现代数学基础

32

工程数学的新方法

蒋耀林

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

32

工程数学的新方法

GONGCHENG SHUXUE DE XIN FANGFA

■ 蒋耀林

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书选取现代工程数学中一些新的基础知识为主要内容，用来作为充实工业应用领域中利用数学工具进行科学研究时需要的专业知识，同时，为兼顾全书的统一性，也筛选了少量相关的传统内容。全书共分6章，基本内容包括电路模拟的数值方法、矩阵的伪谱方法、信息检索的矩阵方法、高维数据的张量理论与方法、分数阶微分方程的理论与方法以及微分方程的实时并行计算方法。本书每章内容自成体系，又相互联系。为方便读者理解和阅读，本书在内容叙述和安排上，详略得当，论证详尽，能使读者全面掌握和了解有关内容。

本书可供应用数学、计算数学、电路与电力系统以及计算机等相关专业高年级本科生、研究生和科技工作者阅读。本书也可作为理工科相关专业教师和从事模型分析、算法模拟问题研究与设计的工程技术人员在基础知识方面的数学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学的新方法／蒋耀林编著．—北京：高等教育出版社，2013.2

ISBN 978-7-04-036168-1

Ⅰ.①工…　Ⅱ.①蒋…　Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材　Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第209399号

策划编辑　李　鹏　　责任编辑　李　鹏　　封面设计　赵　阳　　版式设计　余　杨
责任校对　刘丽娴　　责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.5	版　　次	2013年2月第1版
字　　数	360千字	印　　次	2013年2月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　36168-00

前 言

现代科学和技术的发展日新月异，在数学的计算与应用领域，新的数学手段和方法不断涌现。科学理论、科学实验和科学计算是现今人们从事科学研究的三种基本手段。对于数学来说，除了基础数学外，应用数学和计算数学，即所谓的工程数学，与其他学科的融合和交叉正变得越来越明显，这大大促进了数学在工业与应用领域的运用。应用数学侧重于数学模型的建立，计算数学侧重于数学模型的计算，它们在工程数学领域都发挥着重要的作用。

工程系统一般是由微分方程来描述的，方程的维数通常比较高，离散后的代数方程维数更高，相应地就需要新的数学工具来处理这些高维问题。新的数学方法不仅诱导和开创了新的数学研究方向，同时也会对相关学科的发展产生深远的影响。在目前阶段，把新近成熟或相对成熟的理论体系中所用的一些数学知识介绍给国内广大读者，尤其是高等院校应用数学专业和计算数学专业的高年级本科生和研究生或年轻的科研工作者，以丰富他们的知识结构和提高他们对现代数学应用的兴趣，是十分必要和适宜的。

本书的许多内容与已有的同类书籍的内容不同，主要是在现存书本知识体系之外添加了全新内容，丰富了已有知识结构，增强了数学书籍的时代感。作者希望通过这种新的尝试，能及时补充或扩充国内相关数学著作的基本内容，起到抛砖引玉的作用，以引起同仁们对这种尝试的重视，使数学教材和参考书的建设紧跟现代科学和技术的发展步伐，从而推进我国数学研究和教育事业的进步。

自 1995 年起，作者就一直从事电路模拟领域的研究，工作主要集中在波形松弛方法和模型降阶方法这两大方向上。由于现代集成电路技术发展迅猛，其电路模拟领域常常需要大量新的模型分析与计算的方法，因此派生出许许多多的新型数值算法或新的应用数学方法。在多年的研究和教学工作中，我们逐渐发现一些新型算法所依赖的数学方法是很完善的，完全可以独立或单独地抽取出来撰写成书给数学专业的学生讲授或给科研工作者作为参考，这样可能会十分便于他们亲身感受到现代数学的真实应用。对于那些欲从事相关研究或设计的人员，尤其是研究生和年轻

的科研人员，能够大大降低其进入相关领域的门槛，有助于促进他们的学业和工作进步。

书中的基本内容散见于诸多文献中，经过整理和归纳，再结合作者本人的同事和学生的反馈意见，在不断修改、丰富和完善后，最终完成了本书内容的选定。由于工程数学内容庞杂，本书只选了作者比较熟悉的知识作为主要内容给予介绍，无法做到内容包罗万象，不足之处，敬请读者谅解。

