小波数值方法及应用

●梅树立 马钦 陆启韶 朱德海 著

科学出版社

小波数值方法及应用

梅树立　马　钦
陆启韶　朱德海　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统地描述了求解偏微分方程的一种高效数值计算方法——小波数值解法，分别介绍了求解偏微分方程的单尺度小波方法和自适应小波配置法及其在工程上的应用. 本书总结了作者近年来应用小波数值方法求解土壤坡面侵蚀模型、Black-Scholes 模型、图像处理模型等方面的科研成果，突出了数值求解方法自适应性的鲜明特色. 本书内容上力求做到深入浅出、通俗易懂，不仅具有一定的广度和深度，而且也反映了工程中偏微分方程模型求解的新问题，介绍了学科前沿的新应用成果.

本书第 1 章系统地描述了“偏微分方程数值求解方法”的理论体系及工程中应用的偏微分方程模型；第 2~4 章分别介绍了三种区间插值小波的构造方法、基于精细积分技术的同伦摄动法、求解偏微分方程的小波精细积分法；第 5~6 章给出其在诸多非线性问题上的应用，涉及细沟侵蚀过程模型、图像降噪模型、图像分割模型等问题.

本书可供研究领域涉及非线性问题的科学家、工程师以及应用数学、图像处理领域的教师和研究生参考.

图书在版编目（CIP）数据

小波数值方法及应用/梅树立等著. —北京：科学出版社，2012
ISBN 978-7-03-035021-3

Ⅰ. ①小… Ⅱ. ①梅… Ⅲ. ①小波理论-数值计算-研究 Ⅳ. ①O174.22 ②O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 133364 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 6 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2012 年 6 月第一次印刷 印张：11 1/2
字数：230 000
定价：39.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

偏微分方程数值解是计算数学最活跃的分支之一, 小波逼近作为一种求解偏微分方程的潜在高效数值计算技术, 由于小波同时在空域和频域具有局部化特性, 所以当求解在空间域和时间域具有剧烈变化甚至奇异性的问题时, 小波方法是理想的选择. 用于偏微分方程求解的小波方法分为不具有自适应性的单尺度小波和自适应小波配置方法.

本书分别介绍了求解偏微分方程的单尺度小波方法和自适应小波配置法及其在工程上的应用, 包括应用小波数值方法求解土壤坡面侵蚀模型、图像处理模型、Black-Scholes 模型等方面的科研成果, 突出了小波数值求解方法自适应性的鲜明特色.

本书共六章内容. 第 1 章系统地描述了 "偏微分方程数值求解方法" 的理论体系及工程中应用的偏微分方程模型. 第 2 章介绍了基于广义变分原理的拟 Shannon 区间小波构造方法、基于牛顿插值的动态区间小波构造、基于差分的区间插值小波构造等区间插值小波的构造方法. 第 3 章介绍了基于精细积分技术的同伦摄动法, 并与经典的精细积分方法进行计算结果对比分析. 第 4 章介绍了求解偏微分方程的自适应小波精细积分法, 并应用于非线性 Black-Scholes 期权定价模型的求解. 第 5 章介绍了细沟侵蚀过程仿真模型、细沟侵蚀过程仿真模型的小波随机摄动法. 第 6 章重点介绍了二维多尺度小波插值算子的构造方法, 并分别介绍自适应小波数值求解方法在生物图像、遥感影像降噪分割等方面应用.

本书衷心感谢国家自然科学基金项目 "基于小波分析的生物互作组织显微图像处理变分方法研究 (60772038)"、"基于高分辨率遥感数据的农作物纹理特征表达及其类型识别研究 (41171337)"、863 计划项目 "蝗虫与生物农药互作组织的三维重建与可视化 (2006AA10Z238)"、中央高校基本科研业务费项目 "基于小波变分方法的杂草图像精确识别 (2010JS099)" 等项目的资助支持.

