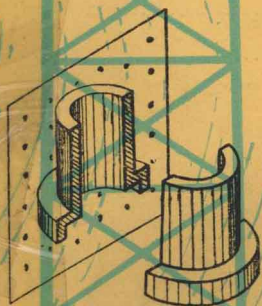


上海市中学课本

数学

第四册



上海人民出版社

目 录

第一章 划圆弧线	1
第一节 圆和它的对称性	1
第二节 直线和圆弧的连接	13
第三节 圆弧和圆弧的连接	33
第四节 弧长和弧度制	48
第五节 等分圆周和正多边形	57
第二章 立体图形	68
第一节 直线与平面的位置关系和投影	68
第二节 平面与平面的位置关系	99
第三节 球	125
第三章 识图	132
第一节 剖视图	132
第二节 剖面	153
第三节 简单的零件图	160

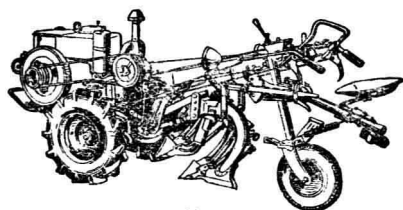
第一章 划圆弧线

在生产实践和日常生活中，我们常常可以看到圆形的物体。在小学里我们已经学了一些圆的知识，在这一章里，我们要进一步学习圆的其他性质，并解决一些生产实际问题。

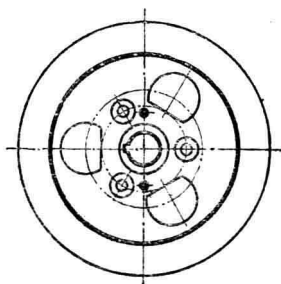
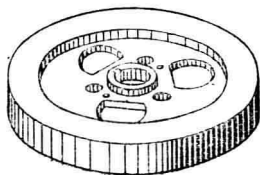
第一节 圆和它的对称性

在小学里，我们从画圆的过程中已经知道：同圆的半径相等。工人同志在加工圆形工件时，常常应用这个性质，在工件上确定圆心的位置。

【例 1】图 1.1 所示是手扶拖拉机和它的



(1)



(2)

图 1.1

飞轮。为了在飞轮的毛坯上划线，要先找出毛坯的圆心。

因为毛坯中部是空的，所以要在毛坯的中空处塞上一块钉有金属薄片的木块后，才能定出圆心。方法如下(图 1.2)：

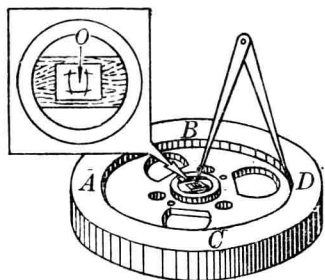


图 1.2

(1) 在工件内壁上，取间隔大致相等的四点 A 、 B 、 C 、 D ；分别以这四点为圆心，近似于这个圆的半径的线段为半径划弧；

(2) 在四条弧所围成的图形中心定一点 O ，使 O 到轮子内壁的距离大致相等，那末 O 就是要找的圆心。在精确度的要求不很高时，一般可采用这种方法在圆形毛坯上找圆心。

在小学里，我们又知道：圆是一个轴对称图形，它的任何一条直径都是它的对称轴。根据这个性质，在 $\odot O$ 中，如果以直径为轴，把圆对折，那末两个半圆一定重合。

在图 1.3 和 1.4 中， AB 是 $\odot O$ 的弦。如果在对折 $\odot O$ 时，使 A 、 B 重合，那么折痕 MN 也就是 $\odot O$ 的一条平分 A 、 B 的直径。由于 $\angle AHM$ 和 $\angle BHM$ 重合，所以这两个角相等，并都是平角 $\angle AHB$ 的一半。