为了便于读者阅读，本书尽量使用比较通俗易懂的语句叙述。在结构方面，注重条理性和系统性，使每章内容既有一定的独立性，部分章节之间也有一定的联系。在内容方面，尤其重视相关领域的专业理论和方法的介绍，努力使具备基本数学知识的读者能方便地阅读本书。

全书共分 6 章，除第 1 章是基本内容外，其余各章内容均具有独立的意义。这里，我们先将每章的内容和基本意义简单陈述如下。

第 1 章为电路模拟的数值方法，针对稳态和瞬态情况，讨论现代集成电路系统模拟中常用的基础算法，同时，兼顾讨论大型系统数值求解过程中应遵循的基本原则。这部分内容虽然处理的是目前电路模拟领域典型的数值方法，但其也是科学计算领域关于方程数值计算的重点内容。

第 2 章为矩阵的伪谱方法，针对非正规矩阵或系统，讨论其伪谱或伪特征值问题。伪谱方法是研究非正规或非对称系统的一种有效的新方法，其理论新颖和完整，大大丰富了现有线性系统的谱的知识。复杂系统的伪谱的快速计算目前仍然是国际学术界关注的热点。

第 3 章为信息检索的矩阵方法，针对文本和网页检索，讨论信息检索过程中用到的深刻的矩阵理论，这涉及矩阵的奇异值分解、Jordan 分解、非负矩阵理论和线性子空间性质等内容。文本和网页的检索，尤其是网页的搜索和更新，是当前矩阵理论在信息科学领域成功运用的典范。换言之，对于大量网页的搜索和更新问题，相当成熟的矩阵理论能发挥很好的新作用。

第 4 章为高维数据的张量理论与方法，针对高维或海量数据分析需要用到超矩阵或张量的情况，讨论一般张量的基本概念和性质, 侧重介绍张量的典型分解和基本计算等内容。张量是矩阵的扩充，然而其内容远比矩阵内容复杂和难于理解。目前，张量理论远未成熟和完善，在张量研究领域尚存在着诸多未解决的问题。

第 5 章为分数阶微分方程的理论与方法，针对一些工程应用领域其数学模型是由分数阶微分方程所描述的情况，讨论分数阶微分方程的基本理论和方法。分数阶微分方程的理论是常规微分方程的理论的扩充，通常，这部分内容的研究大都借助相应的积分方程来处理。

第 6 章为微分方程的实时并行计算方法，针对大型微分方程组的并行计算，讨论实时并行计算方法的基本过程和机理。实时并行计算是当前研究时间相关问题的一种有效的新型计算方法，其思想朴素而新颖，同时，其与传统的微分方程的数值

解法也有紧密的联系，该方法正受到科学计算界的高度重视。

在本书的准备工作中，作者的多位学生为本书进行了基本素材的整理和搜集，付出了许多辛勤劳动。在本书的撰写过程中，作者的家人一直为作者营造着温馨和谐的家庭环境，使作者无后顾之忧。此外，在作者长期研究和教学工作中，得到了国家科技部研究项目、国家自然科学基金和国家教育部“长江学者”计划（特聘教授）的大力支持。在本书出版之际，作者衷心感谢所有支持和帮助过作者的机构和人们。

最后，由于作者水平有限，书中不妥与错误之处在所难免，希望广大读者和同仁不吝赐教。

蒋耀林

现代数学基础　图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码（第三版）	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析（第二版）	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论（第二版）	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程（第二版）	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析（第二版）	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步（第三版）	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fer mat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	26547-7	微分方程与数学物理问题	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论（第二版）	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论（修订版）	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36368-1	工程数学的新方法	蒋耀林