作　者
2012 年 5 月

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　偏微分方程的小波数值解法发展概况

偏微分方程数值解是计算数学最活跃的分支之一, 应用最广泛的数值方法是有限元方法 (finite element method, FEM)、有限差分法等 [1,2]. 在处理非奇异偏微分方程 (尤其是椭圆型和抛物型方程) 方面, 有限元方法可以说是尽善尽美了. 但是对奇异情形却有许多不尽人意之处. 例如, 在处理奇异情形的最常用方法 —— 局部加密网格法, 一般要预先知道解的奇异程度.

小波逼近作为一种求解偏微分方程的潜在的高效数值计算技术, 已引起人们的广泛关注 [3~49]. 由于小波同时在空域和频域具有局部化特性, 所以当求解在空间域和时间域具有剧烈变化甚至奇异性的问题时, 采用小波方法似乎是理想选择. 从已有的文献来看, 用于偏微分方程求解的小波方法可以分为两大类, 一类不具有自适应性质, 可称之为单尺度或单层小波方法; 另一类是自适应小波配置法.

1.1.1　偏微分方程的单层小波数值方法

采用小波逼近法求解偏微分方程时, 较简单的方法是直接将小波函数或小波函数对应的尺度函数作为试函数应用于传统的有限元方法中 [50~54]. 由于小波函数具有紧支撑性, 所以得到的有限元刚度矩阵是带状矩阵; 如果采用的小波函数是正交小波 (如 Daubechies 小波), 则偏微分方程的小波有限元离散格式中的刚度矩阵是稀疏矩阵, 从而使计算速度大大提高. 对这种方法来说, 小波的选择非常重要. 在 20 世纪 90 年代初期, 大多数求解偏微分方程的小波逼近算法都是基于 Daubechies 小波的, Daubechies 小波最大的优点是同时具有正交性和紧支撑性; 其缺点是没有解析表达式, 其导函数同样没有解析表达式, 并且求解过程非常复杂 [53~57], 这就使小波方法很难应用于高阶微分方程的求解中. 因此, 只有找到一种具有解析表达式同时又具有紧支撑特性的正交小波, 这种方法才有意义.

由 Wei 提出的拟 Shannon 小波 [58] 虽然不是一种纯粹意义上的小波, 但它符合插值小波的定义, 同时具备紧支撑性和正交性. 文献 [59] 用这种拟小波求解了方程的解具有很大梯度的一般 Burgers 方程和修正 Burgers 方程, 计算结果显示该小波对数值求解有局部急剧变化解的非线性偏微分方程问题有巨大潜力.

1.1.2 偏微分方程的自适应小波方法

自适应小波方法能充分发挥小波变换对信号突变识别的特性, 在用自适应小波有限元求解偏微分方程时, 可大大缩减有限元格式中刚度矩阵的规模, 从而提高计算效率. 因此, 这种方法是目前研究的热点.

在用小波数值方法求解偏微分方程时, 无法直接使用信号处理中的小波快速变换方法. 因此, 设计自适应小波数值方法的关键是构造一离散小波变换 (DWT), DWT 将函数值映射到小波系数空间中去, 以便通过最终的小波展开式插值得到函数值. 此外, 如何在不同大小的网格交界处找到一个稳定、精确的插值算子也是构造自适应算法的难点之一. 有关这方面的论文有很多, 其中比较有特色的是 Cai[60] 和 Vasilyev[61] 的工作.

