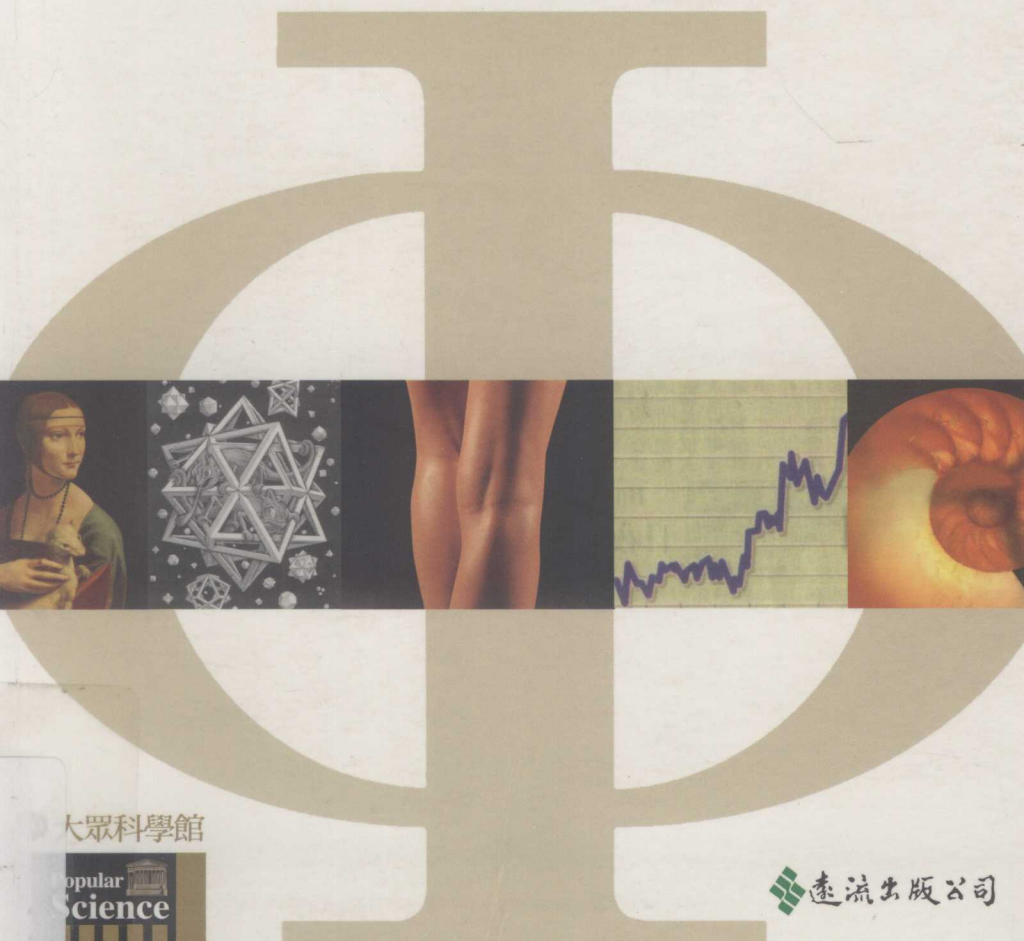


The Golden Ratio

黃金比例

1.61803……的祕密

Mario Livio 著 丘宏義 譯



大眾科學館

Popular
Science

遠流出版公司

10 大眾科學館

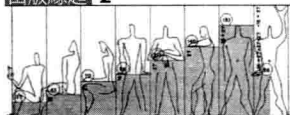


黃金比例

The Golden Ratio

Mario Livio／著

丘宏義／譯



大眾科學館

出版緣起

二〇〇二年三月，遠流引進了全球科普雜誌的第一品牌、有一百五十多年歷史的*Scientific American*，創辦了《科學人》雜誌，在這個景氣不太好的年頭，短短幾個月之間訂戶人數已達兩萬多。

這個現象所傳達出來的訊息，是廣大群眾對於科學知識的需求，已經攀上新的高峰；大家都認識到，在二十一世紀的今天，科學不再只是科學家在實驗室裡埋頭苦幹的事情而已，科學研究所產生的結果，會影響到我們每一個人：從日常生活到社會議題到人生哲學，到處都充斥著科學的影子，科學早已成為「眾人之事」；要是追不上科學發展的步伐，您可能會和社會脫節！

