理论力学例题集

第一册

前　　言

本书系译自日本《数学演习讲座—9—力学》，有些地方经过译者改编。原书系日本京都大学教授、理学博士国井修二郎著，昭和37年东京共立出版社出版。译者曾部分引用这本书为国营五一一厂工学院的补充教材，由于是结合教学进度编译的，所以编译的次序与原书章次不同，这里的第一部分“质点静力学”承丘侃教授校阅指正；第二部分“刚体静力学”承梁治明教授校阅指正；第三部分“功和能”、第四部分“刚体的平面运动”承胡乾善教授校阅指正，谨在此表示深切的感谢。限于译者水平，书中不可避免地存在不少缺点以至错误，诚恳地希望同志们批评指正。

编译者

80.6.10

翻　印　说　明

这本《理论力学例题集》的每一部分先由国营五一一厂工学院印成单行本，我们教研组成立后又由我们教研组与五一一厂工学院合印成单行本，于七八—七九年间先后在本市各职工高等院校、普通高等院校以及三机部所属各工学院作为教学参考书交流。现因外地兄弟院校建议扩大交流范围，故将其集中翻印在本省各兄弟院校交流。

南京市职工高等院校力学教研组

一九八〇年六月

理论力学例题集

第一部分　质点静力学

这一部份由丘　侃教授校订

纲　要

§1—1　平衡条件

一个质点同时受到许多力 $\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$……$\vec{F}_n$ 的作用，而其运动状态没有改变，则称该质点在许多力的作用下处于平衡。

使质点在诸力作用下处于平衡的必要和充分条件是：

$$\vec{F}=\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_j=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots\cdots+\vec{F}_n=0 \qquad (1—1)$$

上式中 $\vec{F}$ 表示力系 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$……$\vec{F}_n$ 的合力

从几何意义说，将表示诸力大小和方向的矢顺序相连，则所成的力多边形必须闭合。

将（1—1）式中的各个力都向直角坐标轴投影，得：

$$\left.\begin{aligned}
F_x&=\sum_{j=1}^{n}F_{jx}= \qquad\qquad =0\\
F_y&=\sum_{j=1}^{n}F_{jy}=F_{1y}+F_{2y}+\cdots\cdots+F_{ny}=0\\
F_z&=\sum_{j=1}^{n}F_{jz}=F_{1z}+F_{2z}+\cdots\cdots+F_{nz}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (1-2)$$

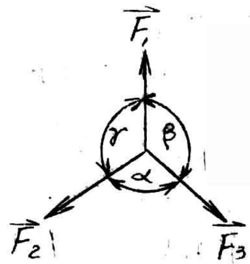
如果诸力的作用线都在同一平面内，则可选取该平面为 xy 面，于是平衡方程为：

$$\left.\begin{aligned} F_{1x}+F_{2x}+\cdots\cdots+F_{nx}=0 \\ F_{1y}+F_{2y}+\cdots\cdots+F_{ny}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1-3)$$

特例——三力平衡条件：设质点受三个共面力$\vec{F_1}$，$\vec{F_2}$及$\vec{F_3}$作用而处于平衡，则三力的大小有关系式：

$$\frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}=\frac{F_3}{\sin\gamma} \qquad (1-4)$$

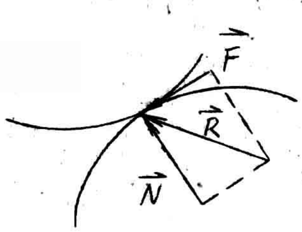
这叫做拉密（Lami）定理。这里的α、β、γ分别为每两力的夹角，如图示。



§1—2 摩擦

当二物体互相接触时，一物体在接触面上受到另一物体给它的反力$\vec{R}$（又叫全反力——译者注）可分解为垂直于接触面的分力$\vec{N}$和沿接触面的分力$\vec{F}$，如图示，

$\vec{N}$叫做法向反力（或垂直反力）$\vec{F}$叫做摩擦力



关于摩擦的Coulomb定律

(1). 关于摩擦力方向的定律：当质点在物体表面上静止时，质点

所受物体表面给它的摩擦力的方向和没有这个摩擦力时质点可能滑动的方向相反。又当质点在物体表面上滑动时，质点所受物体表面给它的摩擦力的方向和滑动的方向相反。前者叫做静摩擦力，后者叫做滑动摩擦力。