Cai 构造的小波变换是基于以下空间 $H_0^2(I)$ 中的三次样条区间小波基 [14]:

$$\phi(x) = N_4(x) = \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{4}\begin{pmatrix} 4 \\ j \end{pmatrix}(-1)^j(x-j)_+^3, \tag{1.1.1}$$

$$\phi_{\mathrm{b}}(x) = \frac{3}{2}x_+^2 - \frac{11}{12}x_+^3 + \frac{3}{2}(x-1)_+^3 - \frac{3}{4}(x-2)_+^3, \tag{1.1.2}$$

其中 $\phi(x)$ 为尺度函数, $\phi_{\mathrm{b}}(x)$ 为边界尺度函数. 由于该尺度函数对应的小波具有以下点消失矩性质:

$$\begin{aligned} &\psi_{j,k}(x_k^{(j)}) = 1, \\ &\psi_{j,k}(x_l^{(i)}) = 0, \quad -1 \leqslant l \leqslant n_i - 2, i \geqslant 0; 1 \leqslant l \leqslant L-1, i = -1, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

所以该 DWT 的计算时间复杂度仅为 $O(N\log N)$, 其中 N 为未知变量的总数. 偏微分方程中的非线性项在物理空间很容易被处理, 而这些非线性项的导数在小波空间非常容易得到. 因此, 基于此变换构造的样条小波配置法可以处理非线性问题和各种边界条件.

Vasilyev[61] 几乎和 Cai 同时研究了另外一种求解偏微分方程的自适应小波配置方法, 提出了处理一般边界条件的两种不同方法, 这两种方法都是基于目前研究的小波插值技术. 第一种方法将小波用作基, 从而产生了一个差分–代数方程组, 其中部分代数方程是由边界条件得出的; 第二种方法则利用能够精确满足边界条件的扩展小波, 由该方法导出了一组二阶差分方程, 利用具有小黏滞系数的一维 Burgers 方程对该方法进行了验证, 并和由其他数值代数方法得到的数值结果进行了对比, 结果表明该方法可和最好的数值代数方法相媲美. 其小波变换是按以下方式定义的:

$$c_k^j = \sum_{m\in Z_\Omega^s} C_{k,m}^{j,s} u_m^s, \quad 0 \leqslant j \leqslant s \leqslant J, k \in Z_\Omega^j, \tag{1.1.4}$$

其中

$$C_{k,m}^{j,s}=\sum_{p\in Z_{\Omega}^{j}}(A^{i,j})_{k,p}^{-1}\Delta_{p,m}^{j,s},\quad 0\leqslant j\leqslant s\leqslant J,k\in Z_{\Omega}^{j},m\in Z_{\Omega}^{s},\tag{1.1.5}$$

$$\sum_{m\in Z_{\Omega}^{s}}\Delta_{i,m}^{j,s}u_{m}^{s}=\sum_{k\in Z_{\Omega}^{j}}A_{i,k}^{j,j}c_{k}^{j},\quad 0\leqslant j\leqslant s\leqslant J,\quad i\in Z_{\Omega}^{j},\tag{1.1.6}$$

$$A_{i,k}^{l,j}=\psi_{k}^{j}(x_{i}^{l}),\quad 0\leqslant l,j\leqslant J,i\in Z_{\Omega}^{l},k\in Z_{\Omega}^{j},\tag{1.1.7}$$

$A_{i,k}^{j,j}$ 为由 (1.1.7) 和算子 $\Delta_{i,m}^{j,s}$ 定义的 $(2^{L-j}+N_l+N_r+1)\otimes(2^{L+j}+N_l+N_r+1)$ 维矩阵, 算子 $\Delta_{i,m}^{j,s}$ 定义为

$$\Delta_{i,m}^{j,s}=\begin{cases}R_{i,m}^{j,s}-\sum\limits_{p\in Z_{\Omega}^{j-1}}P_{i,p}^{j,j-1}R_{p,m}^{j-1,s}, & 1\leqslant j\leqslant s\leqslant J,i\in Z_{\Omega}^{j},m\in Z_{\Omega}^{s},\\ R_{i,m}^{0,s}, & j=0,0\leqslant s\leqslant J,i\in Z_{\Omega}^{0},m\in Z_{\Omega}^{s}.\end{cases}\tag{1.1.8}$$

式 (1.1.8) 中的限制算子 $R_{i,m}^{l,j}$ 定义为

$$R_{i,m}^{l,j}=\begin{cases}1, & x_{i}^{l}=x_{m}^{j},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{1.1.9}$$

Vasilyev 的工作是针对所有小波函数的, 其通用性好. 但从以上变换过程不难看出, 这种方法的计算工作量是很大的, 如何简化计算是该方法需要考虑的问题.

