21世纪高等学校规划教材

微积分（经管类）

Weijifen

朱文莉 向开理 主编
李尚志 主审

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

微　积　分

（经管类）

主　编　朱文莉　向开理
副主编　代宏霞　方　敏
主　审　李尚志

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是根据教育部颁布的高等学校财经类专业核心课程"经济数学基础——微积分"教学大纲和数学与统计学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，结合编者长期在经济类高校担任"经济数学"课程教学和科研工作的经验而编写的，同时参考了近年来经济管理类硕士研究生入学统一考试数学考试大纲.

本书在内容取舍上尤其注重数学与经济学的有机结合，强调微积分的概念及有关原理在经济学中的应用，力图在保持传统教材优点的基础上，把微积分的基本原理和经济学的相关知识恰当结合，以便有利于课程的讲授与学习，让学生掌握一些常用的数学方法以及基本的经济分析方法，为后继课程提供必要的基础知识和基本技能的训练. 同时注意培养学生的数学意识和使用数学的能力.

全书共 10 章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程与差分方程.

本书可作为高等财经院校各专业、普通高等院校经管类专业的教学教材，也可作为对经管数学感兴趣的读者的自学教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分：经管类/朱文莉，向开理主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2012.3(2012.9 重印)
ISBN 978-7-5635-2926-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①朱… ②向… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 029623 号

书　　名	微积分(经管类)
主　　编	朱文莉　向开理
策 划 人	张保林
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	24.5
字　　数	535 千字
版　　次	2012 年 3 月第 1 版　2012 年 9 月第 3 次印刷

ISBN 978-7-5635-2926-1　　定价：42.00 元

如有质量问题请与发行部联系

经 管 数 学 系 列 精 品 教 材

编 委 会

前　言

微积分是财经类院校各专业的一门理论基础课，它处于基础地位，起着奠基的作用．而微积分学方法在经济分析中的应用可以让经济管理类专业学生初步认识和掌握一些基本的数量经济分析方法，这对于学生进一步的数量经济方面后续课程的学习具有重大意义．

本书是根据教育部颁布的高等学校财经类专业核心课程“经济数学基础——微积分”教学大纲和数学与统计学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，同时参考了近年来经济管理类硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，由具有多年教学实践经验的教师编写而成．

本书在内容取舍上尤其注重数学与经济学的有机结合，强调微积分的概念及有关原理在经济学中的应用，力图在保持传统教材优点的基础上，把微积分的基本原理和经济学的相关知识恰当结合，以便有利于课程的讲授与学习，让学生掌握一些常用的数学方法以及基本的经济分析方法，为后继课程提供必要的基础知识和基本技能的训练．同时注意培养学生的数学意识和使用数学的能力．

本书配备习题的原则是由浅入深、层次分明、题型全面．旨在培养读者的理解能力和应用能力．为此，在每节后面，配有一定数量的习题；在每章后面还配有一定数量的综合习题，以供读者选用．书末给出了习题参考答案，供读者参考．另外，本教材配有《微积分学习指导》、电子课件，供教师教学与学生学习参考使用．

本教材的教学时数为 120 学时左右，打 * 号的内容要另加学时．作为基本教材，授课教师可根据授课专业及不同班级在内容上作适当的调整．比如 § 7.1 中关于空间曲面与方程的讲解，授课教师可略去证明，仅给出相关的结论即可．

本书由朱文莉、向开理主编，代宏霞、方敏为副主编，涂晓青、白淑敏、崔红卫、吴曦、李楠、张敏、苏远琳、金铭、张开敏、曾昭惠、秦冶、张杰、张紫莎、陈嘉璐、熊明辉等老师参与了部分编写工作．

北京航空航天大学的李尚志教授认真审阅了本书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢．

借本书出版之机，向关心和支持本书编写工作的西南财经大学经济数学学院领导和北京邮电大学出版社表示衷心的感谢！由于水平所限，书中有不妥或错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正．

编　者

2011 年 12 月 25 日于成都

目　　录

第1章 calculus

函　　数

微积分以函数作为主要的研究对象，即考察变量的变化规律及各变量之间的相互关系．本章将介绍函数、函数特性、基本初等函数、初等函数等概念．

§1.1　区间与邻域

一、区间

本书中所涉及的常用数集有自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$ 和实数集 $\mathbf{R}$．区间是微积分中用得较多的一类数集，包括有限区间和无限区间，其记号和定义如下：

(1) 开区间：$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开区间：$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$；

(4) 无限区间：$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$；　$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$；

$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$；　$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$；　$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$．

