，即 x 是 A 与 B 的公共元素．但“或”与通常所说的“非此即彼”却有区别，它是“相容”的，“$x\in A$ 或 $x\in B$”含三种情况：(1) $x\in A$ 但 $x\notin B$；(2) $x\in B$ 但 $x\notin A$；(3) $x\in A$ 且 $x\in B$．交与并作为集合的两种运算，具有如下运算性质：(1) 幂等律：$A\cup A=A, A\cap A=A$；(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；(3) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；(4) 吸收律：$(A\cap B)\cup A=A$，$(A\cup B)\cap A=A$；(5) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；(6) 两极律：$A\cup I=I$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap I=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$．

二、方法导引

1. 互译方法：集合语言（数学语言）简洁、抽象；几何语言形象、直观；自然语言亲

切、易懂．有些集合问题的求解必须将集合语言与几何语言进行互译，但两者往往联系松散，不易相互转化．因而必须确定能起桥梁和纽带作用的自然语言作为过渡工具，以促进两者的相互转化．以自然语言作为过渡语言进行互译对初学者尤为必要，教师要特别注意对学生互译能力的培养．

2．*Vern* 图方法：集合的 *Vern* 图表示法，具有形象、直观等特点．它不仅可帮助我们深刻理解和记忆集合概念、运算公式和相互关系，而且还可对一些数学对象进行有效分类，把具有共同特征的概念合理地归入一个集合，并由题设求出子集、交集、并集．借助 *Vern* 图可找到某些集合问题的简捷解法．

3．交集思想方法：设 $A=\{x|x$ 具有性质 $P_1\}$，$B=\{x|x$ 具有性质 $P_2\}$，因 $A\cap B$ 的元素同时具有性质 P_1 和 P_2，所以，探讨同时具有性质 P_1 和 P_2 的对象，可考虑用交集思想方法．

4．并集思想方法：有些数学问题牵涉若干个体，若用孤立静止的观点求解，则或过于繁冗或难以奏效；若在挖掘各个体间隐含的某种关系的基础上将各个个体合并（取并集）成一个有机整体进行处理，则会出奇制胜．从哲学意义上讲，这种合成（实质上是一种优化组合）可使处于无序、不合理状态的若干个体在结构上成为有序、合理的整体，因而可提高整体功效．

三、基本联系　子集、交集、并集与函数、方程、不等式、排列组合、复数、解析几何等知识有着密切联系，它们彼此交融构成表述抽象、解法灵活的数学综合题．读者将在下面的应用部分见到相应的范例及解法．

四、基本应用

例 1． 写出所有满足条件：$\{0,1\}\subseteq A\subset\{0,1,2,3,4\}$ 的集合 A．

解　合条件的集合 A，即集合 $\{0,1,2,3,4\}$ 的含有元素 0 与 1 的真子集，它们是：$\{0,1\}$，$\{0,1,2\}$，$\{0,1,3\}$，$\{0,1,4\}$，$\{0,1,2,3\}$，$\{0,1,2,4\}$，$\{0,1,3,4\}$．

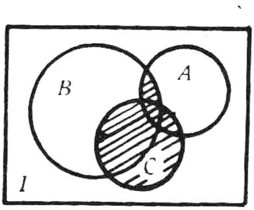
注　为避免遗漏，可将 7 个真子集分为三类：①二元集；②三元集；③四元集．

例 2． 已知 A，B，C 是全集 I 的子集，试解答下列问题：(1)用 A，B，C 表示图 1—1 中阴影部分；(2)图示 $A\cup B\cap\bar{C}$．

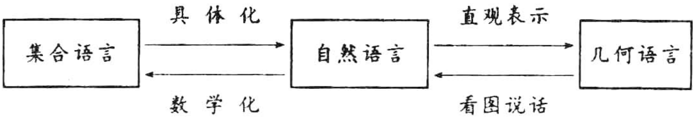
解　(1)由图 1—1 知，阴影部分表示 C 内或者 $A\cap B$ 内的元素，集合表达式为 $C\cup(A\cap B)$．

(2)$(A\cup B)\cap\bar{C}$ 表示 C 外且 $A\cup B$ 内的元素，图示从略．

注　题(1)与题(2)互为逆问题，从思维方向角度看，前者是从具体到抽象，后者是从抽象到具体，思维过程可概括为



（图 1—1）



例 3. 已知 $x\in R$，集合 $A=\{-3,x^2,x+1\}$，$B=\{x-3,2x-1,x^2+1\}$. 如果 $A\cap B=\{-3\}$，求 $A\cup B$.

分析 解本题的关键在于由条件 $A\cap B=\{-3\}$ 确定参数 x 的值. 因题目已昭示 $-3\in A$，故应从 $-3\in B$ 入手.

解 $\because A\cap B=\{-3\}$，$\therefore -3\in B$，又 $x^2\pm1\neq-3$，故 $x-3=-3$ 或 $2x-1=-3$. 若 $x-3=-3$，即 $x=0$，则 $A=\{-3,0,1\}$，$B=\{-3,-1,1\}$，此时 $A\cap B=\{-3,1\}$ 与已知相悖；若 $2x-1=-3$，即 $x=-1$，则 $A=\{-3,1,0\}$，$B=\{-4,-3,2\}$，此时 $A\cap B=\{-3\}$ 与已知相符. 综上可知，$A\cup B=\{-4,-3,0,1,2\}$.

五、综合应用

例 1. 已知 n 是同时满足下列条件的最小自然数：(1)是 15 的倍数；(2)各个数位上的数字是 0 或 8，求 n 的值.

解 设 $A=\{n|n$ 是 15 的倍数$\}$，$B=\{$各个数位上是 0 或 8 的自然数$\}$，则所求的 n 是交集 $A\cap B$ 的最小元素. $\because A=\{3$ 的倍数$\}\cap\{5$ 的倍数$\}=\{$数字和是 3 的倍数的自然数$\}\cap\{$末位数是 0 或 5 的自然数$\}$，$\therefore A\cap B=\{$末位数是 0，其余各位是 0 或 8，但 8 的个数是 3 的倍数的自然数$\}$，而 n 是 $A\cap B$ 的最小元素，$\therefore n=8880$.

例 2. 已知 $A=\{x|x^2-ax\leqslant x-a\}$，$B=\{x|1\leqslant\log_2(x+1)\leqslant2\}$，$C=\{x|x^2+bx+c>0\}$. (1)若 $A\cap B=A$，求 a 的取值范围；(2)若 $B\cap C=\varnothing$，且 $B\cup C=R$，求 c、b 的值.

解 (1)$A=\{x|(x-a)(x-1)\leqslant0\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant3\}$，$A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subseteq B$，要使 $A\subseteq B$，只需 $1\leqslant a\leqslant3$.

(2)由 $C=\{x|x>3$ 或 $x<1\}=\{x|x^2-4x+3>0\}=\{x|x^2+bx+c>0\}$ 可得 $b=-4$，$c=3$.

例 3 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，$A=S_1x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$，(1)求证：$A\subseteq B$；(2)若 $f(x)$ 是 R 上的增函数，判断 $A=B$ 是否成立，并加以证明.

提示 (1)用子集定义；(2)由(1)知 $A\subseteq B$，用反证法可证 $B\subseteq A$，$\therefore A=B$.