



21世纪高等学校规划教材

# 高等数学

Gaodeng Shuxue

主编 © 刘光旭 张巧真

下册



北京邮电大学出版社  
www.buptpress.com



21 世纪高等学校规划教材

# 高等数学

(下册)

主 编 刘光旭 张巧真  
副主编 杨振起 陈宗荣  
编 委 苏思思 葛朗睦 季 雅

北京邮电大学出版社

· 北京 ·

## 内 容 简 介

本书是在国家倡导优化高等教育结构的背景下,根据高等学校高等数学课程教学要求和实施高等数学分类分层教学改革的需要,由多年高等数学教学经验的教师编写而成.本书包括微积分、线性代数和概率论与数理统计三部分;分上、下册.上册内容主要包括一元微积分、向量代数与空间解析几何、多元微分学、二重积分、无穷级数.下册内容主要包括常微分方程、线性代数初步、概率论和数理统计.各章节均配有习题,书后附有参考答案.本书着眼于讲授上述内容的基本概念、基本原理和基本方法,重在使学生掌握基础知识.少而精,简明实用,突出重点,层次清楚,课时灵活,便于教学,是本书的特点.本书力求用较少的篇幅,把高等数学的光谱展示得多姿多彩.

本书可供高等学校理工科、经济、管理和其他非数学类专业的学生使用,也可供相关人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/刘光旭,张巧真主编.--北京:北京邮电大学出版社,2011.11

ISBN 978-7-5635-2665-9

I. ①高… II. ①刘… ②张… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第126061号

---

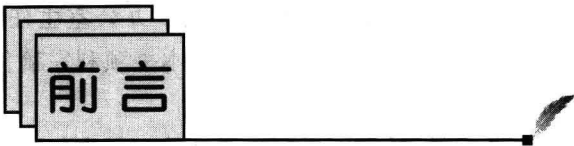
书 名 高等数学(下册)  
编 著 刘光旭 张巧真  
责任编辑 张保林  
出版发行 北京邮电大学出版社  
社 址 北京市海淀区西土城路10号(100876)  
电话传真 010-82333010 62282185(发行部) 010-82333009 62283578(传真)  
网 址 www.butpress3.com  
电子信箱 ctrd@buptpress.com  
经 销 各地新华书店  
印 刷 北京市梦宇印务有限公司  
开 本 787 mm×960 mm 1/16  
印 张 12.5  
字 数 270千字  
版 次 2011年11月第1版 2011年11月第1次印刷

---

ISBN 978-7-5635-2665-9

定价:22.00元

如有质量问题请与发行部联系  
版权所有 侵权必究



## 前言

全国的大学有 2600 多所,随着经济和社会发展的需要,大学的办学模式自然是多层次的,其培养目标也应各有定位.多数专业是把“高等数学”列为必修课,但不同层次院校,不同专业所使用的高等数学教材偏向高层次要求的现象比较普遍,而很多院校,专业给予高等数学课的教学时数却相对较少,课时与内容之间的矛盾较为突出.另一方面,对众多的专业,微积分、线性代数、概率论和数理统计都是重要的基础教学内容.这不仅是因为它们在各个领域中有着广泛的应用,而且从人才素质的全面培养来说,这些数学内容也是不可或缺的.针对上述情况,根据高等学校高等数学课程教学要求和实施高等数学分类分层教学改革的需要,我们编写了这本涵盖微积分、线性代数、概率论和数理统计的简明实用的高等数学教材.

近 10 年来,“数学文化”快步走进大学校园.南开大学自 2001 年起一直开设“数学文化”选修课,旨在通过讲授数学的思想、精神和方法提高大学生的数学素质、文化素质和思想素质.为提高学生对数学的兴趣,本书在适当的章节也融入一些数学文化的内容.例如,由欧拉公式,读者会立刻有一个惊人的发现:数学中最常用的 5 个数  $0, 1, e, i, \pi$  之间存在着一个非常有趣而奇妙的关系: $e^{i\pi} + 1 = 0$ . 数学之美,令人赞叹!又如,在德国,10 马克是最通行的纸币,其上印着的是数学王子高斯的头像和他在研究天文问题时所发现的正态分布曲线图.一个民族对于在科学上做出重大贡献的伟大数学家如此尊敬和爱戴,令世人震撼和盛赞!因为篇幅所限,本书难以涉及很多数学文化的内容.但我们相信数学文化中的趣闻轶事将会激励年轻学子对理想和美的追求.