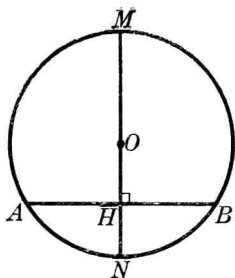


图 1.3

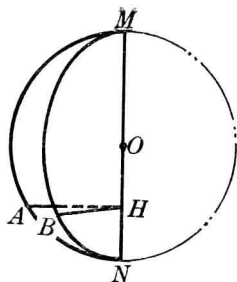


图 1.4

即

$$\angle AHM = \angle BHM = 90^\circ$$

这就告诉我们：

弦的垂直平分线通过圆心；

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧。

【例 2】 庆丰生产大队在测绘大队平面图时，要把一个圆形粪池标在图上。贫下中农先在粪池边上任意选 A 、 B 、 C 三点，并立上标杆，然后用小平板仪在图纸上画出这三点的对应点 A' 、 B' 、 C' (图 1.5)，最后通过 A' 、 B' 、 C' 画圆，从而标出了粪池的位置。那末，怎样才能画在图纸上画出这个圆呢？

这样想：要通过 A' 、 B' 、 C' 三点画圆，关键在于确定圆心的位置。如果这个圆已经画出，那末 $A'B'$ 、

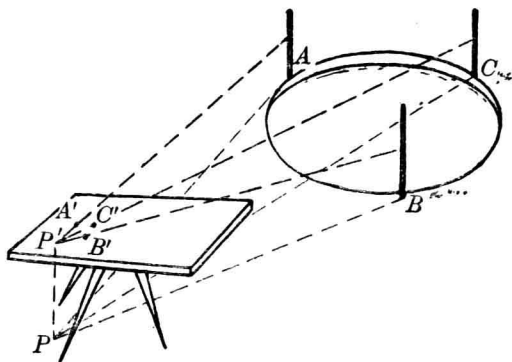


图 1.5

$B'C'$ 、 $C'A'$ 就是这个圆的三条弦。因为弦的垂直平分线都通过圆心，所以圆心应该是 $A'B'$ 和 $B'C'$ 这两条弦的垂直平分线的交点。

画法如下(图 1.6)：

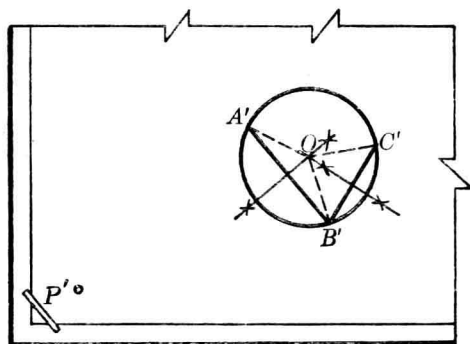


图 1.6

(1) 连接 $A'B'$ 、 $B'C'$ ，分别画出它们的垂直平分线，这两条垂直平分线交于 O ；

(2) 以 O 为圆心, OA' 为半径画圆, 这个圆就是圆形粪池在图上的位置。

这个例子说明:

过不在一条直线上的三点可以画一个圆。

我们知道, 三角形的三个顶点总不在一条直线上, 所以, 通过三角形的三个顶点, 一定可以画一个圆。我们把这个圆叫做三角形的外接圆, 这个三角形叫做圆的内接三角形, 外接圆的圆心叫做三角形的外心。如图 1.7 中, $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\triangle ABC$ 为 $\odot O$ 的内接三角形, O 为 $\triangle ABC$ 的外心。

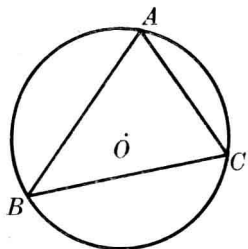


图 1.7

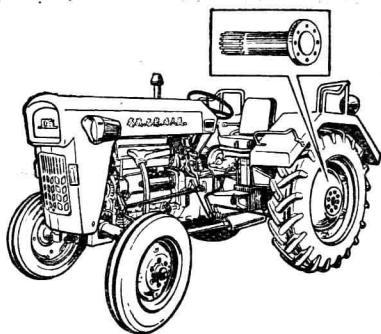
想一想: (1) 过两个点能不能画圆, 能画几个圆, 这些圆的圆心组成怎样的图形?