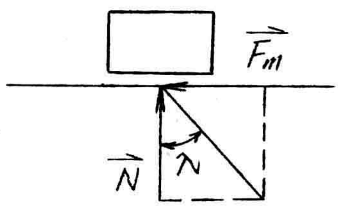
(2). 关于静摩擦力的定律：当质点在物体表面上将要开始滑动时的平衡状态叫做极限平衡状态，这时的摩擦力叫做极限摩擦力。极限摩擦力 $\vec{F}_m$ 的大小和这时的法向反力 $\vec{N}$ 的大小成正比。

即有关系式 $F_m = \mu N$ (1—5)

其中比例常数 μ 叫做静摩擦系数，其值由互相接触的两物体的表面性质所决定，而和接触面的大小无关。还有

$$\mu = F_m/N = tg\lambda \qquad (1-6)$$

这里的 λ 叫做摩擦角，又叫做静止角，如图示：



当未达到极限平衡状态时，质点所受的静摩擦力 $\vec{F}$ 与法向反力 $\vec{N}$ 间有如下关系式

$$\frac{F}{N} \le \mu \qquad \therefore F \le \mu N \qquad (1-7)$$

(3). 关于滑动摩擦力的定律：当质点在物体表面上滑动时，所受滑动摩擦力 $\vec{F}$，法向反力 $\vec{N}$ 间有如下关系式：

$$F = KN$$

式中比例常数K叫做滑动摩擦系数，其值视互相接触的两物体的表面性质而定，而与滑动速度的大小以及接触面面积的大小无关。根据实验获知，同样两物体间的K值比μ值要略小一些。但在力学计算中除特殊情况外，一般认为$K=\mu$。

§1—3 虚功原理：

质点平衡的必要和充分条件是：任意给质点一个假想的位移（虚位移）时，作用在质点上所有各力作功（虚功）的总和应等于零。这叫做质点的虚功原理。

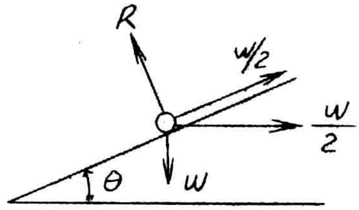
还有，可以在光滑的曲面或曲线约束上有滑动趋势的质点平衡的必要和充分条件是，使质点在不脱离约束的范围内有一个虚位移时，作用在质点上各力所作的虚功之和应等于零，这同样叫做虚功原理。

§1—4 达朗贝尔（D'Alembert）原理

在质量为m的质点上，除了作用有产生加速度$\vec{a}$的实际力$\vec{F}$之外，若再假想的虚加一个力$(-m\vec{a})$，则该质点当处于平衡状态，这个原理称为达朗贝尔原理。应用这个原理，可将质点的动力学问题转化为平衡问题来处理。使质点实际产生加速度$\vec{a}$的力$\vec{F}$，称为加速力或有效力；并未实际作用在质点上，为了应用达朗贝尔原理来研究质点动平衡问题而虚加于质点上的力$(-m\vec{a})$，称为非有效力或惯性反力，或简称为惯性力。

习 题 一

[1]. 在光滑斜面上放置一个重为W的质点，使其受到两个力的作用，一个力沿斜面而向上，另一个力沿水平而指向斜面内，两力的大小都等于$\frac{W}{2}$。设该质点处于平衡，试求这时的斜面倾角及反力。



[解] 设斜面的反力为$\vec{R}$，倾角为θ，对沿斜面方向和垂直于斜面方向列平衡方程，得

$$\frac{W}{2}+\frac{W}{2}\cos\theta-W\sin\theta=0 \qquad (1)$$

及

$$R-\frac{W}{2}\sin\theta-W\cos\theta=0 \qquad (2)$$

从式(1)得三角方程式

$$1+\cos\theta=2\sin\theta$$

等号两边分别平方，化简后得

$$5\cos^2\theta+2\cos\theta-3=0$$

由此解得： $\cos\theta=\frac{3}{5}$，-1。

由于 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，故所求倾角为

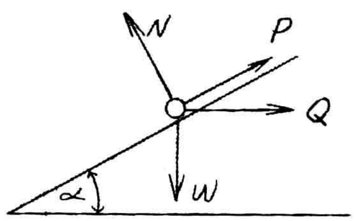
$$\theta=\cos^{-1}\frac{3}{5}$$

因此可知 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，代入式(2)，得

$$R=\frac{W}{2}\cdot\frac{4}{5}+W\frac{3}{5}=W.$$

[2] 设放在倾角为α的光滑斜面上的质点，受到沿斜面向上的力$\vec{P}$及水平方向的力$\vec{Q}$的作用而处于平衡。设当斜面倾角改为一半，$\vec{P}$及$\vec{Q}$的大小也改为$\frac{P}{2}$及$\frac{Q}{2}$时，使同一质点放在斜面上也能处于平衡，求P与Q之比。