本书着眼于介绍高等数学中的基本概念、基本原理和基本方法,它们都是初步的,但又是基本的.强调“少而精”,简明实用,突出重点,层次清楚,课时较少,便于教学,是本书的另一特点.本书力求用较少的篇幅,把高等数学的光谱展示得多姿多彩,期望能对后继课程的学习和进一步深造有所裨益.书中打 \* 号的内容可根据课时多少决定取舍.全书共 17 章,分上、下两册.上册内容主要包括一元微积分、向量代数与空间解析几何、多元微分学、二重积分、无穷级数;下册内容主要包括常微分方程、线性代数初步、概率论和数理统计.各章节配有习题,书后附有参考答案.

本书除署名编者外,书稿的整理、核对等工作由南开大学数学学院段华贵副教授、王秀玲副教授、王立云副教授和胡晶博士完成.

在本书编写过程中,南开大学数学学院高等数学教学办公室主任薛锋副研究员为编者提供了许多有价值的参考资料,数学学院李淑兰老师为本书顺利完稿付出了辛勤的劳动.在此对他们表示衷心的感谢.

由于时间仓促和编者水平所限,书中不当和疏漏之处在所难免,诚请读者批评指正.

刘光旭  
于南开大学数学学院  
2011年3月



# 目录

<b>第 10 章 常微分方程</b> .....	1
§ 1 一阶微分方程 .....	1
§ 2 二阶微分方程 .....	14
综合练习 10 .....	26
<b>第 11 章 线性代数初步</b> .....	28
§ 1 行列式的定义 .....	29
§ 2 行列式的性质及其计算 .....	35
§ 3 矩阵及其运算 .....	47
§ 4 一般线性方程组的求解 .....	60
综合练习 11 .....	79
<b>第 12 章 概率的基本概念</b> .....	81
§ 1 随机试验与样本空间 .....	81
§ 2 古典概型 .....	85
§ 3 频率与概率 .....	87
§ 4 条件概率、乘法公式、独立性 .....	90
§ 5 全概率公式与贝叶斯公式 .....	94
综合练习 12 .....	97
<b>第 13 章 随机变量及其分布</b> .....	98
§ 1 随机变量 .....	98
§ 2 离散型随机变量 .....	99
§ 3 连续型随机变量 .....	103
§ 4 随机变量的分布函数 .....	108
§ 5 随机变量函数的分布 .....	111
§ 6 随机向量及其独立性 .....	114

综合练习 13 .....	119
<b>第 14 章 随机变量的数字特征</b> .....	120
§ 1 数学期望 .....	120
§ 2 随机变量的方差 .....	124
综合练习 14 .....	126
<b>第 15 章 样本及抽样分布</b> .....	128
§ 1 总体、参数、样本 .....	128
§ 2 抽样分布 .....	132
综合练习 15 .....	137
<b>第 16 章 参数估计</b> .....	138
§ 1 参数的点估计 .....	138
§ 2 评价估计量的优劣标准 .....	144
§ 3 参数的区间估计 .....	146
综合练习 16 .....	151
<b>第 17 章 假设检验</b> .....	153
§ 1 假设检验的概念 .....	153
§ 2 正态总体参数的假设检验 .....	155
综合练习 17 .....	162
<b>附录 1 标准正态分布表</b> .....	163
<b>附录 2 泊松分布表</b> .....	164
<b>附录 3 t 分布表</b> .....	166
<b>附录 4 <math>\chi^2</math> 分布表</b> .....	168
<b>附录 5 F 分布表</b> .....	171
<b>习题答案</b> .....	180

## 常微分方程

在许多实际问题中,变量之间的关系是通过含有自变量、未知函数及其导数的方程所给出的.这种含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程称为微分方程(在本章中常简称为方程).方程中的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.满足微分方程的函数叫做微分方程的解.