目　录

第 1 章　电路模拟的数值方法 ······ 1

1.1　电路模拟的基本概念与方法 ······ 1

1.1.1　基本概念 ······ 1

1.1.2　复相位分析 ······ 3

1.1.3　刚性问题 ······ 4

1.2　电路模拟的 Laplace 变换方法 ······ 6

1.2.1　Laplace 变换的定义与性质 ······ 6

1.2.2　常用函数的 Laplace 变换 ······ 7

1.2.3　在电路方程中的应用 ······ 8

1.2.4　系统矩阵的特征值计算 ······ 11

1.3　稳态分析的基本方法 ······ 17

1.3.1　非线性方程的 Newton 法 ······ 17

1.3.2　Jacobi 矩阵的计算 ······ 24

1.3.3　同伦延拓法 ······ 26

1.4　瞬态分析的基本方法 ······ 30

1.4.1　时间域分析 ······ 30

1.4.2　初值问题的解法 ······ 35

1.4.3　边值问题的解法 ······ 45

1.4.4　数值方法的稳定性 ······ 49

第 2 章　矩阵的伪谱方法 ······ 56

2.1　伪谱概念的提出 ······ 56

2.2　矩阵伪谱的定义及其性质 ······ 59

2.2.1　矩阵谱的基本概念 ······ 60

2.2.2　矩阵伪谱的定义 ······ 64

2.2.3 矩阵伪谱的性质 ··· 65
2.3 算子伪谱及其性质 ··· 70
2.3.1 算子谱的基本概念 ··· 70
2.3.2 算子的伪谱及其性质 ··· 72
2.4 伪谱的计算 ··· 75
2.4.1 随机扰动法 ··· 75
2.4.2 格点 SVD 法 ··· 76
2.5 伪谱加速技术 ··· 80
2.5.1 区域排除法 ··· 80
2.5.2 矩阵投影法 ··· 83
2.5.3 奇异值计算的加速法 ··· 87
2.5.4 曲线跟踪法 ··· 88
2.6 伪谱半径的计算 ··· 94
2.7 伪谱的应用 ··· 98
2.7.1 微分系统的稳定性 ··· 98
2.7.2 流体系统的不稳定性 ··· 100

第 3 章 信息检索的矩阵方法 ··· 102
3.1 基于奇异值分解理论的文本信息检索 ··· 102
3.1.1 奇异值分解理论 ··· 102
3.1.2 文本信息检索的基本概念 ··· 107
3.1.3 文本信息检索的奇异值分解更新 ··· 109
3.2 基于非负矩阵理论的网络信息检索 ··· 114
3.2.1 线性代数中的基本概念 ··· 114
3.2.2 非负矩阵理论 ··· 120
3.2.3 网页排序方法 ··· 129
3.2.4 PageRank 模型的更新 ··· 135

第 4 章 高维数据的张量理论与方法 ··· 140
4.1 张量的基本概念和运算 ··· 140
4.1.1 张量的定义及其矩阵表示 ··· 140
4.1.2 张量的基本运算 ··· 143
4.1.3 张量的其他概念 ··· 149
4.2 张量的奇异值分解 ··· 152
4.2.1 奇异值分解的概念 ··· 152
4.2.2 奇异值分解的性质 ··· 157
4.2.3 奇异值分解的计算和最佳秩 $-(r_1, r_2, r_3)$ 的逼近 ··· 159

4.3 张量的标准分解 ······ 166
4.3.1 标准分解的概念 ······ 166
4.3.2 标准分解和张量积秩的性质 ······ 167
4.3.3 标准分解的计算 ······ 177
4.3.4 标准分解的简单应用 ······ 179

第 5 章　分数阶微分方程的理论与方法 ······ 181
5.1 预备知识 ······ 181
5.1.1 函数空间 ······ 181
5.1.2 特殊函数 ······ 182
5.2 分数阶微分方程的基本概念 ······ 184
5.2.1 Riemann–Liouville 分数阶积分和导数及其性质 ······ 184
5.2.2 Caputo 分数阶导数及其性质 ······ 188
5.3 分数阶微分方程解的性质 ······ 191
5.3.1 含 Riemann–Liouville 分数阶导数的微分方程 ······ 192
5.3.2 含 Caputo 导数的分数阶微分方程 ······ 197
5.4 分数阶微分方程的求解方法 ······ 201
5.4.1 Volterra 积分方程法 ······ 201
5.4.2 Laplace 变换法 ······ 206
5.4.3 分数阶微分方程的数值解法 ······ 209

第 6 章　微分方程的实时并行计算方法 ······ 217
6.1 Parareal 算法的基本过程和收敛性 ······ 217
6.1.1 算法的迭代格式 ······ 217
6.1.2 线性常微分方程情形的收敛性 ······ 220
6.1.3 非线性常微分方程情形的收敛性 ······ 230
6.1.4 偏微分方程情形的收敛性 ······ 233
6.2 Parareal 算法的性质分析 ······ 236
6.2.1 数值稳定性 ······ 236
6.2.2 Krylov 子空间加速过程 ······ 239
6.2.3 与其他算法的联系 ······ 252
6.3 Parareal 算法的并行实现 ······ 259
6.3.1 MPI 编程的基本概念 ······ 260
6.3.2 Parareal 计算的加速比分析 ······ 261
6.3.3 一个数值例子 ······ 262