而事實上，作為一家出版社，遠流也早已體認到提昇全民科學素養的重要性，陸續出版了曾志朗院士的《用心動腦話科學》、「台灣館」的「觀察家」、「台灣自然寶庫」、「魔法校車」等系列；更邀請到認知科學學者洪蘭教授，來策劃「生命科學館」的出版，負責選書、甚至也親自參與翻譯的工作，就生命科學這個可能是二十一世紀最重要的課題，提供讀者相關的知識，從二〇〇〇年二月起，陸續出版了《基因複製》、《為什麼斑馬不會得胃潰瘍？》、《深海潛魚4億年》及《腦內乾坤》等十多種圖書。

現在，《科學人》現象讓我們深切覺得，華文讀者對於科普出版品還有許多期待，範圍可擴大到其他的科學領域。這也是為什麼我們要開闢「大眾科學館」此一系列書籍的緣由。

我們覺得，科學叢書的出版與科學雜誌正好可以相輔相成。一般說來，雜誌必須同時關照各個科學領域的不同面向，就全球各地的科學發展，為讀者提供介紹及解讀的服務；科普圖書則可以就某個單一的主題，不用太擔心篇幅或版面的限制，盡情討論。而透過《科學人》雜誌，我們可以和全球各地的華文科學家有更積極的互動；透過科普圖書，他們則可以從華人科學家的獨特觀點出發，細說從頭。

因此，就像我在《科學人》創刊時提出的，希望「借用他山之石所搭建的知識平台，能讓科學與科學之間、科學與人文之間，找到對話的窗口。」當然，更希望爭取國內一流科學家的科普心血結晶。

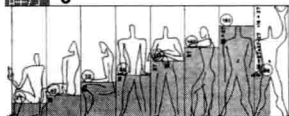
如果說，《科學人》可以讓人人都能成為科學人，那麼人人也都可以光臨「大眾科學館」和「生命科學館」，悠閒地逛逛。在這裡，您可以從微小的基因結構逛到宇宙深處、或數學的奇妙世界，也可以看看科學家如何發現到各種突破既往的概念，對我們個人或社會帶來什麼樣的影響。

希望大家閱讀這些出版品時，都可以吸收到各種重要的科學知識，同時度過一段美好的知性時光！

王榮文

各種古文化都知道計數。對我們來說，他們計數的方法可能很笨拙——即使對他們的語言最自傲的法國人，也只能對他們到現在還天天在用的*quatre-vingts*（四個二十，即八十）抱以苦笑，因為這實在太違背他們發明出的公制的精神了——可是對他們來說，不用「八個十」而用彳亍的「四個二十」乃是天經地義的事。從計數（見第二章）到認為數字可以單獨存在，不需要物件的抽象觀念，最早在希臘成形（中國也在很早建立了這個觀念，可是覺得並不太重要，以後也沒有像希臘人那樣全心去發展。南美的馬雅人也發展出同樣的觀念，可是要遲得多）。希臘人對數字的抽象觀念的崇拜幾乎到了宗教狂熱的地步；在各種派別之中又以畢達哥拉斯（他的信徒總稱為畢氏學派）為首。他們建立了許多數論，包括證明了無理數的存在。他們認為無理數不應當存在於宇宙中，因此嚴格禁止把這祕密洩露出去。傳說一位名叫希巴蘇斯的畢派信徒把這信息透露出去，因而被畢氏信徒丟在海中淹死（見第一章）。歐幾里德則發現了所謂的「中末比」：把一條直線分割成兩段，當長線段和短線之比等於全線長和長線段之比時，就是黃金比例（不過，黃金比例也是一個無理數）；這是第一個黃金比例的明晰定義。

中末比——現在稱為「黃金比例」或其他帶有「黃金」頭銜的名字——最令人驚奇的地方是，它經常在令人意想不到的地方冒出。一個以5的平方根為主的數字，其結果一直延伸到今日，很可能還有許多尚未發現的成果。相比之下，圓周率 π 出現之頻繁，使得有些物理理論家都覺得煩，因此自訂出一個「單位」， $4\pi=1$ （請別問我怎樣去應用這單位），可是 π 卻不會像黃金比例不經意冒出。而從另一方面來說，黃金比例——數學遊戲式的直線分割——非但在五邊形，以及西方認為和中國的八卦圖一樣具有避邪功效的