[解] 设斜面的反力为N，沿水平及铅直方向列质点的平衡方程：



$$Q+P\cos\alpha-N\sin\alpha=0$$

$$N\cos\alpha+P\sin\alpha-W=0$$

从二式中消去N，得

$$P+Q\cos\alpha=W\sin\alpha \qquad (1)$$

在斜面倾角改为$\frac{\alpha}{2}$，两力的大小分别改为$\frac{P}{2}$及$\frac{Q}{2}$的情况下，同样列平衡方程，可得

$$\frac{1}{2}(P+Q\cos\frac{\alpha}{2})=W\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

将式（2）两边乘以$2\cos\frac{\alpha}{2}$，

$$(P+Q\cos\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}=W\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=W\sin\alpha$$

与式（1）对比有

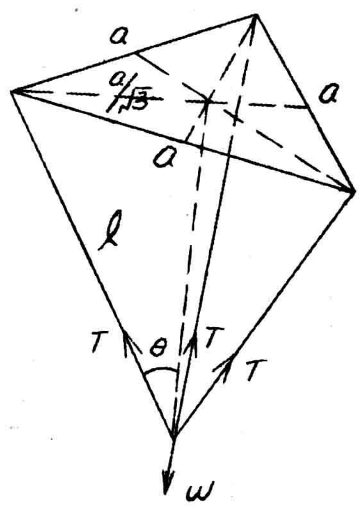
$$(P+Q\cos\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}=P+Q\cos\alpha=P+Q(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1)$$

$$\therefore\ \frac{P}{Q}=1+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{4}\ .$$

[3] 从天花板上一个边长为a的正三角形的各个顶点，悬三根长度皆为l的绳，将绳下端结在一起，吊一重量为W的锤，求各绳的拉力。

[解] 设绳与通过锤的铅直线的夹角为θ，由铅直方向的平衡条件得

$$W=3T\cos\theta \qquad (1)$$



这里T是每根绳的拉力，然而从几何关系考察，显然有

$$\cos\theta=\sqrt{l^2-\frac{a^2}{3}}\Big/l=\sqrt{\frac{3l^2-a^2}{3l^2}},$$

将其代入式（1），则得

$$T=\frac{Wl}{\sqrt{3(3l^2-a^2)}}\ .$$

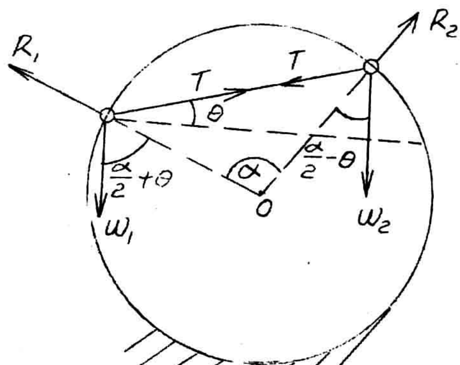
[编译者注] 原书将$\cos\theta$错为$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{3}}/l=a/\sqrt{3}l$，因而将$T$错成$T=Wl/\sqrt{3}a$，故予订正。

[4]、有一个用光滑金属丝做成的大圆圈被固定在铅直面内，另有两个重量分别为W_1及W_2的小环用绳连接起来套在圆圈上。设当小环处于平衡状态时，对圆圈中心所成的角为α，绳对水平线倾角为θ，试证：

$$tg\theta=\frac{W_2-W_1}{W_1+W_2}tg\frac{\alpha}{2}$$

[编译者注] 原书求证的关系式为$tg\theta=\frac{W_1-W_2}{W_1+W_2}tg\frac{\alpha}{2}$，经验证错了一个负号，故予订正。