例如,  $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = \sin t$  就是一个二阶微分方程,  $x$  是未知函数,  $t$  是自变量.容易验证  $x = \frac{1}{4}\sin t$  是上述微分方程的解.进一步还可以验证,对任意给定的常数  $C_1, C_2$ , 函数

$$x = C_1 \cos \sqrt{5}t + C_2 \sin \sqrt{5}t + \frac{1}{4} \sin t$$

都是所给方程的解.

在上述微分方程中只含有一元函数的导数,这样的方程叫常微分方程(本章所讨论的微分方程均指常微分方程).

### 学习基本要求

1. 掌握可分离变量微分方程、齐次微分方程及全微分方程的解法.熟练掌握一阶线性微分方程及伯努利方程的解法.
2. 了解可降阶微分方程的解法.了解非齐次二阶线性微分方程的通解结构.熟练掌握二阶常系数非齐次线性微分方程的解法.了解欧拉方程的解法.

## § 1 一阶微分方程

### 1.1 解的存在与唯一性定理

在前面开篇的例子中,函数  $x = C_1 \cos \sqrt{5}t + C_2 \sin \sqrt{5}t + \frac{1}{4} \sin t$  是二阶方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x =$



$\sin t$  的含有两个独立任意常数的解. 当取定一组常数  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , 则得到解  $x = \frac{1}{4} \sin t$ .

一般地, 称  $n$  阶微分方程的具有  $n$  个独立任意常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  的解为**通解**(或叫**通积分**).

在通解中, 对任意常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  取定一组数值后得到的解叫**特解**.

在几何上, 通解为  $xy$  平面(第一个例子是  $tx$  平面)上的一个曲线族, 特解为该曲线族中的一条特定曲线. 这样的曲线又称为微分方程的**积分曲线**.

**注 1** 一般来说, 通解是解的一般表达式, 可能还有一部分解没有包容在通解里. 不过已经证实: 线性微分方程的通解就是所有解的一般表达式.

**注 2** 当  $n > 1$  时, 所谓“ $n$  个任意常数是独立的”是指: 对这组常数取定一组数值, 就可以唯一确定方程的一个解, 并且不同的一组数值对应于不同的解.

在实际问题中, 往往要求出满足某些附加条件的解, 这类条件称为**定解条件**.

设微分方程中的未知函数为  $y = y(x)$ , 如果方程是一阶的, 通常用来确定任意常数的条件是:

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时, } y = y_0,$$

或写成

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

其中  $x_0, y_0$  都是给定的值; 如果微分方程是二阶的, 通常用来确定任意常数的条件是:

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时, } y = y_0, \quad y' = y'_0,$$

或写成

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

其中  $x_0, y_0$  和  $y'_0$  都是给定的值. 上述这种条件叫做**初值条件**.

求微分方程  $y' = f(x, y)$  满足初值条件  $y|_{x=x_0} = y_0$  的特解这样一个问题, 叫做一阶微分方程的**初值问题**, 记作

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

初值问题的几何意义就是求微分方程的通过点  $(x_0, y_0)$  的那条积分曲线. 二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

的几何意义则是求微分方程的通过点  $(x_0, y_0)$ , 且在该点处的切线斜率为  $y'_0$  的那条积分曲线.

已知一阶微分方程  $y' = f(x, y)$  和初值条件  $(x_0, y_0)$ , 问是否存在唯一的特解  $y = y(x)$ , 使  $y(x_0) = y_0$ ? 下面介绍的定理可以给出回答.

**定理 1** 对于初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

如果  $f(x, y)$  在矩形区域  $D: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$  上连续, 而且对于  $y$  满足利普希茨 (Lipschitz, 1832 - 1903, 德国) 条件, 即对于  $D$  上任意两点  $(x, y_1)$  和  $(x, y_2)$  恒成立如下不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad L \text{ 是某一正常数,}$$

则初值问题在区间  $I = [x_0 - h, x_0 + h]$  上存在唯一解, 其中常数

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|.$$

注 利用微分中值定理容易证明: 如果  $f'_y(x, y)$  在区域  $D$  上有界(或连续), 则  $f(x, y)$  在  $D$  上必满足利普希茨条件.