1.1.3 小波数值方法中边界条件的处理

在 20 世纪 90 年代初期, 大多数求解偏微分方程的小波逼近算法都是基于 Daubechies 正交小波在整个实数域上对平方可积空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的小波分解的. 在求解有限区间上的初边值问题时, 其实采用的是零延拓的方法, 这必然会带来可怕的"边缘效应"[36], 如端点的不连续性、导数不连续性等, 使得在端点处, 即使用了很精细的尺度, 也会有较大的小波系数. 因此, 这种方法在解有限区间上的初边值问题时带来了不必要的大量计算, 降低了计算效率.

周期小波法是将定义在整个实轴上的紧支撑 Daubechies 型小波或样条型小波以闭区间长度为周期将它们周期化而得到一组周期小波. 例如, Liandrat 等 [37]、Lazaar 等 [38]、Joly 等 [39]、Qian 等 [40] 构造的小波算法都属于这种情况. 这种方法仅能处理周期边界条件问题, 对于更一般的任意边界条件则无能为力.

区间小波法. 1992 年, Chui 等 [41] 提出了样条型区间小波的概念及其构造方法. 同年, Meyer 提出了 Meyer 型区间小波. 1994 年, Anderson 等 [42] 引入了 "Wavelet Probing" 的概念, 从而构造出区间小波. 同年, Daubechies[36] 提出了 Daubechies 型

区间小波的构造方法. 这些小波在构造时必须满足一定的边界条件 (边界条件往往由相应的偏微分方程实际问题给出), 其大致构造思路如下: 从定义在整个实轴上的 Daubechies 型紧支集 (或样条型紧支集) 小波函数 $\psi(x)$ 及相应的尺度函数 $\phi(x)$ 出发, 先保留那些支集本身就在闭区间内部的 ψ_{jk} 和 ϕ_{jk}, 然后补充闭区间两端点处的尺度函数与小波函数 (这些函数应仍具有伸缩结构, 但不再具有平移结构), 使得对于每个 $j \geqslant 0$, 保留与补充的尺度函数共同生成的空间 V_j 应具有递增性, 因而仍能构成一个多分辨分析 (MRA). 同时使得保留与补充的尺度函数能生成一定阶的多项式, 从而使得相应的小波函数具有同样阶的消失矩, 于是这样定义在闭区间上的小波仍能刻画函数的正则性 (或奇异性).

这种区间小波尽管能精确地满足边界条件, 但是它的一个致命的缺点是真正从数值上实现起来非常困难, 并且补充的边界小波依赖于边界条件, 即不同的问题就要重新构造一遍; 另一个缺点是边界小波函数的个数随着内小波消失矩阶数而变化. 例如, 若选取消失矩阶数为 N 的 Daubechies 型内小波, 则左、右边界小波的个数分别为 N 和 $2N-2$, 所以构造起来非常麻烦. 因此, 在构造实际的解偏微分方程的小波逼近格式时, 上述区间小波构造方法很少被采纳.

1.2 精细积分法的发展及应用 [62~87]

1.2.1 指数矩阵精细算法 [62~65]

精细积分法 (precise integration method, PIM) 是为了解决结构动力学计算问题而提出的. 当前熟知的结构动力学时程积分算法包括 Newmark 法、Wilson-θ 法、中心差分法等, 都是差分类的算法. 精细时程积分法是一种逐步时程积分的精细算法, 其核心是对于指数函数 $\exp(H \cdot \Delta t)$ 的计算, 其中 H 为给定矩阵. 矩阵指数函数应用广泛, 其计算被认为是计算数学中的一个较难的课题. 精细积分算法放弃了通常的差分格式, 通过 2^N 运算的思想达到对指数矩阵的求解, 算法简单且计算精度很高, 对于线性定常系统的解答达到了计算机字长范围内几乎是精确的数值解. 近年来, 该算法在计算动力学问题、最优控制问题以及偏微分方程中得到广泛应用.