(2) 过在一直线上的三个点, 能不能画一个圆?

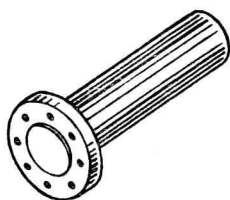
例 2 还说明, 通过画两条相交直径, 就可以找出一个圆的圆心。

【例 3】图 1.8 (2) 所示是拖拉机的后轮半轴。在车好半轴外圆后, 为了进一步加工, 要在半轴的一个端面上划线, 第一步也是找圆心, 划法如下:

(1) 将半轴搁在 V 型铁上, 用游标卡尺量出轴的



(1) “上海-45 型”拖拉机

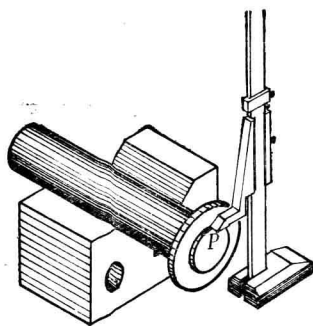


(2) 后轮半轴

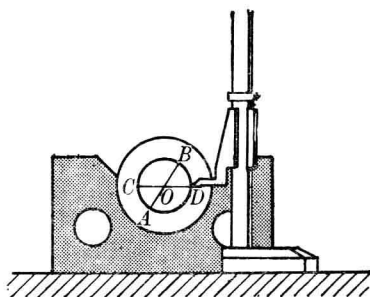
图 1.8

直径尺寸;

(2) 把高度游标卡尺的划针，调整到轴的最高点 P [图 1.9(1)];



(1)



(2)

图 1.9

(3) 把高度游标卡尺的高度降低前面已量出的直径的一半，在轴上划一条直线 AB ，然后把轴转动一

下,划出另一条直线 CD , 那末 AB 与 CD 的交点 O 就是圆心[图 1.9 (2)].

在圆形光坯零件上找圆心时,一般可以用上述方法.

在第三册中我们已经学过“直角三角形斜边上的中线,等于斜边的一半”,这就是说,如果 O 是直角三角形 ABC 斜边 AB 的中点,那末

$$OA = OB = OC.$$

所以直角三角形的斜边是直角三角形外接圆的直径(图 1.10).

木工师傅常常利用这个性质来找圆心.具体方法如下(图 1.11):

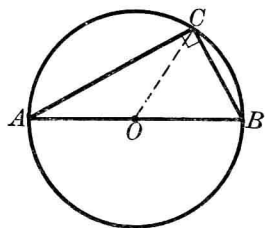


图 1.10

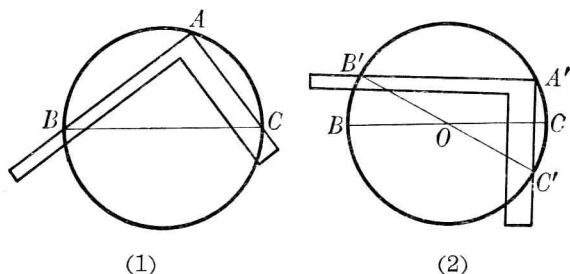


图 1.11

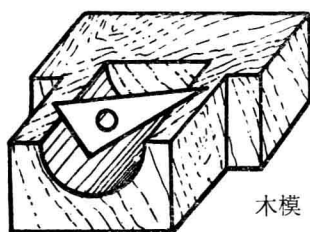
把角尺的直角顶 A 放在圆周上,它的两边分别和圆相交于 B 、 C 两点,连接 BC 。然后,把角尺调换一