五角星形中出現，居然也在植物的葉序、向日葵小花的排列、螺旋星系的漩渦、鸚鵡螺的美麗螺旋貝殼、物理上的準晶體，以及非週期性鋪磚，與兔子繁殖假設和股市的波動起伏等等風馬牛不相及的現象中不請自來，讓人為之驚艷。

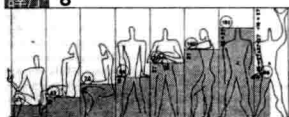
最美的矩形，神的比例，文學及藝術的規範

我在上初中時（一九四四年，在福州），一位很好的數學老師趙省身在幾何課上講到以黃金比例作圖的矩形時，只提了一句，說這是「最美的矩形」。這句話一直銘記於我的心中。我真的拿起筆及直尺來，畫出黃金矩形。可是我嫌它太寬了一點，若能夠再窄一點就好看了。也許我覺得自己的審美觀點不夠格，便沒有再繼續下去，也不敢向「權威」挑戰。一般電影銀幕的長寬比是1.66:1。所謂35mm相機的底片長寬比是1.46:1，在美國沖洗出來的典型相片尺寸（以英寸計，1英寸=2.54公分）則分成：5×3、6×4、7×5、10×8、14×11，長寬比各為：1.67、1.5、1.4、1.25、1.27；沒有一個是黃金比例（5×3的較接近，可是有人嫌太小了一點）。傳統電視螢幕的長寬比是4:3，即1.33。有人告訴我，這樣的長寬比會使人看上去要胖些（對性感美麗的女明星來說，這當然是壞消息）。HDTV則是16:9 = 1.78:1，比黃金比例又要大上不少。現在美國用的紙張（8.5×11.5英寸）的長寬比是1.35，而台灣用的A4紙是1.39，都和黃金比例1.618……差上一大截。最接近黃金比例的是美國稱為「法律文件紙」的尺寸，8.5×14英寸，長寬比為1.65，較接近黃金比例，可是一般人都嫌太長。因此從實用面來說，「最美的（黃金）矩形」似乎毫無用武之地。這不禁讓人懷疑，黃金比例是否真的那麼美。如果是，為什麼不用。因此，我很

高興，在這本專論黃金比例的書中，作者並沒有吹捧黃金比例，把它看成是「美的至高規範」。按本書所說，心理學研究似乎也決定不出什麼是最美的矩形規範。

本書讓我印象最深刻的是，作者不厭其煩地做了許多搜索及考證的工作，證明在古代的偉大建築（如古埃及金字塔和雅典帕特農神廟）、藝術及音樂中都沒有用到黃金比例。倒不如說，因為（第六章）一位中古時代的修士作家帕西歐里寫了一本《神的比例》，使受了基督教教義薰陶將近兩千年的歐洲人一聽到「神」就「生畏」，而有意識或下意識地認為，既然黃金比例是神的比例，一定神聖不可侵犯。直到現在，如本書所說，有許多黃金比例迷不惜篡改藝術史，以期可以把「神的比例」安在不應當安上的地方。可是，似乎只有少數幾位藝術家真正地用到黃金比例，如第一章所提到的達利名畫《最後的晚餐聖餐》。後來有些法國藝術展甚至抬出了「黃金」的大名，但只是用這名詞來做招牌而已。實質上，和黃金比例並沒有什麼關係。

我們如果能平心靜氣來想一下，會發現絕對的「美的規範」實在是個太籠統的觀念。舉例來說，究竟有沒有一個關於「美麗的女人」的絕對規範？如果你到藝術博物館走一趟，會看到每一個時代都有其獨特的美的規範。若以現代的標準來看，中國歷史上公認的絕色美女楊貴妃，應當上瘦身減肥課程，好好地減去十幾磅，才合乎當代對於美女的要求之一。要說文學（或藝術）有一個絕對的美的規範，那就更可笑了。因為流於形式化的文章，倒頭來都會變得千篇一律，毫無創意活力可言。如果把黃金比例硬放進繪畫中，最後也會流於形式化，像是一個模子刻出來的。西洋畫家自文藝復興時期以來，畫風不知道改變了多少。最初把希臘神話的題材用盡