尽管指数矩阵的精细积分方法简单实用, 但效率和计算精度很高, 文献 [64], [65] 还是先后对其作了进一步的完善和发展. 文献 [64] 从 Shannon 采样定理出发, 对该方法的参数选择进行了优化, 给出了 N 的简单选择公式, 并指出实际误差随时间线性增长. 文献 [65] 则通过改进 PSSA(pade-scaling and squaring-approxmiation) 方法, 使之和 PIM 方法统一起来, 在此基础上改进了 PIM 方法, 从而使用者在应用该方法进行实际问题分析时, 可不必考虑时间步长的大小, 同时还给定了其他参数的选取数表.

1.2.2 精细积分法在非线性动力方程求解中的应用 [68~72]

精细积分法在非线性问题中的应用已有了很大的发展. 在非线性动力学问题的计算研究中, 一直是解析法占主导地位, 而直接的数值积分技术发展相对滞后. 已有的一些数值计算方法 (如摄动法、多尺度法等) 的计算精度一直不能令人满意, 影响其计算精度的主要原因除了非线性方程的线性化精度外, 还有线性化方程本身的计算精度问题. 文献 [86] 率先提出了一种非线性系统精细积分的方法, 但未涉及时变参数系统的计算, 其实质是将非线性项作非齐次项处理, 即假定非齐次项在时间步 (t_k, t_{k+1}) 内是线性的, 然后就可直接使用文献 [79] 给出的非齐次结构动力方程的精细时程积分法求解. 文献 [69], [70] 则在此基础上向前推进了一步, 考虑了 H 中含有时变参数的情况, 叙述如下:

针对以下结构动力方程:

$$M\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = r(t), \quad x(0) = \alpha, \dot{x}(0) = \beta, \tag{1.2.1}$$

其中 x 为 n 维向量, M 为质量矩阵 (正定、对称), G 为阻尼矩阵 (半正定、对称) 和陀螺矩阵 (反对称) 之和, K 为刚度矩阵 (半正定、对称), $r(t)$ 为随时间变化的载荷向量, α 和 β 为已知的初始条件. 在哈密顿体系下, 根据哈密顿正则方程, 可以将方程 (1.2.1) 化成如下一阶常微分方程组:

$$\dot{\nu} = H\nu + f, \quad \nu(0) = \nu_0, \tag{1.2.2}$$

其中矩阵 H 为时间 t 和变量 ν 的函数. 为了能使用精细积分法, 对矩阵 H 作如下分解:

$$H(t,\nu) = H_0 + H_1(t,\nu), \tag{1.2.3}$$

其中 H_0 为常矩阵. 将式 (1.2.3) 代入方程 (1.2.2) 有

$$\dot{\nu} = [H_0 + H_1(t,\nu)] \cdot \nu + f \equiv H_0 \cdot \nu + f^*(t,\nu). \tag{1.2.4}$$

以上过程的实质就是将方程的非线性部分转化到载荷向量中. 显然, 式 (1.2.4) 可以直接使用文献 [62] 中的公式 (20)~(24) 求解.

文献 [72] 给出的方法没有转移非线性部分, 而是在 $[t_{k-1}, t_k]$ 区间内认为 $H(t,\nu) = H(t_{k-1}, \nu_{k-1})$. 该近似引起的误差通过迭代法来校正, 增大了计算工作量.

