现代数学基础

28 次正常算子解析理论

■ 夏道行

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

28

次正常算子解析理论

Cizhengchang Suanzi Jiexi Lilun

■ 夏道行

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

次正常算子解析理论／夏道行著．—北京：高等教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-04-035738-7

Ⅰ.①次…　Ⅱ.①夏…　Ⅲ.①次正规算子-研究

Ⅳ.①O177.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第139423号

策划编辑　王丽萍　　责任编辑　李华英　　封面设计　张　楠　　版式设计　杜微言

责任校对　殷　然　　责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.75	版　　次	2012年7月第1版
字　　数	256千字	印　　次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　35738-00

序 言

关于正常算子的谱分析已在 20 世纪初叶建立起来. 1993 年 I. M. Gelfand 教授在 Vanderbilt 大学的 Shanks 讲座中说过如下的一段话: “在 1937—1940 年, 我想建立算子的无限维的、类似的 Jordan 分解，但未能成功，然而在这样的努力中，我建立起赋范环论。”

著者觉得在相当长的一段时期内, 去建立算子的无限维的、类似的 Jordan 分解可能仍是算子理论的中心问题之一.

在 20 世纪 60 年代左右, 出现了 De Brange 的理论, 关于压缩算子的 B. Sz. Nagy-B. Foçaş 模型和关于半正常算子或亚正常算子的奇异积分算子模型, 后者是由 T. Kato, J. D. Pincus, R. W. Carey-Pincus, P. S. Muhly 及著者等建立起来的, 在几年后 M. Martin-M. Putinar 建立起亚正常算子的二维奇异积分算子模型. 差不多同时, 出现了另一个重要的方向, 它就是 Pincus 的行列式公式, J. W. Helton-R. Howe 的迹公式和 Carey-Pincus 的迹公式. 所有这些, 影响并使著者得以建立起次正常算子的解析模型. 所谓次正常算子就是具有正常算子扩张的算子, 所以次正常算子就是最接近于正常算子的算子. 这个解析模型就是把次正常算子表示为它的正常扩张的预解集 (resolvent set) 上的向量值解析函数空间上乘以自变量的乘法算子.

在次正常算子解析模型理论中, 一个有效的工具是精刻函数 (mosaic). 所谓算子 A 的精刻函数是一种在与 A 的谱有关的集上定义的一种算子值函数. 它首先是由 Pincus, 而后由 Carey 引进的, 并且后来由 Carey-Pincus 对半正常算子情况以及由 Pincus – 夏对亚正常算子情况进行研究的. 但是这里对次正常算子所引进的精刻函数和对亚正常算子所引进的精刻函数是完全不同的, 虽然次

正常算子也是亚正常的. 著者对次正常算子引进的精刻函数是在算子的正常扩张的预解集上定义的幂等算子值解析函数. 然而这两种精刻函数有两点是相同的. 首先, 它们都是完全酉不变量; 其次, 它们的迹都是 Pincus 主函数 (principal function). 实际上, 较早 Carey-Pincus 发现次正常算子的 Pincus 主函数是整数值的. 这就给我们一个暗示, 理应找出一种精刻函数, 其值是幂等算子.

本专著的第 1 章包含解析模型的基本性质和精刻函数. 其次, 我们给出了由次正常算子及其共轭算子的函数组成的交换子的迹公式. 这种迹可由极小正常扩张的谱上的线积分来表达.

在第 2 章我们研究了具有限秩自交换子的次正常算子. 利用 Riemann 面上的机械求积区域 (quadrature domain), 著者给出了精刻函数的分解, 并且以此建立起具有限秩自交换子的次正常算子的共轭算子的无限维的对角化分解. 由此, 交换子的迹公式也可以用极小正常扩张的重复度来表达. 这些结果和 Carey-Pincus 的关于主流量 (principal current) 的重要工作有关.

在 1980—1989 年, 出现了 J. Conway, R. Curto 和 M. Putinar 关于次正常算子组的一些重要工作, 在这个环境下, 著者把有关次正常算子的解析模型和精刻函数推广到次正常算子组, 然而次正常算子组的精刻函数却是一组算子值函数. 著者以此建立了一些有关的算子恒等式. 运用精刻函数, 著者给出了一些关于极小正常扩张的预解式算子 (resolvent) 的乘积公式. 所有这些都在第 3 章中介绍. 在这一章中还把与次正常算子有关的交换子的迹公式推广到次正常算子组.

在第 4 章中, 我们研究了具有限秩自交换子的次正常算子组, 这包括 Pincus - 夏所得到的迹公式以及 Pincus 和郑德超的工作. 著者也研究了次正常算子组的共轭算子组的联合点谱. 这是关联于一类复一维的解析流形. 它也可以看成在 Riemann 面上机械求积区域的一种推广: 著者证明了在这种情况下 Pincus 主函数是次正常算子组的共轭算子组在联合点谱上的重复度函数.