後，就開始畫風景、畫災禍，並發展出光與影的技術，再下去是印象派、後期印象派等等；音樂亦然。巴哈建立了音樂的和音風格；海頓則創始了交響樂；莫札特則以他的天賦奇才，集自巴哈以來的音樂形式於大成；到了貝多芬又更進一步開拓出新的音樂風格，跳脫古典音樂的傳統，走出一條新的方向，加上他獨特的音樂旋律及音樂總體之美，難怪博得「樂聖」之名。從這些看來，藝術不在於模仿，而在於創意。在這種前提下，硬要把黃金比例放進去，幾乎是不可能的事。關於上述種種作者做了詳盡而徹底的分析，證明黃金比例並未如黃金比例迷所想像的在藝術創作中佔有如此顯著的地位。黃金比例的地位乃是上面所說過的，在最意想不到的自然現象及數學中出現，而把一大堆表面上看來風馬牛不相及的事物或學門，聯繫在一起。

我們所知道的數學是否萬能？

現在我要談一下作者在最後一章提出的，數學是否萬能，或者是否有數學之外的其他方法可以瞭解大自然？他提到了渥夫蘭（Stephen Wolfram）的書，《一種新科學》（*A New Kind of Science*）。這本書長達一千二百頁，以通俗的口吻，逐步解釋相當深奧的數學，如碎形幾何、計算式複雜理論、非線形動力學，還有奈米技術，以及最新的所謂「細胞自動機」（cellular automata）的應用等等。我在此先把這本書的內容及數學是否萬能的問題簡述一下。

先說數學萬能的問題。一九七〇年代，當美國航太總署（NASA）把太空人送到月球來回數次，都沒有出大漏子後，科技人員當然得意萬分。可是卻也引來幾位電視脫口秀主持人的嘲諷戲

謔，其中一位說得很妙：「他們可以把一批笨蛋（按：太空人只做些簡單的操作工作，火箭怎樣飛離地球到月球，都是由上萬的地勤人員在管理）送到月球上去，再把他們接回來，可是他們（指高科技）卻沒有辦法解決我們的交通問題。今天我開車來這裡，花了三小時才走了十英里。」到了一九八〇年代末，當NASA把旅行者號（Voyager I及II）成功送到各行星，逐一探測，直到最遠的海王星，NASA公關組發出新聞稿說，這代表的是航太科學技術的巨大成功，能越過近乎一百億公里的行星際空間的旅程，非但準時到達（只差幾分鐘），而且離目標點只差五十公里。但在不久之後，不計其數的人造衛星氣象報告卻不能預測某個暴風雪的光臨，而造成交通阻塞、停電等等。這些巨大的成功、失敗，和無法解決的問題都歸屬於科技的萬能，以及科技的無能。這是怎麼一回事？

實際上，去月球的科技雖然非常複雜，費用非常昂貴，可是用到的科學理論卻非常簡單，簡單到牛頓都知道怎樣去做，問題是那個時候沒有火箭、沒有能在太空生存的知識，以及其他所需的科技等等。因此要把這件事留到二十世紀，當科技發達到能造出這樣的火箭時，才能做到。至於驚人的旅行者號的準確性問題，看起來非常驚人，可是這又是牛頓力學的另一應用。只要把旅行者號送出去，就可以應用種種科技方法量出軌道。下一步就是利用牛頓力學去計算應當如何改變軌道、如何利用行星的引力把它加速以到達下一個行星等等。驚人的是造出它及控制它的科技，而不是軌道的科學，因為早在牛頓時代這些就已經做好了，現在不過是在應用而已。因此，從科學眼光來看，把旅行者送到海王星去，只是精確度的問題，現有的科技已經可以做到。非但如此，利用旅行者號的科技再加上現成的科技，我們已經有能力把太空船送到鄰近星系去。



唯一的問題就是需要數千年的時間，因此這問題牽涉到的是，人類有沒有這個意願去做（這種工作相當於在漢朝開始一件工程，到現在才有一半的成果，要再等數千年的時間才能看到整個成果。我想以目前的人類意識來看，沒有一個國家願意耗資去做這種事）。

上面所說的還僅是人為因素使數學無能的問題而已。現在要談到數學本身的無能為力的問題。氣候是一個最佳的例子，可是還有一個較不為人所知的例子，更為簡單易懂。這和我上面說的行星軌道問題的精確度有關。我說過，行星（或任何在重力場中運動的物體）的軌道可以計算到非常精確。可是，不是所有的情形都這樣。我在第九章的注裡提到，十九世紀的拉普拉斯研究過太陽系的穩定度問題。這問題一直有人在研究。在二十世紀初，有一個尚未完全解決的力學問題，即三體問題，也就是三個質量（如太陽、地球和月球）在重力的交互作用下的軌道問題。從實用觀點來說，有了電腦的輔助，這個問題已經變得不重要（雖然在理論方面還是很重要）。可是在二十世紀末的時候，天文學家發現了一個行星軌道理論的真正危機。這就是冥王星的軌道問題。