## 1.2 可分离变量的微分方程

这种方程的形式是

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

右端的两个函数都是已知的. 为了求解方程, 当  $g(y) \neq 0$  时, 把含有  $x$  的表达式与含有  $y$  的表达式分开(这个过程叫“分离变量”), 把方程化为

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx.$$

在两端求积分(对左端以  $y$  为积分变量), 得到方程的通解

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C.$$

(由这个等式确定的隐函数是微分方程的解. 这种通解是通过隐函数定义的, 因而叫“隐式通解”.)

另外, 如果有数值  $y_0$  满足  $g(y_0) = 0$ , 那么方程还有解  $y = y_0$ .

例 1 求解  $y' = \sqrt{x} + \ln x$  的通解.

解 该方程属于导数已经解出的类型, 直接积分可得通解

$$\begin{aligned} y &= \int (\sqrt{x} + \ln x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \int \ln x dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x + x \ln x + C. \end{aligned}$$

例 2 求方程  $\frac{dy}{dx} = x \cot y$  的通解.

解 原方程可改写为  $\tan y dy = x dx$ ,

两端取不定积分则有  $-\ln |\cos y| = \frac{1}{2} x^2 + C_0$ , 或记为

$$\cos y = \pm e^{-\left(\frac{1}{2}x^2 + C_0\right)},$$

亦可记为

$$\cos y = \pm Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (C > 0).$$

### 1.3 齐次方程

形式为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方程称为齐次方程. 为了求解齐次方程, 作变量替换  $u = \frac{y}{x}$ , 即  $y = xu$ , 代入方程得

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u),$$

或写成

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

这是一个可分离变量的方程, 求出其解, 再根据函数  $u, y$  的关系, 便可求出原微分方程的通解.

**例 3** 求解方程  $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{tx - t^2}$ .

**解** 原方程可变形为  $\frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2}{\frac{x}{t} - 1}$ , 这是一个齐次方程. 令  $x = tu$ , 则  $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$ , 在

此变换下, 原方程化为

$$t \frac{du}{dt} + u = \frac{u^2}{u - 1},$$

即

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{1}{t} dt,$$

两端积分得

$$u - \ln |u| = \ln |t| + \ln C_1,$$

或记为  $e^u = \pm C_1 tu$ . 于是原方程的通解为

$$e^{\frac{y}{x}} = Cx \quad (C = \pm C_1).$$

另外, 原方程还有一个特解  $x = 0$ .

**例 4** 求曲线族  $x^2 + y^2 = Cx$  的正交曲线族, 其中  $C$  为任意常数(两曲线族正交是指一族中的每一条曲线与另一族中的每一条曲线正交. 例如, 圆周族  $x^2 + y^2 = r^2$  与射线族  $y \cos \theta - x \sin \theta = 0$  正交, 这里  $r$  与  $\theta$  分别是任意常数,  $r \neq 0$ ).

**解** 由所给曲线族可解出  $C = \frac{x^2 + y^2}{x}$ . 因为两曲线正交的充分必要条件是在交点处它们的切线的斜率互为负倒数. 对  $x^2 + y^2 = Cx$  两边求得  $2x + 2yy' = C$ , 即

$$y' = \frac{C - 2x}{2y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{2y},$$

所以可以建立所求正交曲线族应满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x - \frac{x^2 + y^2}{x}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

这是一个齐次方程,容易求得其通解为

$$x^2 + y^2 = ky, \quad k \text{ 是任意常数.}$$

此外,还有一条直线  $y = 0$ ,它们构成了已给曲线族  $x^2 + y^2 = Cx$  的正交曲线族(见图 10.1).

**例 5** 设河边一点  $O$  的正对岸为点  $A$ . 河宽  $OA = h$ ,两岸为平行直线,水流速度为  $\mathbf{a}$  ( $|\mathbf{a}| = a$ ). 某人从点  $A$  游向点  $O$ ,设人(在静水中)的游速为  $\mathbf{b}$  ( $|\mathbf{b}| = b$ ),且人游动方向始终朝着点  $O$ ,求人游过的轨迹线的方程.