[证] 设重量分别为W_1 W_2的小环所受的圆圈反力分别为$\vec{R}_1$及$\vec{R}_2$，绳的拉力为T，按题意，两小环的平衡方程分别为



$$\begin{cases}T\sin\theta+R_1\cos(\theta+\frac{\alpha}{2})-W_1=0\ ,\\ T\cos\theta-R_1\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})=0\ ;\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}T\cos\theta-R_2\sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)=0\ ,\\ T\sin\theta-R_2\cos(\frac{\alpha}{2}-\theta)+W_2=0\ .\end{cases}$$

从上列两方程组中分别消去R_1及R_2，得

$$tg(\frac{\alpha}{2}+\theta)=\frac{T\cos\theta}{W_1-T\sin\theta}\ ,$$

$$tg(\frac{\alpha}{2}-\theta)=\frac{T\cos\theta}{W_2+T\sin\theta}$$

再从上二式中消去T，就可得到求证的关系式。

[编译者注] ①推证过程：

由上二式可得

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)(W_1-T\sin\theta)=T\cos\theta,$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)(W_2+T\sin\theta)=T\cos\theta .$$

或

$$W_1\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)=T\cos\theta+T\sin\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right),$$

$$W_2\,tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)=T\cos\theta-T\sin\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right).$$

消去T，得

$$\frac{W_1\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)}{\cos\theta+\sin\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)}=\frac{W_2\,tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\cos\theta-\sin\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}$$

或

$$W_1\cos\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)-W_1\sin\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)$$

$$=W_2\cos\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+W_2\sin\theta\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right),$$

即

$$W_1\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)-W_2\,tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)=(W_1+W_2)\,tg\theta\cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)tg\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right).$$

$$\text{左边}=\frac{1}{\left(1-tg\frac{\alpha}{2}\,tg\theta\right)\left(1+tg\frac{\alpha}{2}\,tg\theta\right)}\Big[W_1\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\theta\right)\left(1+tg\frac{\alpha}{2}\,tg\theta\right)-$$

$$-W_2\left(tg\frac{\alpha}{2}-tg\theta\right)\left(1-tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\theta\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}\cdot tg^2\theta}\Big[W_1\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\theta+tg^2\frac{\alpha}{2}\,tg\theta+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg^2\theta\right)-$$

$$-W_2\left(tg\frac{\alpha}{2}-tg\theta-tg^2\frac{\alpha}{2}\,tg\theta+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg^2\theta\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}\,tg^2\theta}\Big[(W_1-W_2)\,tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg^2\theta+(W_1+W_2)\,tg^2\frac{\alpha}{2}\,tg\theta+$$

$$+(W_1+W_2)\,tg\theta+(W_1-W_2)\,tg\frac{\alpha}{2}\Big]$$

$$右边=\frac{1}{(1-tg\frac{\alpha}{2}tg\theta)(1+tg\frac{\alpha}{2}tg\theta)}(W_1+W_2)tg\theta[(tg\frac{\alpha}{2}+tg\theta)(tg\frac{\alpha}{2}-tg\theta)]$$

$$=\frac{1}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\theta}(W_1+W_2)tg\theta[tg^2\frac{\alpha}{2}-tg^2\theta]$$

$$=\frac{1}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\theta}[-(W_1+W_2)tg^3\theta+(W_1+W_2)tg^2\frac{\alpha}{2}tg\theta]。$$

左边=右边，有

$$(W_1+W_2)tg^3\theta+(W_1-W_2)tg\frac{\alpha}{2}tg^2\theta+(W_1+W_2)tg\theta+(W_1-W_2)tg\frac{\alpha}{2}=0$$

即 $$(W_1+W_2)(tg^2\theta+1)tg\theta+(W_1-W_2)(tg^2\theta+1)tg\frac{\alpha}{2}=0,$$

$$(tg^2\theta+1)[(W_1+W_2)tg\theta+(W_1-W_2)tg\frac{\alpha}{2}]=0.$$

舍去 $tg^2\theta+1=0$，得

$$tg\theta=-\frac{W_1-W_2}{W_1+W_2}tg\frac{\alpha}{2}=\frac{W_2-W_1}{W_1+W_2}tg\frac{\alpha}{2}.$$

② 本题也可以不照上面的解法，而用

[解法二] 将二个小环和连结它们的绳作为一个物系，该物系共受小环重力 $\vec{W_1}$、$\vec{W_2}$和圆圈的反力 $\vec{R_1}$、$\vec{R_2}$ 四个力的作用而处于平衡。由于小环与圆圈为光滑接触，所以 $\vec{R_1}$ 与 $\vec{R_2}$的作用线必沿圆圈的法线方向，也就是它们必汇交于圆圈的中心 O 点，如图示。