区间可以在数轴上表示出来，如图 1.1.1 所示．

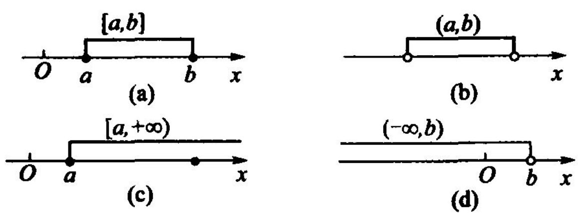

图 1.1.1

二、邻域

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，其中 $\delta>0$，数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为**该邻域的中心**，δ 称为**该邻域的半径**，在数轴上表示如图 1.1.2(a) 所示.

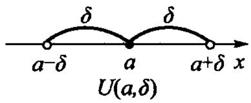

图 1.1.2(a)

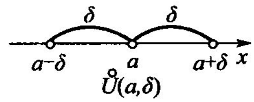

图 1.1.2(b)

从邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 而得的数集，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

如图 1.1.2(b) 所示.

有时把开区间 $(a-\delta,\delta)$ 称为 a 的左 δ 领域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 领域.

习题 1.1

1. 用区间表示下列点集.

(1) $\{x \mid x\neq 0\}$；　(2) $\{x \mid |x-4|<5\}$；　(3) $\{x \mid |x+1|>0\}$；　(4) $\{x \mid x^2+5x+6<0\}$.

2. 用区间表示下列不等式所表示的集合.

(1) $|x-5|<2$；　(2) $0<(x-2)^2<4$；　(3) $|x+3|>7$；　(4) $|2x+3|>|x-1|$.

3*. 设 (a,b) 是一个有限的开区间，证明：对任何 $x\in(a,b)$ 一定存在 x 的一个邻域 $\mathring{U}(x,\delta)\subset(a,b)$.

§1.2 函　　数

一、函数的定义

函数是描述变量间相互关系的一种数学模型.

例如，在匀速直线运动中，质点运动的路程 s 和它运动的时间 t 以及运动的速度 v 之间有如下的关系式

$$s=vt,$$

s,t 是两个变量，v 是常数，当变量 t 在一定范围内 $(t>0)$ 内任意取定一个数值 t_0 时，依据给定的关系，s 就有一个确定的值 $s_0=vt_0$ 与之对应.

定义 1.2.1　设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，对于 D 中的每个数 x，变量 y 依某一对应法则 f 都有唯一确定的实数与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

称 x 为**自变量**，称 y 为**因变量**(或 f 在 x 处的函数值)，称集合 D 为函数的**定义域**，记为 $D(f)$ 或 D_f.

当自变量 x 取遍 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

在平面直角坐标系下，点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图像. 函数 $y = f(x)$ 的图像一般为平面上的一条曲线.

函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相等的；否则就是两个不同的函数.

下面给出求函数定义域的一些原则：

(1) 偶次根式的函数，其根号下的值非负.

(2) 分式函数，分母的值不能为零.

(3) 有限个函数的四则运算得到的新的函数，其定义域为这有限个函数定义域的交集.

(4) 对数函数的真数值必须是正数.

(5) 对有实际背景的函数，应根据实际背景中的变量的实际意义确定.

例 1.2.1　求函数 $f(x) = \dfrac{\lg(3-x)}{\sin x} + \sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，必须有

$$\begin{cases} 3 - x > 0, \\ \sin x \neq 0, \\ 5 + 4x - x^2 \geqslant 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x < 3, \\ x \neq n\pi \quad (n \in \mathbf{Z}), \\ -1 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_f = \{x \mid -1 \leqslant x < 3, x \neq 0\} = [-1,0) \cup (0,3)$.

例 1.2.2　判断下列函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x) = |x|$，　　$\varphi(x) = \sqrt{x^2}$；

(2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$，　　$\varphi(x) = 1 - x$.

解　(1) 虽然这两个函数的表现形式不同，但它们的定义域均为$(+\infty, -\infty)$，它们在同一 x 处所对应的函数值相同，即它们的对应法则也相同，故是相同的函数.

(2) $f(x) = \sqrt{(1-x)^2} = |1-x|$，所以当 $x > 1$ 时，$f(x) \neq \varphi(x)$，即这两个函数的对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是不同的函数.

二、函数的表示法

函数的表示法主要有三种：**表格法**、**图像法**、**解析法**(公式法).