1.2.3 精细积分法在偏微分方程求解中的应用 [78~87]

偏微分方程数值求解通常用有限差分法、有限元法和边界元法等. 对于抛物型或双曲型方程的时间坐标, 大多采用差分类方法求解. 差分法的优点是在一个时间步长内, 对于一个给定点来说, 其相关的空间点只是与该点相邻的几点, 而不是全

部的空间点. 也就是说, 其对应的矩阵具有窄带宽. 有限元方法有同样的优点. 精细积分法则走向了另一个极端. 求解偏微分方程不必对全部坐标都离散化, 对于有时间坐标的定域问题, 可以先对空间域用有限元或差分法离散, 建立起对时间的常微分方程组, 然后对常微分方程组采用精细积分法求解, 这是一种半解析法. 当空间离散后未知数非常多时, 其计算工作量及存储占用大量增加, 这成为半解析法使用的障碍. 差分法具有带宽小的优点, 但存在稳定性和计算精度方面的问题. 为此, 钟万勰提出了子域精细积分法 [79,80], 对不太大的时间步长 Δt 精度损失不大. 因此, 子域精细积分法既可以利用精细积分的数值优点, 又有带宽小的好处, 从而使精细积分法的应用成为可能.

文献 [83] 针对热传导方程分析了子域精细积分的稳定性, 证明了单点、二点、三点子域精细积分的蛙跳格式都是无条件稳定的, 而对应的差分蛙跳格式则是不稳定的. 文献 [86] 给出了不同差分格式在单内点精细积分一般公式中的同一表达, 并进行了数值计算, 从计算结果中发现单内点精细积分法不如相应的最好的差分格式的计算精度高. 因此, 文献 [82] 研究了六点精细积分法及多层精细积分法的截断误差及稳定性, 提出了单内点精细积分的改进格式, 精度较原格式有较大提高.

另外一种适合偏微分方程求解的精细积分方法是子结构精细积分方法 [87]. 根据子结构的概念, 将结构分成若干个子结构, 子结构间通过界面的物理量相联系, 然后对各子结构分别进行指数矩阵的计算, 从而也可以大幅度降低指数矩阵的运算量和存储量. 该方法主要应用于子域选取比较困难的有限元方法.

以上算法均以热传导方程为例, 没有涉及非线性偏微分方程的求解.

1.2.4　精细积分法在结构随机振动响应分析中的应用 [73~77]

林家浩和张亚辉首先将精细积分方法和自己提出的虚拟激励算法相结合, 对受演变随机激励结构的非平稳随机响应进行了分析 [76]. 该方法首先采用虚拟激励法将这类结构问题转化为受确定性载荷结构的动力分析初值问题, 然后采用精细积分法进行求解. 为了进一步提高计算效率, 林家浩还针对一些常用的演变随机激励调制函数, 推导了相应的精细时程积分格式, 并对这些格式进行混合应用, 从而对于快速交变的虚拟激励仍可以取很大的时间步长而得到计算机精度的结构响应时变功率谱数值解. 方法简单, 计算效率比传统的方法有数量级的提高.

张森文和曹开彬针对线性系统的随机振动提出了精细积分时域平均法 [74]. 所谓精细积分时域平均法, 其基本思想就是利用响应的时域平均来计算响应的统计特征, 而时域平均又是通过高精度的精细积分所求得, 故称为精细积分时域平均法. 与传统的其他离散积分方法, 如随机中心差分方法、随机纽马克差分方法等比较, 本方法具有非常高的精度和计算效率, 特别是能给出速度响应方差计算的良好结果. 此外, 他们还将李杰提出的随机扩阶系统方法和精细积分法相结合, 讨论了随

机参数结构的动力响应计算问题 [73].