个位置,用同样的方法画出 $B'C'$ 。那末 BC 和 $B'C'$ 的交点 O 就是圆心。

图 1.10 中, $\angle ACB$ 的顶点 C 在圆周上,它的两边 CA 、 CB 和圆周都相交,我们把这样的角叫做圆周角。

图 1.10 还告诉我们:

半圆上的圆周角是直角。



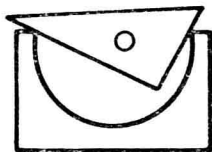
木模

图 1.12

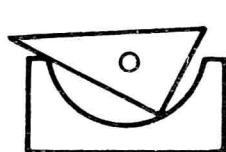
想一想: 工人同志检验半圆形的木模时(图 1.12),把三角板的两条直角边卡在木模上,然后来回滑动,如果三角板的直角顶点始终在圆弧上,那末就可以断定这个模子是半圆形的,这是什么道理? 不然,就不是半圆形的,为什么? (图 1.13)



(1) 半圆



(2) 大于半圆



(3) 小于半圆

图 1.13

【例4】 中华轴承厂的革命职工在毛主席关于“独立自主、自力更生”的方针指引下,制成一批加工轴

承用的高精度机床，提高了轴承的质量和产量。在加工轴承的过程中，需要知道如图 1.14 中油石的宽度 AB 。如 $R=0.28\text{ mm}$ ， $h=0.1\text{ mm}$ ，求 AB 。

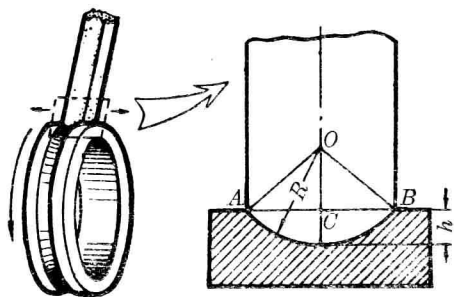


图 1.14

解 设 $AB=l$ ，画 $OC\perp AB$ ，垂足是 C ，那末 $AC=\frac{l}{2}$ 。连接 AO ，在直角三角形 AOC 中，

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2 - (R-h)^2,$$

化简，得

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = (2R-h)h,$$

$$\therefore l^2 = 4(2R-h)h.$$

根据实际要求，取

$$l = 2\sqrt{(2R-h)h},$$

$$\begin{aligned}\therefore AB=l &= 2\sqrt{0.1 \times (2 \times 0.28 - 0.1)} \\ &\approx 0.43(\text{mm}).\end{aligned}$$

从上面 $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = (2R-h)h$ 的式子中，我们看到：

当直径垂直于弦时，直径被垂足所分成的两段长度的乘积，等于弦被垂足分成的两段长度的乘积。

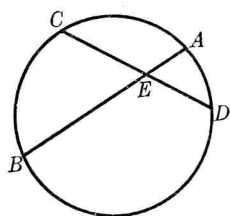


图 1.15

一般地说，如果两弦 AB 、 CD 相交于 E ，那末 $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ (图 1.15)。这个关系式叫做相交弦定理。