在第 5 章中我们研究了更广一类的具有限秩自交换子的算子. 这包括了 Pincus、夏道行和夏经博的关于具一秩自交换子的亚正常算子的解析理论的一部分, M. Putinar 和 B. Gustafson 的关于机械求积区域的线性解析的一部分以及著者的关于具有限秩自交换子的算子的一部分结果. 这些结果都是用接近于前几章中关于次正常算子的概念和方法 (例如精刻函数等) 来表述的. 著者想借此说明前几章的想法和方法有可能加以推广而应用于更广泛的算子类.

根据 Conway 的想法, 把算子的解析模型和 Putinar 的算子的矩阵块表示法结合起来有可能解决次正常算子、亚正常算子或更广泛的算子类中更多的问题. 因此著者把 Putinar 的算子的矩阵块表示和交换算子组的矩阵块表示分别写进第 1 章和第 3 章中. 在这两章中的某些结果也初步显示出联合运用这两种方法

的某些效应.

写成本专著也是由于受到 D. Yakubovich, J. Gleason 和 C. R. Rosentrater 的一些文章的启发. 任何已经读过单变量复变函数论和正常算子谱分析 (可见于参考文献中所列的泛函分析书) 的读者可以阅读本书而无困难. 但是读者如需了解次正常算子理论的全貌, 除本书外还需读 J. Conway 的《次正常算子的理论》一书.

著者仅以此专著来纪念两位已故老师: 陈建功院士, 他曾指导著者研究经典数学解析, 特别是复变函数论; I. M. Gelfand 院士, 他曾指导著者研究泛函分析和数学物理.

夏道行

2011

目　录

第 1 章 次正常算子

1.1 次正常算子

在本专著中, 凡是 Hilbert 空间, 都是指在复数域 $\mathbb{C}$ 上的. 线性有界算子简称为算子.

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的所有算子组成的代数记为 $L(\mathscr{H})$. 所谓 Hilbert 空间上的正常算子是指满足条件 $NN^*=N^*N$ 的算子 N, 这里 N^* 是 N 的共轭算子. 设 N 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的正常算子, 设 $\sigma(N)$ 是 N 的谱. 设 $\mathscr{B}$ 是 $\sigma(N)$ 中一切 Borel 集所成的族, 而且记 $\mathscr{M}$ 为可测空间 $(\sigma(N),\mathscr{B})$. 如所周知, 必有 $\mathscr{M}$ 上的投影算子值的测度 $E(\cdot)$ 满足如下的条件:

(i) $E(\sigma(N))=I$ (恒等算子).

(ii) $(E(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(E(B_n)x,y)$, 这里 $x,y\in\mathscr{H},B_n\in\mathscr{B},n=1,2,\cdots$

而且当 $m\neq n$ 时 $B_m\bigcap B_n=\varnothing$ (空集). 使得

$$N=\int\lambda E(d\lambda).$$

这个测度空间 $(E(\cdot),\mathscr{B})$ 是 N 的**谱测度** (spectral measure).

设 S 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的算子, 如果存在 Hilbert 空间 $\mathscr{K}$, 使 $\mathscr{H}$ 成为 $\mathscr{K}$ 的子空间而且

$$Sx=Nx,\quad 对一切\ x\in\mathscr{H}\ 成立.$$

那么称 S 为**次正常**的 (subnormal). 这时 N 称作 S 的一个**正常扩张**, 而且 S 称为 N 的一个**收缩**. 如果不存在子空间 $\mathscr{H}_1\subset\mathscr{K}\ominus\mathscr{H}$ 满足条件 $\mathscr{H}_1\neq\{0\}$ 而且

$\mathscr{H}_1$ 约化 N, 那么 N 称作 S 的**极小正常扩张**, 简记成 **m.n.e.**

对任何向量集 $\mathscr{F}$, 记

$$\vee\mathscr{F} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : x_j \in \mathscr{F}, c_j \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \cdots \right\},$$

它是包含 $\mathscr{F}$ 的极小线性流形. 对于任何集 $\mathscr{F}$, 用 cl$\mathscr{F}$ 表示集 $\mathscr{F}$ 的包 (closure).

定理 1.1.1 设 S 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的次正常算子, 那么必有 S 在 $\mathscr{K} \supset \mathscr{H}$ 上的 m.n.e. N. 这种 m.n.e. N 在下述意义下是唯一的: 如果有 S 在 $\mathscr{K}_1 \supset \mathscr{H}$ 上的 m.n.e. N_1, 那么必有从 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{K}_1$ 上的酉算子 U 使得 $N_1 = UNU^{-1}$ 而且 $Ux = x$ 对一切 $x \in \mathscr{H}$ 成立.

证 设 N_0 是 S 在 $\mathscr{K}_0 \supset \mathscr{H}$ 上的正常扩张. 令

$$\mathscr{F} = \vee\{N_0^{*k}x, x \in \mathscr{H}, k = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

令 $\mathscr{K} = \mathrm{cl}\mathscr{F}$, 那么容易看出 $\mathscr{F}$ 对 N_0 和 N_0^* 都是不变的. 所以 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{K}_0$ 的子空间而且约化 N_0.