在用函数的解析法表示一个函数时，表示方式是不唯一的，例如函数 $y=\sqrt{x^2}$，它又可以表示为

$$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & x>0.\end{cases}$$

像上述这种用几个式子表示一个函数的情形时，这个函数称为**分段表示的函数**，简称**分段函数**. 因此，当我们说一个函数是分段函数时，是指这个函数的表达方式，而不是指函数的性质. 下面给出几个常用的分段函数.

例 1.2.3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，图形如图 1.2.1 所示.

例 1.2.4　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，图形如图 1.2.2 所示.

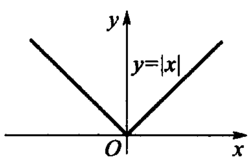

图 1.2.1

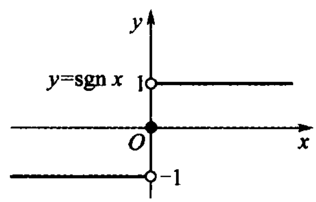

图 1.2.2

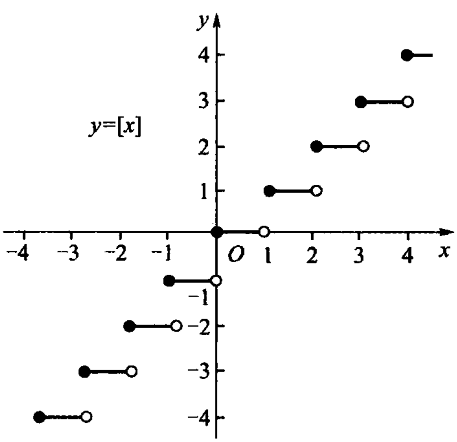

图 1.2.3

例 1.2.5　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 例如，$[5]=5$，$\left[\dfrac{2}{5}\right]=0$，$[-1.4]=-2$. 可见，$y=[x]$ 是 x 的一个函数，称为取整函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为整数集.

取整函数可用分段函数表示为

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

其图形如图 1.2.3 所示.

例 1.2.6　狄里克莱函数

$$y=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$.

三、函数的性质

1. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $X\subset D_f$，对于区间 X 的任意两个实数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**单调增加**；如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**单调减少**.

单调增加和单调减少函数统称为**单调函数**. 对有些非单调函数 $y=f(x)(x\in X)$，可以将集合 X 划分为若干个不重叠的子集，且函数在这些子集上是单调的；若这些子集是区间，则称为**单调区间**.

例如，$y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调的，但在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的；而 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

2. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $X\subset D_f$. 如果存在数 K_1，使对一切 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**.

如果存在 K_2，对一切 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**.

如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 即存在 K_1,K_2 对所有 $x\in X$，有

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1.$$

$f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是存在正数 M，使对一切 $x\in X$，有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 换句话说，对任何的正数 M，总存在 $x_0\in X$，使 $|f(x_0)|>M$.

例 1.2.7　判断 $f(x)=\sin x$ 的有界性.

解　因为在$(-\infty,+\infty)$上，有

$$|\sin x|\leqslant 1,$$

所以 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的.

例 1.2.8　判断 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$的有界性.

解　设 M 为任意的正数，令 $x_0=\dfrac{1}{1+M}$，则有

$$0<x_0<1 \quad 且 \quad f(x_0)=1+M>M.$$

即对任何的正数 M，总存在 $x_0\in X$，使得

$$|f(x_0)|=f(x_0)>M,$$

故 $f(x)$ 在$(0,1)$内无界.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于坐标原点对称. 若对于任意 $x \in D_f$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对任何 $x \in D_f$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1.2.4 所示；奇函数的图形关于坐标原点对称，如图 1.2.5 所示.

奇函数如果在 $x = 0$ 处有定义，则 $f(0) = 0$.

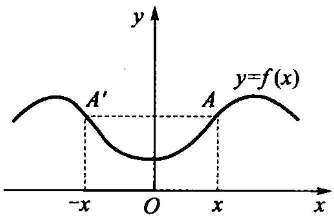

图 1.2.4

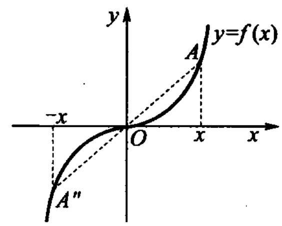

图 1.2.5

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f. 如果存在一个常数 $T > 0$，使得对任意 $x \in D_f$，有 $(x \pm T) \in D_f$，且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**. 如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 nT 也是 $f(x)$ 的周期(n 为正整数).