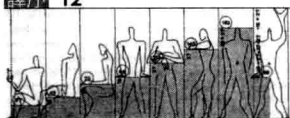
天文學家無法計算出冥王星未來的軌道。它處於一種和海王星「共振」的處境中，二者之間的距離不能小於十七個天文單位（一天文單位等於地球到太陽的平均距離，約一·四九億公里）。也許因為這理由，要去定出它的未來軌道，需要有許多小數點的高度精確觀測——高到無法做到。甚至於，這麼多的小數點是否有物理（即實際）上的意義，還成問題（例如，如果要二十位小數的準確度，就等於說要把冥王星的距離測量到一個分子大小的準確度，當然這是沒有意義的數字）。截至目前為止，還沒有方法去解決這個問題，至少在牛頓力學的範疇中不能。這不是說需要廣義相對論，

不如說，牛頓的力學與其所本的數學在這方面無能為力。數學上的說法是，牛頓力學的數學系統有不穩定性，可是數學系統呈不穩定性，不見得就可以說實際的系統不呈穩定性。推測起來，冥王星大約和太陽系同時於四十五億年前形成，之後大約就在現在的軌道繞太陽轉。無論牛頓力學的方程式說它有不穩定性，它仍舊繞著太陽在那裡轉（冥王星的例子是特例，其他行星的軌道並沒有這個問題）。在這裡，我們看到了數學無能為力的第一瞥。

可是這僅是冰山的一角而已。現在要談氣候問題了。要決定全球性氣候，我們可以把方程式寫出——如果要寫盡，恐怕有上千個方程式，因為包括了種種的化學反應，如光合作用、空氣中的分子之間的化學反應等等。理論上，只要把這些方程組解出來，就可以預測氣候。可是不需要把所有方程式都寫出來，我們也可以看出這是毫無希望的工作。即使是最簡單的方程式，也會遇到和上面所說的冥王星一樣的問題——要去預測三十天的氣候，必須輸入相當準確的數據——高到甚至於一隻蝴蝶在巴西揮動一下翅膀，兩個月後在中國的青海省就會出現一場風暴。這當然不對，因此這套方程組所代表的是一個有限意義的理論，不能推得太遠去。這種現象並非氣候方程式獨有，在許多複雜的方程組中都可以看見。混沌理論即研究這種現象。這理論開始於，有些數學系統對於初始條件非常敏感，小小的改變就能引發嚴重的後果。換言之，如果初始條件中有些細節不夠確實，就不可能決定這些系統的行為。

一種新科學

到底這些不穩定性是否代表數學的能力的極限，抑或是我們還沒有把我們所知的數學發展到極致？還是我們所知的數學在這些



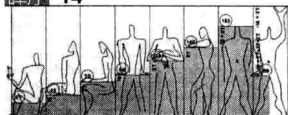
方面無能為力，而有其他新科學出現（換言之，是否在數學之外還有其他科學可以解釋自然界的現象？）它們的形成不是建立在我們熟悉的數學觀念（如數字、微分、積分等）上？這就是作者在第九章中所要探討到的哲學問題，也是作者（及其他許多人）為何會對渥夫蘭提出的「新科學」深感興趣的原因。渥夫蘭用的是一種稱為「細胞自動機」（cellular automata）的電腦運算程式。這種自動機是根據英國數學家涂林（Arthur Mathison Turing, 1912-1954）於一九三六年提出的涂林機而來。渥夫蘭的自動機只用到一個位元（bit）。看起來，好像沒有什麼可做的，因為一個位元只能有兩個值，1或0。可是，不然。我們可以把一個自動機視為是一套記憶位置，而每一個位置只有一個位元。這些位元會在每一個時間步中更改它的值，不過要看它自己及附近的位值而定（參見第八章對碎形的討論）。在渥夫蘭精心鑽研的自動機類型中，所有的位值都安排在一條直線上（一維），每一次更改位值時，所有位值的新值都依賴它現在的位值及鄰近兩個（一左一右）的位值。總計共有二五六種這樣的自動機。渥夫蘭利用電腦的模擬功能有系統地去研究這二五六種自動機，並將結果寫在《一種新科學》中。