参考文献 ······ 265

第 1 章　电路模拟的数值方法

本章介绍电路模拟领域一些传统的基本方法, 内容包括电路模拟的基本概念和方法、稳态系统的数值方法以及瞬态系统的数值方法.

1.1　电路模拟的基本概念与方法

在电路电流定律和电压定律的基础上, 本节介绍大型电路系统的一些基本概念, 给出电路分析的三种基本方法, 即稳态分析、小信号分析和瞬态分析. 同时简单介绍求解线性电路方程的复相位分析方法, 以及微分方程的刚性问题.

1.1.1　基本概念

电路中有许多电器元件, 这些电器元件不是孤立存在的, 而是通过导线把它们连接起来. 描述电路中各个电器元件之间电流和电压之间关系的是最基本的 Kirchhoff 电流和电压定理: 电路中通过任意闭合曲面的所有电路分支电流的代数和为零; 电路中沿任一回路的电压降的代数和为零.

Kirchhoff 定理将电路中的各个分支、元件通过电流和电压的关系联系到一起, 用于建立关于描述电路系统的数学方程, 从而将对电路的分析转变为对电路方程的分析.

电路方程的一般形式为

$$f\left(\frac{dx(t)}{dt}, x(t), t\right) = 0.$$

电路模拟最自然的方程形式为

$$\frac{dq(x(t),t)}{dt} + j(x(t),t) - e(t) = 0.$$

通过求导的链式法则进一步将上式可以简化为

$$C(x)\frac{dx(t)}{dt} + j(x(t),t) - e(t) = 0.$$

一般地, 分析电路方程的方法有: 稳态分析、小信号分析和瞬态分析三种方法. 下面我们分别介绍这三种方法.

1. 稳态分析

稳态或直流分析主要研究电路的稳定状态, 也就是当所有的电流源和电压源都是常数时电路的状态. 在这种状态下, 电路中所有的电路变量 (电流、电压、电量等) 都变成了时间的常函数. 这种状态并不一定总是存在的. 我们假设这种情况存在, 那么根据电路模拟方程和上述假设, 可以得到

$$j(x_0) - e_0 = 0, \tag{1.1.1}$$

其中 $x_0 = x(t_0)$, $e_0 = e(t_0)$, 这是一个非线性方程. 通过解此方程就可以知道, 这种稳定状态是不是唯一的.

2. 小信号分析

小信号分析适合线性电路或者可以线性化的电路. 稳态分析方程 (1.1.1) 的解被称为 "操作点" (operating point). 通常, 我们会提供一个任意的输入信号来获得所想要的输出信号. 如果输入的是一个很小的电压或电流, 那么电路就可以由操作点附近的点来得到近似解, 这就是所谓的小信号分析.

首先解 $j(x_0) = e_0$, 得到 x_0; 然后加一个小信号 $e(t)$, 于是得到

$$\frac{dq(x_0 + \tilde{x}(t), t)}{dt} + j(x_0 + \tilde{x}(t), t) = e_0 + e(t).$$

利用 Taylor 展开可以得到

$$C\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + G\tilde{x}(t) = e(t), \tag{1.1.2}$$

其中 $C = \left.\dfrac{\partial q}{\partial \tilde{x}}\right|_{x_0}$, $G = \left.\dfrac{\partial j}{\partial \tilde{x}}\right|_{x_0}$.

小信号分析就是求解方程 (1.1.2), 以分析电路在操作点 x_0 附近的性态.

3. 瞬态分析

瞬态分析就是在已知电路方程和电路的某个特定状态条件下, 得到电路在整个时间域中的状态. 也就是说, 要求解下面微分方程的初值问题:

$$\frac{dq(x(t), t)}{dt} + j(x(t), t) = e(t)\ , \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.1.3}$$

通过求解可得到满足初值问题 (1.1.3) 的函数 $x(t)$. 这个结果对电路的设计者很重要, 他们从波形 $x(t)$ 可以得到很多有关电路的有用信息.