**解** 由已知水流速度为  $\mathbf{a}$ ,人的游速为  $\mathbf{b}$ ,则人实际运动速度为  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

取  $O$  为坐标原点,河岸朝顺水方向为  $x$  轴, $y$  轴指向对岸,如图 10.2 所示. 设在时刻  $t$  人位于点  $P(x, y)$ ,则人的运动速度

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

故有  $\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y}$ .

现在  $\mathbf{a} = \{a, 0\}$ ,而  $\mathbf{b} = b e_{\overrightarrow{PO}}$ ,其中  $e_{\overrightarrow{PO}}$  为与  $\overrightarrow{PO}$  同方向的单位向量,由  $\overrightarrow{PO} = -\{x, y\}$ ,故  $e_{\overrightarrow{PO}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\{x, y\}$ ,于是

$$\mathbf{b} = -\frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2}}\{x, y\}, \text{ 从而}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \left\{ a - \frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{by}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}.$$

由此得微分方程

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y} = -\frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{by} + \frac{x}{y},$$

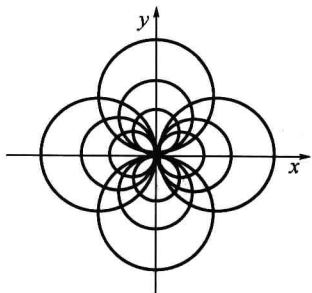


图 10.1

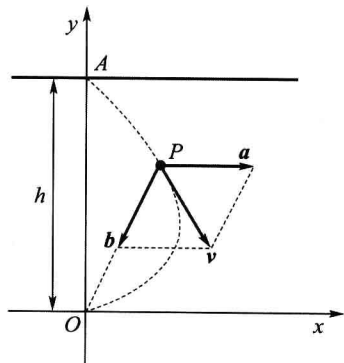


图 10.2

即 
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{b} \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{x}{y},$$

这是一个齐次方程. 为求解, 可令  $\frac{x}{y} = u$ , 则  $x = yu$ ,  $\frac{dx}{dy} = y \frac{du}{dy} + u$ , 代入上面的方程, 得

$$y \frac{du}{dy} = -\frac{a}{b} \sqrt{u^2 + 1},$$

分离变量得

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = -\frac{a}{by} dy,$$

由换元积分法得  $\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = -\frac{a}{b} \ln y - \frac{a}{b} \ln C,$

即 
$$u + \sqrt{u^2 + 1} = (Cy)^{-\frac{a}{b}}.$$

分子有理化得  $\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1} - u} = (Cy)^{-\frac{a}{b}}$ , 即  $\sqrt{u^2 + 1} - u = (Cy)^{\frac{a}{b}}.$

上述两式相减得 
$$2u = (Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}},$$

即

$$u = \frac{1}{2} [(Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}}],$$

于是 
$$x = \frac{y}{2} [(Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}}] = \frac{1}{2C} [(Cy)^{1-\frac{a}{b}} - (Cy)^{1+\frac{a}{b}}].$$

以  $y = h$  时,  $x = 0$ , 代入上式, 得  $C = \frac{1}{h}$ . 显然, 原点  $(0, 0)$  也满足上述方程, 故人游过的轨迹线方程为

$$x = \frac{h}{2} \left[ \left(\frac{y}{h}\right)^{1-\frac{a}{b}} - \left(\frac{y}{h}\right)^{1+\frac{a}{b}} \right], \quad 0 \leq y \leq h.$$

## 1.4 一阶线性微分方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (10.1)$$

的方程称为一阶线性微分方程, 其中  $P(x), Q(x)$  为已知函数. 当  $Q(x) \equiv 0$ , 方程(10.1)称为齐次线性方程; 否则称为非齐次线性方程. 为求解非齐次线性方程(10.1), 先求出相应的齐次线性方程

$$y' + P(x)y = 0 \quad (10.2)$$

的通解. 方程(10.2)可分离变量为  $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$ , 两端积分便可求得其通解

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int P(x) dx + C_1,$$

即  $\ln |y| = - \int P(x) dx + C_1$ , 或写为

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}, \quad (10.3)$$

这便是齐次线性方程(10.2)的通解公式,其中  $C = \pm e^{C_1}$  为任意常数.