由对 O 点的力矩平衡条件可知

$$W_1 r\sin(\frac{\alpha}{2}+\theta)=W_2 r\sin(\frac{\alpha}{2}-\theta),\quad [r: 圆圈半径]$$

即 $$W_1 r(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta)$$

$$=W_2 r(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta),$$

或 $$(W_1-W_2)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta=-(W_1+W_2)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta,$$

$$\because\ tg\theta = \frac{W_1 - W_2}{-(W_1+W_2)} tg\frac{\alpha}{2} = \frac{W_2 - W_1}{W_1+W_2} tg\frac{\alpha}{2}.$$

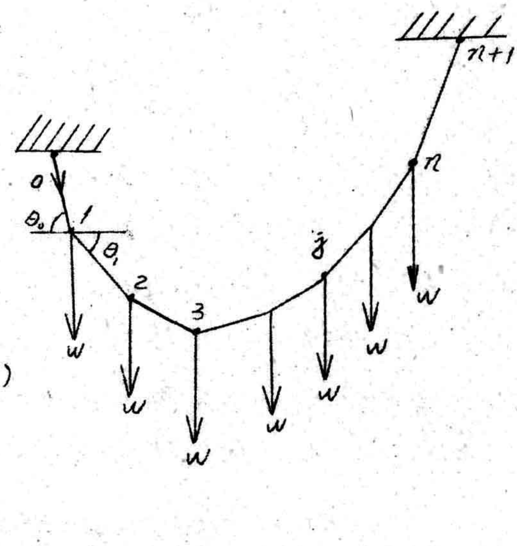
[讨论] 如果一定要按共点力系来解的话，可以看成$\vec{W_1}$与$\vec{W_2}$的合力与$\vec{R_1}$、$\vec{R_2}$三力处于平衡。三力平衡必汇交于一点，所以$\vec{W_1}$与$\vec{W_2}$的合力作用线必须通过$\vec{R_1}$与$\vec{R_2}$的作用线的交点O。W_1与W_2为铅直同向平行力，故其合力方向也必然铅直向下。由于两同向平行力的合力作用线到两分力作用线的距离，与两分力的大小成反比，也就是

$$r\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right) : r\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) = W_2 : W_1 ,$$

移项后和前面对O点力矩平衡方程一样。

[5] 在绳的几个地方结了重量相等的锤，将绳的两端固定，试证各段绳对水平面倾斜的正切成等差级数。

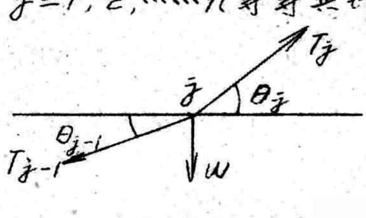
[证] 设绳上结了n个吊在下面重量为W的锤，由第j个锤所在的结点的平衡，沿铅直及水平方向列平衡方程得



$$\left.\begin{array}{l} T_j\sin\theta_j - T_{j-1}\sin\theta_{j-1} - W = 0 \\ T_j\sin\theta_j - T_{j-1}\cos\theta_{j-1} = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$(j = 1, 2, 3 \cdots\cdots n)$$

这里T_j是第j个锤和第$j+1$锤之间绳的拉力，θ_j是这个拉力与水平线所成的角，由于方程组(1)是由$j=1,2,\cdots\cdots n$等等共计$2n$个方程的组合，故



$$T_n\sin\theta_n = T_{n-1}\sin\theta_{n-1} + W$$

$$=T_{n-2}\sin\theta_{n-2}+2W$$

$$=\cdots\cdots=T_1\sin\theta_1+(n-1)W$$

$$=T_0\sin\theta_0+nW, \qquad (2)$$

$$T_n\cos\theta_n=T_{n-1}\cos\theta_{n-1}=\cdots\cdots=$$

$$=T_1\cos\theta_1$$

$$=T_0\cos\theta_0 \qquad (3)$$

将(2)、(3)式每节对应相除，有

$$tg\,\theta_n=tg\,\theta_{n-1}+\frac{W}{T_0\cos\theta_0}=tg\,\theta_{n-2}+\frac{2W}{T_0\cos\theta_0}=\cdots\cdots$$

$$=tg\,\theta_1+\frac{(n-1)W}{T_0\cos\theta_0}=tg\,\theta_0+\frac{nW}{T_0\cos\theta_0}$$