其中渥夫蘭最專注在第一一〇號自動機。一九九四年，馬修·庫克（Matthews Cook）證明了，這個一維自動機相當於一個萬能計算機。它可以做出任何涂林機可以做出的計算。它也是這類自動機中最簡單的一種。這個自動機可以產生混沌現象（見第九章）。只要改變它的一個參數，大體說來，就可以從一重複性行為轉換到完全混沌（無序）的行為。

渥夫蘭在書中證明，有些用傳統方法無法處理的問題的重要本質，可以相當程度的為電腦運算程式所捕獲。其中一個是不可逆

的觀念。通常物理的過程都是可逆的，即把時間倒流；如果不改變任何因子，就可以回到過去（一般說來，複雜的系統不是不可逆，而是可逆的機率太小。如一瓶香水蒸發，理論上蒸發出去的香水會自動回瓶，可是機率太小，小到一般說來，可以視為是不可逆）。例如，把地球繞日的方向逆轉，地球會再沿著以前轉過的地方——走過。可是，渥夫蘭卻發現了絕對不可逆的細胞自動機。有些自動機是可逆的，如第五十一號，可是第二五四號卻不可逆。在物理中，要證明不可逆性，必須引用機率，證明可逆的機率太小，這就是熱力學第二定律的真諦。可是在細胞自動機中，就是不行。渥夫蘭花了一段很長的篇幅去解釋不可逆性和熱力學第二定律，和細胞自動機的模擬。然後接著討論在連續體（如流體）中守恆的量、空間的屬性、時間和空間的關係，以及時間和因果關係的網絡等等，都從細胞自動機著手。他因此認為這是一個可以去追求的方向——以電腦程式來代替數學在物理上的應用。

我覺得這是一種新的思維。如果數學可以預測全面，那麼把地球繞日的微分方程組解了，理論上可以預測到地球在無窮的未來的位置。可是，大自然似乎不是這麼進行的，毋寧說像我們教小孩走路時，「走一步，看一下，再走下一步」。以冥王星為例，它不知道自己在多少年後要走到哪裡去；而它的運動只把它帶到下一點，然後再由下一點的輸入（在這情形下，為引力）決定它的去向。這和我們在街上走路時，絕對不會一成不變地，看也不看地向前開步走。我們看到的其他行人、行動中的汽車和障礙等等，決定了我們下一步往哪裡去。由此來看，冥王星和我們都是一種自動機。當然，我們這類的「自動機」要比渥夫蘭講的一維自動機複雜多了。



當然不能說渥夫蘭已經把問題解決了，甚至於也不能說在三維（或加上時間成為四維）空間中他的結論是正確的。雖然許多書中的構想並非他首創，可是他的想法卻很新穎。平心而論，他也許是第一位敢站出來，向截至目前為止所公認的數學至高權威性挑戰的人。他有可能對，也有可能錯。但無論如何，科學的歷史一次又一次地告訴我們，如果沒有人敢大無畏地向既成的學術思想或理論挑戰，就不會產生一次又一次的重大科學突破，朝無垠的科學新疆界前進。

目錄 黃金比例

出版緣起 2

譯序 從數學到藝術， 及我們所知的數學是否萬能？ 4

第一章 數字的前奏曲 數不清是世界的奇蹟。——索福克里斯 18

第二章 和諧音與五角星形 我看到了宇宙中有一種秩序在，而數學是讓它現身的方法之一。 ——薩騰 32

第三章 在一個指向星星， 呈 Y 形的金字塔之下？ 以埃及人鋪造的金字塔為首；巴比倫的花園次之， 為了阿咪蒂斯王妃而造；下一個是愛與罪的莫所羅墓； 第四個，在以弗所的黛安娜女神廟；羅德斯島巨像，黃銅鑄成； 第六個，朱比得塑像，費底亞斯所造；人們說，埃及的法羅斯來得最晚， 或者是用黃金打造的西流士宮殿。——佚名 66

第四章 黃金比例方程式 幾何擁有兩件至寶：一件是畢達哥拉斯定理； 另一件是把線段做中末比分割。第一件足以和黃金媲美； 第二件我們或可稱之為珍貴的珠寶。——克卜勒 90