【例 5】红旗公社修建的拖拉机用双曲拱桥采用圆弧形拱圈，桥的跨度为 16 米，矢高与跨度之比为 1:8，求拱圈所在圆的半径(图 1.16)。

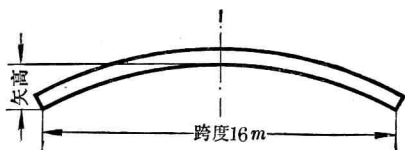


图 1.16 拱圈

解 设拱圈的半径为 R ，矢高为 h ，跨度为 l 。
根据相交弦定理，

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = h(2R - h),$$

$$\frac{l^2}{4h} = 2R - h,$$

$$R = \frac{l^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

$$\because \frac{h}{l} = \frac{1}{8}, \quad l = 16,$$

$$\therefore h = \frac{1}{8} \times 16 = 2,$$

$$\therefore R = \frac{16^2}{16} + \frac{2}{2} = 17 \text{ (m)}.$$

想一想：工人同志在解决已知弦长和矢高求直径的问题时，经常采用口诀：“半弦乘半弦，除高再加高”，这是什么道理？试用上述口诀计算此例。

【例 6】在直径为 110mm 的轴上，铣出宽 AB 为 60mm 的平面（图 1.17），问应铣去的厚度 h 是多少？（精确到 0.1mm）

解：设轴的半径为 R ，铣出宽度为 l 。根据相交弦定理：

$$\frac{l^2}{4} = (2R - h)h.$$

整理后，得

$$4h^2 - 8Rh + l^2 = 0,$$

解这个方程，得

$$h = \frac{8R \pm \sqrt{64R^2 - 16l^2}}{2 \times 4}.$$

根据题意，取

$$h = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - l^2}}{2}$$

$$\therefore h = \frac{110 - \sqrt{110^2 - 60^2}}{2} \approx 8.9 \text{ (mm)}.$$

即应铣去的厚度约为 8.9mm。

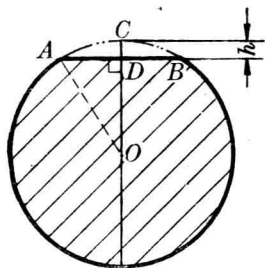


图 1.17

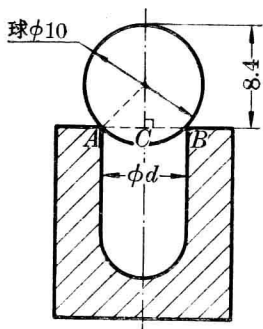
练习一

1. 找几个圆形物体，划出它们的圆心。
2. 如图所示是皮带轮的碎块，为了复制一个同样的、完整的皮带轮，就要先在碎块上找出圆心。问应怎样找出它的圆心。
3. 分别画出锐角三角形，直角三角形和钝角三角形的外接圆。
4. 如图，小孔内径如不能用内卡测量时，常用小钢珠测量。用直径为 10mm 的钢珠放在小孔上，测得钢珠顶和工件端面间的高度为 8.4mm，求孔径 d (精确到 0.1mm)。

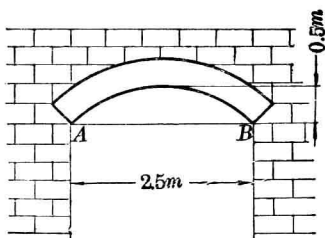


碎皮带轮

(第 2 题)



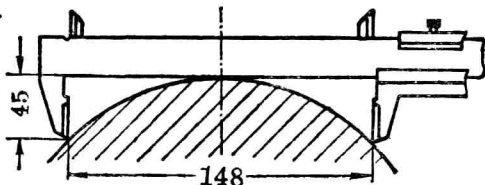
(第 4 题)



(第 5 题)

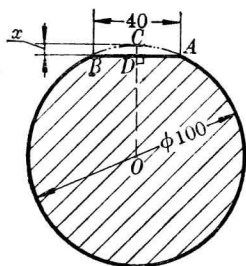
5. 如图所示是一个圆弧形拱门，试计算 $\widehat{AB}$ 的半径 R ，并按 1:50 的比例画出拱门 $\widehat{AB}$ 。

6. 大型圆形工件可用如图所示的方法测量直径, 图中卡尺脚长 45 mm, 测量值是 148 mm, 试计算这个圆形工件的直径.

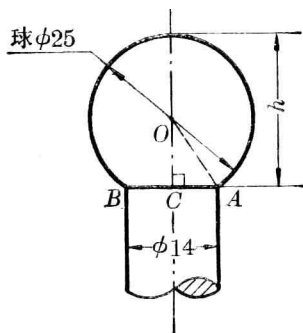


(第 6 题)

7. 如图, 铣工要在直径为 100 mm 的轴上, 铣出宽为 40 mm 的平面, 求铣切深度 x (精确到 0.1 mm).