因此可知，$tg\theta_0$，$tg\theta_1$，$tg\theta_2$，……$tg\theta_n$ 是以 $\frac{W}{T_0\cos\theta_0}$ 为公差的等差级数。

[6] 放在粗糙斜面上重量为 5 kg 的物体，沿斜面最大倾斜线方向最小须加力 2 kg 才能使其支持在斜面上。又如用一绳绕过装在斜面顶点上的一个小滑轮，一端吊一个重 4 kg 的锤，另一端与该物体相连接，物体刚巧平衡。求斜面的倾角及摩擦系数。

[解] 设斜面的倾角为 α，斜面上的物体重 W，摩擦系数为 μ。考察垂直于斜面方向的平衡，斜面作用于物体的法向反力 $\vec{N}$，在物体将要向上滑动的极限平衡状态下，与物体将要向下滑动的极限平衡状态下完全等值，显然

$$N=W\cos\alpha \qquad (1)$$

设物体将下滑而处于极限平衡时，沿着斜面所受的力为 $\vec{P_1}$，将

上滑而处于极限平衡时，沿着斜面所受的力为 $\overrightarrow{P_2}$，则有

$$P_1+\mu N = W\sin\alpha \quad （摩擦力向上作用）\text{-------------} (2)$$

及

$$P_2-\mu N = W\sin\alpha \quad （摩擦力向下作用）\text{-------------} (3)$$

由于本题 $W=5kg$，$P_1=2kg$，$P_2=4kg$，将(2)、(3)两式两边相加，得

$$\sin\alpha=\frac{P_1+P_2}{2W}=\frac{3}{5}$$

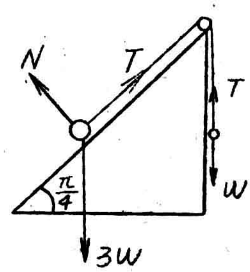
$$\therefore \cos\alpha=\frac{4}{5}$$

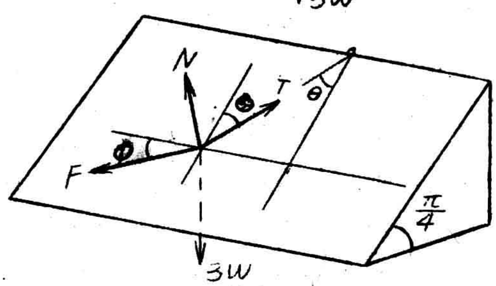
将此值代入式(1)，得 $N=4kg$。再将此值代入式(2)得

$$\mu=\frac{1}{4}$$

[7] 在摩擦系数为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，倾角为 $45°$ 的粗糙斜面的顶上装一光滑小滑轮，滑轮上挂一绳，绳的一端结一重 $3W$ 的物体，放在斜面上，另一端系一重 W 的锤，铅直下垂。问在维持平衡范围内，绳对斜面最大倾斜线的夹角为多大？

[解] 设斜面上物体处于将要滑动的极限平衡时，作用在绳上的拉力为 T，来自斜面的垂直反力为 N，摩擦力为 $F\ (=\frac{N}{\sqrt{3}})$，绳和斜面的最大倾斜线夹角为 θ，摩擦力与水平线夹角为 φ，由垂直于斜面方向的力的平衡条件，可得





$$N = 3W\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3W}{\sqrt{2}} \quad . \qquad (1)$$

再由沿斜面上最大倾斜线方向和水平线方向的平衡条件，并注意到 $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$，可得

$$\left.\begin{aligned} &T\cos\theta - \frac{N}{\sqrt{3}}\sin\phi - \frac{3W}{\sqrt{2}} = 0, \\ &T\sin\theta - \frac{N}{\sqrt{3}}\cos\phi = 0 \quad 。\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

又按题意，由锤的平衡，则有

$$T - W = 0 \qquad (3)$$

将式(1)及式(3)代入式(2)，得

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \sin\theta$$

及 $$\sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \cos\theta - \sqrt{3}$$

从上二式消去 φ，得

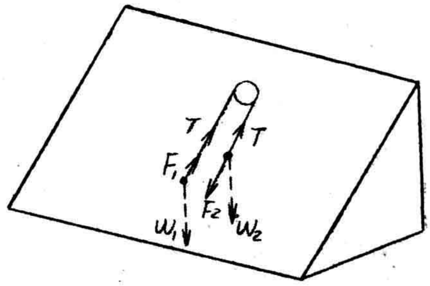
$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