1.1.2 复相位分析

对于线性微分方程:

$$C\frac{dx(t)}{dt}+Gx(t)-e(t)=0,$$

我们所感兴趣的是电路在正弦或余弦稳态下解的形式, 也就是说电路由一个或者多个正弦或余弦源激发, 我们来求稳态下方程的解.

假设这些正弦或余弦源是在同频率下激发, 这种限定在实际中也是可行的. 因为线性电路服从叠加法则, 所以我们可以分析在各个频率下的子电路, 然后将所得结果叠加即可. 基于上述假设, 我们设:

$$e(t)=[a_1\cos(\omega t+\phi_1),a_2\cos(\omega t+\phi_2),\cdots,a_n\cos(\omega t+\phi_n)]^{\mathrm{T}}.$$

在实际电路中, 向量函数 $e(t)$ 的大部分元素都是零. 对于单个的 $a\cos(\omega t+\phi)$, 我们可以将它写成:

$$a\cos(\omega t+\phi)=\mathrm{Re}\,(a\exp(i(\omega t+\phi)))=\mathrm{Re}\,((a\exp(i\phi))\exp(i\omega t))=\mathrm{Re}\,(A\exp(i\omega t)),$$

其中 $A=a\exp(i\phi)=ae^{i\phi}$ 称为复相位.

给定频率 ω, 可以建立一一映射关系: $A\leftrightarrow\mathrm{Re}\,(A\exp(i\omega t))$. 对于向量函数 $e(t)$, 我们可以这样写 $e(t)=\mathrm{Re}\,(A\exp(i\omega t))$, 其中 $A=[A_1,A_2,\cdots,A_n]^{\mathrm{T}}$ 是一个复向量. 从而系统方程可以写为

$$C\frac{dx(t)}{dt}+Gx(t)-\mathrm{Re}\,(A\exp(i\omega t))=0.$$

对应地, 我们可以构造一个伴随系统:

$$C\frac{dy(t)}{dt}+Gy(t)-\mathrm{Im}\,(A\exp(i\omega t))=0.$$

以上 x,y 都是实变量, 这样我们叠加这两个方程, 可以有

$$C\frac{dx(t)}{dt}+Gx(t)-\mathrm{Re}\,(A\exp(i\omega t))+i\left(C\frac{dy(t)}{dt}+Gy(t)-\mathrm{Im}\,(A\exp(i\omega t))\right)=0.$$

整理得到

$$C\left(\frac{dx(t)}{dt}+i\frac{dy(t)}{dt}\right)+G(x(t)+iy(t))-A\exp(i\omega t)=0.$$

记 $z(t)=x(t)+iy(t)$, 则

$$C\frac{dz(t)}{dt}+Gz(t)-A\exp(i\omega t)=0.$$

显然, $z(t)$ 为复数. 在求解出 $z(t)$ 后, 我们就可以得到 $x(t)=\mathrm{Re}\,(z(t))$. 现在, 给出 $z(t)$ 的具体求解方法.

假设 $z(t) = Z\exp(i\omega t)$, 带入系统方程就可以得到

$$C\frac{d(Z\exp(i\omega t))}{dt} + GZ\exp(i\omega t) - A\exp(i\omega t) = 0,$$

即

$$i\omega CZ\exp(i\omega t) + GZ\exp(i\omega t) - A\exp(i\omega t) = 0.$$

两边同时消去 $\exp(i\omega t)$, 得到

$$i\omega CZ + GZ - A = 0,$$

即有 $(i\omega C + G)Z = A$. 利用 Gauss 消去法或 LU 分解就可以求得 Z. 这样, 就得到解 $x(t) = \mathrm{Re}\,(Z\exp(i\omega t))$, 其中 $Z = (G + i\omega C)^{-1}A$.

1.1.3　刚性问题

本小节将介绍一个在很多实际应用中都会遇到的重要概念, 那就是微分方程的刚性问题. 为了说明刚性这个概念, 先举一个例子.