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 如图, 摇手柄的圆球直径为 25 mm, 轴的直径 $d=14$ mm, 求圆球的高 h (精确到 0.1 mm).

第二节 直线和圆弧的连接

一、直线和圆相切

我们经常看到许多物体, 它们的外形是由几段直

线和圆弧光滑地连接而成的。例如南京长江大桥(图 1.18), 它的桥身和引桥部分可以看成是直线和圆弧光滑连接起来的; 机器上的防护罩(图 1.19), 铁路道岔(图 1.20) 的形状, 也可以看成是直线和圆弧光滑连接而成的。圆弧、直线之间的光滑连接, 有时就简称为连接。

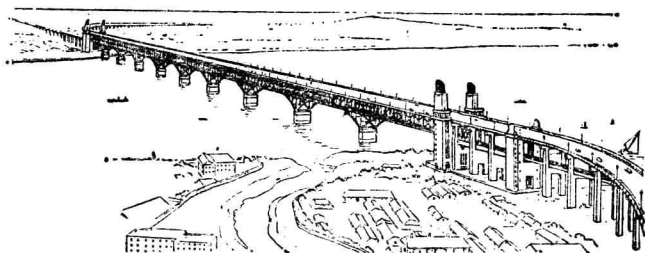


图 1.18 南京长江大桥

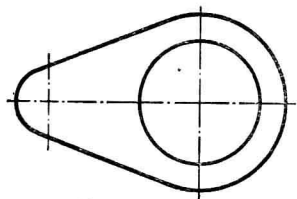


图 1.19 防护罩

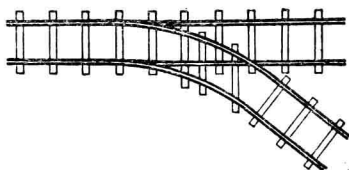


图 1.20 铁路道岔处

那末, 直线和圆弧处于什么位置时, 它们才能光滑地连接呢?

图 1.21 中, l_1 是通过圆心 O , 并与 $\odot O$ 交于 A_1 、 B_1 两点的直线, 显然 $\widehat{A_1MB_1}$ 与 l_1 不是光滑连接的。过点 O 画垂直于 l_1 的直径 MN , 然后把 l_1 向下平移,

这样所形成的弦 A_2B_2 、 A_3B_3 ……总是被 MN 垂直平分的,这时,每条弦的两个端点也沿着圆周逐渐接近,当 l 通过点 N 时,两个端点 A 、 B 和点 N 重合,这时 l 和半径 ON 垂直,并和 $\odot O$ 只有一个公共点。

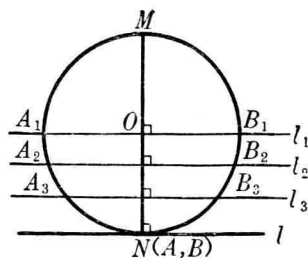


图 1.21

当直线和圆只有一个公共点时,我们称直线和圆相切,并把这条直线叫做圆的切线,把这个公共点叫做切点。从图中可以看出,当直线和圆弧相切时,它们才可能光滑地连接。同时还可以看到:

切线垂直于过切点的半径。

经过半径外端并且垂直于半径的直线是圆的切线。

【例1】 过圆周上一点 A ,画 $\odot O$ 的切线。

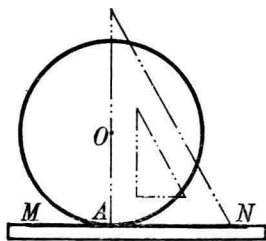


图 1.22

根据“经过半径外端并且垂直于半径的直线是圆的切线”这一性质,连接 AO ,并过点 A 画出 OA 的垂线 MN , MN 就是 $\odot O$ 的切线。图1.22表示了用三角板和直尺画切线的方法。