[译者注] 原书式(2)左边第三项前为正号，经验证应为负号，故予订正。

[8] 在粗糙斜面上打进光滑的钉，钉上挂绳，绳的两端系以重易为 W_1 及 W_2 的两个锤。当它们在斜面上时，斜面的倾角渐次增大，求使锤保持平衡的最大倾角。设绳沿斜面的最大倾斜线方向。

[解] 设当锤 W_1 将要下滑，而 W_2 将向上滑的极限平衡状态时，斜



面的倾角为 θ，绳的拉力为 T，作用在锤 W_1 及 W_2 上的极限摩擦力分别为 F_1 及 F_2，沿最大倾斜线方向列平衡方程，得

$$\left.\begin{aligned} &T+F_1-W_1\sin\theta=0, \\ \text{及}\quad &T-F_2-W_2\sin\theta=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

设摩擦系数为 μ，则

$$\left.\begin{aligned} F_1&=\mu N_1=\mu W_1\cos\theta \\ F_2&=\mu N_2=\mu W_2\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

从式(2)代入式(1)的结果中消去 T，即得

$$tg\,\theta=\frac{W_1+W_2}{W_1-W_2}\mu$$

[9] 将光滑金属丝做成的半径为 a 的圆圈，固定在铅直面内，并将重 W 的小环套在圈上。在圆圈中心以上，高度为 C ($>a$) 处，设置小滑轮，上挂一绳，绳的一端系住小环，绳的他端吊一重 W' 的锤，使之平衡。求小环的平衡位置。

[解] 设小滑轮 A 对于小环的高度为 x，对于小锤的高度为 y，自小环向圆圈中心所矢的半径与铅垂线的夹角为 θ，绳的长度为 l。按虚功原理，有

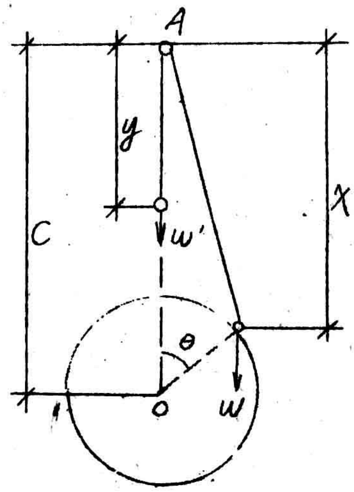
$$W\delta x+W'\delta y=0 \tag{1}$$

从几何关系，有

$$x=C-a\cos\theta$$

$$\therefore\ \delta x=a\sin\theta\,\delta\theta \tag{2}$$

又
$$y=l-\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\theta}.$$



$$\therefore\ \delta y=\frac{-ac\sin\theta\delta\theta}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\theta}}\qquad(3)$$

将式（2）及式（3）代入式（1），得

$$\left\{w\sin\theta-\frac{w'c\sin\theta}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\theta}}\right\}a\delta\theta=0$$

$\delta\theta$ 值对上式成立无关，故

$$\sin\theta\left\{w-\frac{w'c}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\theta}}\right\}=0,$$

$$\therefore\ \sin\theta=0,\quad 2ac\cos\theta=a^2+c^2\left(1-\frac{w'^2}{w^2}\right)。$$

由此可得

$$\theta=0,\pi,\cos^{-1}\left\{\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{c}{2a}\cdot\frac{w'^2}{w^2}\right\}$$

要使这里的第三种情况成为可能，必需

$$-1<\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{c}{2a}\cdot\frac{w'^2}{w^2}<1\ .$$

由这个不等式可得

$$1+\frac{a}{c}>\frac{w'}{w}>1-\frac{a}{c}\ .$$

[10]　将重为 w 的物体，放在摩擦系数为 μ，倾角为 α 的粗糙斜面上，沿着斜面向它加一个逐渐增大的水平力。试求物体开始滑动时水平力的大小，和物体的运动方向。

[解]　考察物体将开始运动时的极限平衡状态。设这时加在物体上水平力的大小为 P，摩擦力的大小为 F，摩擦力方向与水平方向间的夹角为 ϕ。斜面法向反力的大小显然为 $w\cos\alpha$。水平