通常我们说的周期函数的周期是指**最小正周期**. 例如，$\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数. 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数不一定有最小正周期. 例如，常数函数和狄立克莱函数是周期函数，但没有最小正周期.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$；

(2) $y = \dfrac{1}{\ln(x-2)} + \sqrt{5-x}$；

(3) $y = \begin{cases} x, & x > 1, \\ 1-x, & |x| \leqslant 1; \end{cases}$

(4) $y = \sin\sqrt{x}$.

2. 下列各题中，函数是否相同？为什么？

(1) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x}$；

(2) $y = \sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y = \sqrt{2}\cos x$；

(3) $y = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $y = x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $y = 1$ 与 $y = \cos^2 x + \sin^2 x$.

3. 试求下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y = \dfrac{x}{1-x}$；

(2) $y = x + \ln x, x \in (0, +\infty)$.

4. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$;　(2) $y=1+\sin \pi x$;　(3) $y=x\sin^2 x$;　(4) $y=|\cos 3x|$.

5. 证明：$f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数.

§1.3　反函数与复合函数

一、反函数

函数关系的实质是描述变量之间的相互依赖的关系，但在研究过程中，哪个量是自变量，哪个量是因变量是由具体问题来决定的.

例如，设某种商品的单价为 P，销售量为 Q，则销售收入 R 表示为

$$R=PQ, \tag{1.3.1}$$

这里 Q 是自变量，R 为因变量(函数).

若已知销售收入 R，反过来求销售量 Q，则有

$$Q=\frac{R}{P} \tag{1.3.2}$$

这里 R 是自变量，Q 是因变量(函数).

式(1.3.1)和式(1.3.2)是同一关系的两种写法，但从函数的观点来看，由于对应法则不同，它们是不同的函数，称它们互为反函数.

定义 1.3.1　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，若对于值域 R_f 中的任意数值 y，经 f 返回定义域 D_f 中有唯一的数值 x 与之相对应，则该对应关系所确定的新函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=\varphi(y)$(或 $x=f^{-1}(y)$).

习惯上，我们常把 x 作为自变量，y 作为因变量，因此我们常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$.

定理 1.3.1(反函数存在定理)　若函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上单增(或单减)，则其反函数存在，且反函数与函数具有相同的单调性.

证明从略.

函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，在同一直角坐标系中，关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1.3.1 所示.

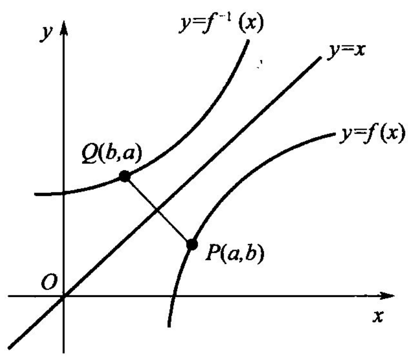

图 1.3.1

例 1.3.1　求 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解　由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$，即反函数为 $y=x^3-1$.

二、复合函数

定义 1.3.2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，且其值域 $R_\varphi \subset D_f$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，称 u 为中间变量.

函数 f 和函数 φ 能够构成复合函数的条件是：函数 φ 的值域 R_φ 必须含在函数 f 的定义域 D_f 内，即 $R_\varphi \subset D_f$；否则不能构成复合函数. 例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $D_f=[-1,1]$，$u=\varphi(x)=x^2+2$ 的值域 $R_\varphi=[2,+\infty)$，显然 $R_\varphi \not\subset D_f$，故函数 f 和函数 φ 不能复合.

例 1.3.2 已知函数 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

解 两函数的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，$f(x)=x^2$ 的值域为 $[0,+\infty)$，$\varphi(x)=\mathrm{e}^x$ 的值域为 $(0,+\infty)$，两个函数的值域都是 $(-\infty,+\infty)$ 的子集，可以进行复合运算. 则

$$f[\varphi(x)]=(\mathrm{e}^x)^2=\mathrm{e}^{2x},\quad \varphi[f(x)]=\mathrm{e}^{x^2}.$$

例 1.3.3 试说明函数 $\sqrt{\arctan(\sin \mathrm{e}^{3x})}$ 是由哪些函数复合而成的.

解 所给函数是由

$$y=\sqrt{u},\quad u=\arctan t,\quad t=\sin v,\quad v=\mathrm{e}^s,\quad s=3x$$

复合而成的.

例 1.3.4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 将 $f(x)$ 直接代入 $g(x)=\mathrm{e}^x$，有

$$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

将 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 直接代入 $f(x)$，有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1,\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1,\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1,\end{cases}$$

即

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

习题 1.3

1. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.