1.3 非线性随机有限元法的发展概况

1.3.1 随机有限元法 [92,95,96]

随机有限元法又称为概率有限元法, 它可看成确定性有限元法与概率方法 (如 Monte Carlo) 相结合的一种方法. 目前, 随机有限元法对于随机结构的静力分析以及稳定性分析已经取得长足进步, 但对于随机结构动力分析的研究还不成熟. 在动态响应分析中, 对质量、阻尼和刚度矩阵以及外激励的随机扰动效应的考虑, 大体上始于 20 世纪 70 年代初期. 经过 40 年的研究工作, 形成了三类基本的分析方法, 即随机模拟方法、随机有限元法和正交展开法.

随机模拟方法是最常用的统计逼近方法, 最典型的方法是 Monte Carlo 模拟方法. 随机模拟方法的主要特点是适用范围广, 但由于该方法建立在大量确定性有限元计算的基础上, 所以计算工作量大, 难以应用于复杂的工程结构, 因而只作为检验其他近似数值方法的可行性尺度而在随机结构分析中使用.

正交展开法是 Sun 于 1979 年针对具有随机参数的微分方程的求解首先提出的. 我国学者李杰提出的随机结构动力分析的扩阶系统法 [98,99] 对该方法的完善和发展起了很大作用. 基于多项式展开的随机结构动力方法不受参数变异量大小的限制, 这是其优于摄动随机有限元法的特点之一, 但是扩阶系统方程式的阶数远高于原系统方程式. 当所考虑的随机因素较多或随机变异量较大时, 正交多项式的项数会显著增加, 计算工作量会迅速增大到不能承受的程度. 文献 [100] 提出的递归聚缩算法可部分解决该问题.

随机有限元法是目前最成熟、应用最广泛的方法. 从随机有限元控制方程的获得来看, 可以将随机有限元法分为摄动随机有限元法和 Taylor 展开随机有限元法. 这两种方法的使用需遵循以下假定: ① 系统是线性的; ② 系统的参数是随机变量, 但不是时间的参数, 它们之间可以是相关的或不相关的; ③ 激励函数与系统的参数无关.

1. 摄动随机有限元法

最初的摄动技术被用于非线性分析, Handa 和 Anderson 以及 Hisada 和 Nakagiri 成功地将一阶、二阶摄动技术用于随机介质, 给出了用于静力分析的摄动随机有限元法.

假定基本随机变量在均值点处产生微小摄动, 利用 Taylor 级数把随机变量表示为确定性部分和由摄动引起的随机部分, 从而将有限元位移和支配方程 (非线性的) 转化为一组线性的递推方程, 对其求解, 得出位移的统计特性, 进而求出应力的

统计特性.

设基本随机变量为 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$, 静载下有限元控制方程可写为

$$KU=F.$$

假设 a_i 为随机变量 X_i 在均值点 $\bar{X}_i$ 的微小摄动量, 显然,

$$a_i=X_i-\bar{X}_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

因此,

$$\begin{aligned}
K&\approx\bar{K}+\sum_{i=1}^{n}a_iK_i'+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_jK_{ij}'',\\
U&\approx\bar{U}+\sum_{i=1}^{n}a_iU_i'+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_jU_{ij}'',\\
F&\approx\bar{F}+\sum_{i=1}^{n}a_iF_i'+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_jF_{ij}''.
\end{aligned}$$

根据二阶摄动法, 可以得到

$$\begin{aligned}
&U=\bar{K}^{-1}\bar{F},\\
&U_i'=-\bar{K}^{-1}\left(-F_i'+\bar{U}K_i'\right),\\
&U_{ij}''=-\bar{K}^{-1}\left(\bar{U}K_{ij}''+U_i'K_j'+U_j'K_i'-F_{ij}''\right).
\end{aligned}$$

由此可以得位移 U 的均值和方差, 进而可求出应力的均值和方差.