以下转向求非齐次线性方程(10.1)的解,思路是把相应齐次线性方程(10.2)的通解公式中的任意常数  $C$  换成一个函数  $u = u(x)$ ,且把方程(10.1)的解设为

$$y = u(x)e^{-\int P(x) dx} \quad (10.4)$$

(这种方法叫常数变易法).将式(10.4)两端求导,得

$$y' = u'e^{-\int P(x) dx} - uP(x)e^{-\int P(x) dx} = u'e^{-\int P(x) dx} - P(x)y.$$

将导数  $y'$  代入方程(10.1),可以得到以  $u$  为未知函数的方程:

$$u'e^{-\int P(x) dx} = Q(x).$$

把指数部分转移到右端,就得到方程

$$u' = e^{\int P(x) dx} Q(x).$$

两端求积分,得到未知函数  $u$  的一般表达式:

$$u = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C.$$

现在根据变量  $y, u$  之间的关系(10.4),就得到非齐次线性方程(10.1)的通解

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[ \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C \right]. \quad (10.5)$$

式(10.5)称为一阶非齐次线性方程(10.1)的通解公式.

若在此通解公式中令  $C = 0$ ,就得到非齐次线性方程的一个特解

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[ \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx \right].$$

由此可见,一阶非齐次线性方程的通解结构是:相应齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

**例 6** 求解初值问题

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = -1, \\ y(x)|_{x=1} = 1, x > 0. \end{cases}$$

**解** 这是一阶线性微分方程标准形,  $P(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $Q(x) = -1$ ,利用公式(10.5),先计算

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x,$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}.$$

于是方程的通解为  $y = x \left( \int \frac{-1}{x} dx + C \right) = x(C - \ln x)$ .

由初始条件  $y(1) = 1$ , 代入上述解的表达式, 解得  $C = 1$ , 于是初值问题的解为

$$y = x(1 - \ln x).$$

注 上述例题中, 若求  $x < 0$  时的特解, 则其通解为

$$y(x) = -x[C - \ln(-x)].$$

在无特别指明区间时, 该方程的通解可表示为  $y(x) = |x|(C - \ln|x|)$ , 此时可以不必分区间进行讨论.

### 例 7 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{xy + y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

解 将自变量  $x$  和未知函数  $y$  的位置对换, 即把  $x$  看成未知函数, 得到

$$\frac{dx}{dy} - x = y,$$

这是  $x$  关于  $y$  的一阶非齐次线性方程, 初值条件相应变为  $x|_{y=1} = 0$ . 先由公式(10.5) 求其通解得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int dy} \left( \int ye^{\int dy} dy + C \right) \\ &= e^y \left( \int ye^{-y} dy + C \right) \\ &= e^y (C - ye^{-y} - e^{-y}) \\ &= Ce^y - y - 1. \end{aligned}$$

将初值条件  $x(1) = 0$  代入上式, 便得  $C = 2e^{-1}$ . 故原初值问题的解为

$$x + y - 2e^{y-1} + 1 = 0.$$

例 8 设曲线  $L$  位于  $xy$  平面的第一象限内,  $L$  上任一点  $M$  处的切线与  $y$  轴总相交, 交点记为  $A$ . 已知  $|\overline{OA}| = |\overline{MA}|$ , 且  $L$  过点  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , 求  $L$  的方程.