例 1.1.1　考虑如下微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}x_1(t) + \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}x_1(t) + \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}x_2(t), \end{cases}$$

其中 λ_1, λ_2 为负常数. 设方程的解为 $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, 不难得出方程的具体解满足

$$x_1(t) = \gamma_1\exp(\lambda_1 t) + \gamma_2\exp(\lambda_2 t), \quad x_2(t) = \gamma_1\exp(\lambda_1 t) - \gamma_2\exp(\lambda_2 t),$$

其中 γ_1, γ_2 依赖于初值的选取 (不妨假设非零).

如果 $\lambda_1 \ll \lambda_2$, 比较方程解中出现的两个关于时间 t 的函数 $\exp(\lambda_1 t)$ 和 $\exp(\lambda_2 t)$. 可以看出, 函数 $\exp(\lambda_1 t)$ 随时间增加很快衰减为零, 我们称这一部分为快变分量; 而函数 $\exp(\lambda_2 t)$ 随时间增加衰减为零的速度比 $\exp(\lambda_1 t)$ 要慢得多, 这一部分可以称为慢变分量. 这样, 在 t 稍微大一些的时候, 快变分量起到的作用就无足轻重了. 这是个典型的刚性方程.

定义 1.1.1　称初值问题

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(t_0) = a$$

为刚性问题 (x 是 n 维向量), 若对于 $t \in [t_0, T]$, 下列各式成立: (1) $\mathrm{Re}\,(\mu_k(t)) < 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$; (2) $s(t) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathrm{Re}\,(-\mu_k(t)) / \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathrm{Re}\,(-\mu_k(t)) \gg 1$, 其中 $\mu_k(t)$ 是 Jacobi 矩阵 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$ 的特征值, $\mathrm{Re}\,(x)$ 表示 x 的实部.

一般称上述定义中 $s(t)$ 为刚性比. 通常, $s(t)$ 为 $O(10)$ 时称为一般刚性问题; 当 $s(t)$ 超过 $O(10^6)$ 时称为严重刚性问题.

当 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$ 为常数矩阵时, 上面的 μ_k 就是 Jacobi 矩阵的普通特征值.

继续考虑例 1.1.1, 由于 $\lambda_1,\lambda_2<0$, 可得 $x_\infty=\lim\limits_{t\to+\infty}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=0$. 通过显式 Euler 法可以给出方程的近似解为

$$x_1^{(k)}=\gamma_1(1+h\lambda_1)^k+\gamma_2(1+h\lambda_2)^k,\quad x_2^{(k)}=\gamma_1(1+h\lambda_1)^k-\gamma_2(1+h\lambda_2)^k.$$

当 $k\to+\infty$ 时, 这个解应满足 $x_\infty=0$, 所以

$$\lim_{t\to+\infty}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ |1+h\lambda_1|<1,\ \ |1+h\lambda_2|<1.$$

也就是说, 这等价于: $h<2/|\lambda_1|$, $h<2/|\lambda_2|$. 如果假设 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-1000$, 这样就使得 $h<0.002$. 显然这个微小的步长是由 $\lambda_2=-1000$ 决定的.

在定义 1.1.1 中, 刚性的定义并不包含 Jacobi 矩阵的特征值出现实部为零或者是很小正数的情形, 所以有必要介绍关于刚性问题的更一般定义. 为此, 我们来看线性的情况.

对于初值问题

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+\varphi(t),\ \ x(t_0)=x_0, \tag{1.1.4}$$

我们把矩阵问题

$$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t),\ \ X(t_0)=I$$

的解 $X(t)=\exp(A(t-t_0))\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 称为问题 (1.1.4) 的矩阵预解式.

这样, 问题 (1.1.4) 的解 $x(t)$ 就可以表示为

$$x(t)=\exp(A(t-t_0))x_0+\int_{t_0}^{t}\exp(A(t-\tau))\varphi(\tau)d\tau;$$

相应的齐次问题 $\dfrac{d\hat{x}(t)}{dt}=A\hat{x}(t)$, $\hat{x}(t_0)=x_0$ 的解为 $\hat{x}(t)=\exp(A(t-t_0))x_0$.

如果矩阵 A 可以对角化, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是相应的特征向量, 那么初值问题 (1.1.4) 及其对应的齐次问题的解可分别表示为

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}k_ic_i\exp(\lambda_i(t-t_0))+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}g_i(\tau)c_i\exp(\lambda_i(t-\tau))d\tau$$

和

$$\hat{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}k_ic_i\exp(\lambda_i(t-t_0)),$$