20 世纪 80 年代中期, Liu 等 [91] 将摄动随机有限元法引入随机结构动力分析中, 计算动力系统的瞬态响应. 在动力学分析中, 可以考虑结构系统的质量、阻尼、刚度以及激励、响应量的不确定性, 并模型化为随机变量. 同分析静力问题一样, 假定这种随机扰动量很小. 这些随机函数通过摄动格式展开为在随机变量均值点处的级数, 由此得到随机结构动力方程的一组递推方程, 进而得到动力响应的摄动解.

2. Taylor 展开随机有限元法

该方法的基本思路是将有限元格式中的控制量在随机变量均值点处进行 Taylor 展开, 然后对随机结构动力方程两侧取均值得出所需要的计算式. 由这种方法得到的递推方程组本质上与随机有限元法一致, 所以同样伴随长期项的困扰.

1.3.2 非线性方程的线性化

由于随机摄动法的适用范围限定为线性系统, 所以对非线性系统进行随机分析时, 首先应对非线性系统进行线性化. 目前, 应用较广泛的线性化方法包括等效线性化方法和摄动法.

1. 等效线性化方法

等效线性化方法是一种使用很简便的方法, 它将非线性微分方程的解用一组等效的线性微分方程的解来近似. 对于等效线性参数的确定, 常规的方法是以方程差

平方数学期望最小为基础来确定参数. 当弱非线性系统及响应近似为高斯响应时, 近似解将接近于精确解, 否则, 误差较大. 等效线性化方法的优点是不受非线性强弱的限制, 因而是求解非线性系统随机振动时常用的方法. 然而, 统计线性化的局限性也非常明显, 朱位秋将其归纳为以下三点:

(1) 一般低估响应的位移和速度方差, 结果偏于不安全.

(2) 对于其他响应统计量, 如自相关函数, 等效线性化的结果可能是不可靠的. 例如, 对杜芬型振子, 位移取值大于三倍标准差的概率可差几百倍, 对于非线性阻尼振子, 此概率可差上千倍.

(3) 等效线性化的最大局限在于它不适宜处理本质非线性系统. 对于这种系统, 该方法可能给出错误结果.

2. 摄动法 [102~110]

摄动法是一种求系统近似的解析解的方法, 在非线性摄动理论中又称为小扰动法, 其主要思想是将非线性的、高阶的或变系数的数学物理问题的解用含某个小量的渐近近似式来表示. 由于这些近似式中的系数可以由线性的或常系数的数学物理问题来确定, 所以一般比原问题简单, 因此, 这种方法成为研究比较复杂的数学物理问题的有力工具.

摄动法在实际应用中主要存在两个方面的问题. 一是它只能处理弱非线性问题, 而实际物理模型往往是强非线性的, 这限制了该方法的应用范围; 二是在用摄动法研究非线性振动时将会遇到久期项问题. 为了解决这些问题, 许多改进方法, 如人工参数摄动法、同伦摄动法等先后被提出.

最近, 何吉欢等提出了一种求解非线性方程同伦摄动方法 [102~110]. 在该理论中, 不像传统的摄动方法假定其近似解可表示成小参数的级数形式, 而是先把方程线性化, 再求其线性化方程的解, 然后再校正线化方程的解, 这样得到的近似解不受方程中 “参数” 的影响. 算例表明, 该方法具有很高的精度, 而且不存在 “久期项” 问题. 将这种方法应用于细沟侵蚀模型的求解中, 得到的结果和采用龙格-库塔法得到的结果吻合得非常好.

1.4 工程中的偏微分方程模型

1.4.1 土壤坡面侵蚀模型研究概述

土壤侵蚀是指在陆地表面, 水力、风、冻融和重力等外营力的作用下, 土壤、土壤母质及其他地面组成物质被破坏、剥蚀、转运和沉积的全过程. 根据侵蚀外营力通常将侵蚀分为水蚀、风蚀和重力侵蚀等. 水蚀是近年来国内外的研究热点, 水蚀又可分为雨滴溅蚀、面蚀、细沟侵蚀、浅沟侵蚀、切沟侵蚀等.