解 设点  $M$  的坐标为  $(x, y)$ , 则切线  $MA$  的方程为  $Y - y = y'(X - x)$ . 令  $X = 0$ , 则  $Y = y - xy'$ , 故点  $A$  的坐标为  $(0, y - xy')$ . 由  $|\overline{OA}| = |\overline{MA}|$ , 有  $|y - xy'| = \sqrt{(x-0)^2 + (y - y + xy')^2}$ , 化简后得

$$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -x.$$

为解此方程,令  $z = y^2$ , 得

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x,$$

解得

$$z = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left( - \int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = x(-x + C),$$

即

$$y^2 = -x^2 + Cx.$$

由于  $L$  在第一象限内,故

$$y = \sqrt{Cx - x^2},$$

再利用条件  $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ , 可求得  $C = 3$ . 于是曲线  $L$  的方程为

$$y = \sqrt{3x^2 - x^2} \quad (0 < x < 3).$$

## 1.5 伯努利方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

的方程称为伯努利(Bernoulli, 1654—1705, 瑞士)方程, 其中  $n$  是常数(但  $n \neq 0, 1$ ). 这是一阶方程, 但不是线性微分方程. 为了求解伯努利方程, 在其两端同乘以  $y^{-n}$  (目的是消去右端变量  $y$ ), 则方程化为

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (10.6)$$

再作变量替换(目的是把这个方程转化为线性方程):

$$u = y^{1-n}. \quad (10.7)$$

在两端求导得

$$u' = (1-n)y^{-n}y'.$$

把以上两式代入方程(10.6)后, 得到以变量  $u$  为未知函数的方程:

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

这是一个一阶线性方程, 有现成的求解公式. 最后根据函数  $y, u$  之间的关系(10.7), 就可以得到伯努利方程的通解. 注意: 伯努利方程还有解  $y = 0$ .

**例 9** 求解方程  $y' = 6\frac{y}{x} - xy^2$ .

**解** 这是一个伯努利方程. 为消去右端的  $y^2$ , 在方程两端同乘以  $y^{-2}$ , 把方程化为

$$y^{-2}y' = \frac{6}{x}y^{-1} - x,$$

即



$$y^{-2}y' - \frac{6}{x}y^{-1} = -x.$$

现在令  $u = y^{-1}$ , 在其两端求导得到  $u' = -y^{-2}y'$ . 因此上面的方程转化为

$$u' + \frac{6}{x}u = x.$$

根据线性方程的通解公式,

$$u = e^{-\int \frac{6}{x} dx} \left( \int e^{\int \frac{6}{x} dx} x dx + C \right).$$

最后, 原方程的通解是

$$y = x^6 \left( \frac{x^8}{8} + C \right)^{-1}.$$

另外, 原方程还有解  $y = 0$ .

## 1.6 应用实例

微分方程作为研究函数变量之间关系的一个数学分支, 是建立数学模型的重要手段之一. 下面在已学微分方程的知识基础上, 给出一阶微分方程的几个应用实例.

**例 10** 考虑行驶中的一辆汽车, 其质量为  $m$ , 若发动机突然熄火, 刹车系统失灵, 且此时速度为  $v_0$ , 假设路面摩擦力与阻力之合力  $f$  与行驶速度  $v(t)$  成正比, 求汽车从熄火到静止下来所经过的滑行时间.

**解** 由牛顿定律可得知

$$f = -k v(t) = m \frac{dv}{dt} \quad (k \text{ 为比例常数}),$$

于是得到速度  $v(t)$  满足的方程为

$$\frac{dv}{v(t)} = -\frac{k}{m} dt.$$

两边取  $[t_0, t]$  上的积分得到

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{dv}{v(t)} &= -\frac{k}{m} (t - t_0), \\ \ln v(t) &= \ln v(t_0) - \frac{k}{m} (t - t_0). \end{aligned}$$

由已知,  $t_0 = 0, v(0) = v_0$ , 得

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

显然有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ , 从理论上来看,  $v(t)$  永远不会为零(因为忽略了其他因素), 而事实上, 经历一段时间之后,  $v(t)$  将接近于零(见图 10.3).

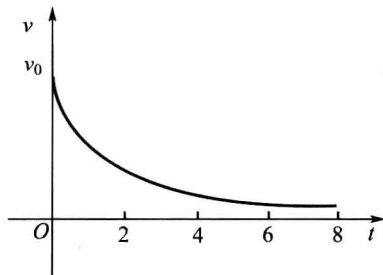


图 10.3