现在来证明 $N \overset{\text{定义}}{=\!=} N_0|_{\mathscr{K}}$ 是 S 的 m.n.e. 假设有一子空间 $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{K}$ 满足条件 $\mathscr{H}_1 \perp \mathscr{H}, \mathscr{H}_1$ 约化 N 而且 $\mathscr{H}_1 \neq \{0\}$. 取 $y \in \mathscr{H}_1, y \neq 0$, 那么

$$N^k y \perp x, \text{ 对一切 } x \in \mathscr{H} \text{ 成立}.$$

因此 $(y, N_0^{*k}x) = (y, N^{*k}x) = (N^k y, x) = 0$ 对一切 $x \in \mathscr{H}$ 成立. 这就是说 $y \perp N_0^{*k}x, x \in \mathscr{H}$. 所以 $y \perp \mathscr{K}$. 这就推出 $(y, y) = 0$, 从而导致矛盾. 所以 N_0 是 S 的一个 m.n.e.

现在假设有 S 的另一个在 $\mathscr{K}_1$ 上的 m.n.e. N_1, 那么由上面的证明可以看出

$$\mathscr{K}_1 = \mathrm{cl} \vee \{N_1^{*k}x : x \in \mathscr{H}, k = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

作一个映射 U 如下:

$$UN_0^{*k}x = N_1^{*k}x, \quad x \in \mathscr{H}.$$

由

$$(N_1^{*k}x, N_1^{*m}y) = (N_1^m x, N_1^k y) = (S^m x, S^m y)$$

和

$$(N_0^{*k}x, N_0^{*m}y) = (N_0^m x, N_0^k y) = (S^m x, S^m y),$$

对一切 $x, y \in \mathscr{H}$ 成立. 因此 U 可以延拓成由 $\vee\{N_0^{*k}x\}$ 到 $\vee\{N_1^{*k}x\}$ 的等矩算子 (isometry), 所以 U 可以延拓成酉算子而且

$$U\mathscr{K}_0 = \mathscr{K}_1, \quad N_1 = UN_0U^{-1}. \qquad \square$$

定理 1.1.2 如果 S 是 $\mathscr{H}$ 上的次正常算子且有 $\mathscr{K}$ 上的 m.n.e. N, 那么 $\sigma(N) \subset \sigma(S)$.

证 设 $z \in \rho(S)$, 令 $E(\cdot)$ 为 N 的谱测度. 定义

$$L = E(B(z, \varepsilon))\mathscr{K},$$

其中 $0 < \varepsilon < \|(S-z)^{-1}\|^{-1}$ 而且 $B(z,\varepsilon) = \{x : |x - z| < \varepsilon\} \subset \rho(S)$. 对于任一 $f \in L$, 我们有

$$\|(N-z)^{*k} f\| \leqslant \varepsilon^k \|f\|.$$

那么对任何 $h \in \mathscr{H}$ 就有

$$\begin{aligned} |(f,h)| &= |(f, (S-z)^k (S-z)^{-k} h)| = |(f, (N-z)^k (S-z)^{-k} h)| \\ &= |((N-z)^{*k} f, (S-z)^{-k} h)| \leqslant (\varepsilon \|(S-z)^{-1}\|)^k \|f\| \|h\|. \end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 我们得到 $f \perp h$. 这就是说 $L \perp \mathscr{H}$. 但是 L 约化 N 而且 N 是 S 的 m.n.e. 所以 $L = \{0\}$, 这就是说 $E(B(z,\varepsilon)) = 0$. 因此 $z \in \rho(N)$. □

1.2 纯算子的块矩阵分解

对于任何两个算子 A 和 B, 定义 $[A, B] = AB - BA$. 称它为算子 A 和 B 的**交换子**. 设 T 是 Hilbert 空间上的算子. 定义 T 的**自交换子**为

$$D_T = [T^*, T].$$

定义 $M_T = \mathrm{cl} D_T \mathscr{H}$, 称它为 T 的**缺陷空间**, 有时 M_T 也简记为 M. 定义

$$\mathscr{K}_T = \mathscr{H}_0 = \mathrm{cl} \bigvee_{k=0}^{\infty} T^{*k} M_T,$$

而且

$$G_n = \mathrm{cl} \bigvee_{k=0}^{n} T^k \mathscr{H}_0, \quad n \geqslant 0.$$

显然 $G_0 = \mathscr{H}_0$. 令 $G_\infty = \mathrm{cl} \bigvee\limits_{k=0}^{\infty} T^k \mathscr{H}_0$. 如果算子 T 没有约化它的而包含 M_T 的真 (proper) 子空间, 那么称算子 T 是**纯的** (pure) 或是说**完全非正常的** (completely non-normal).

命题 1.2.1 子空间 G_∞ 约化 T, $T|_{G_\infty}$ 是**纯算子**而且 T 在 $\mathscr{H} \ominus G_\infty$ 上的限制是正常的.

证 显然 $TG_\infty \subset G_\infty$. 由恒等式

$$T^*T^k = \sum_{j=0}^{k-1} T^j D_T T^{k-j-1} + T^k T^*, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{1.2.1}$$

我们得知

$$T^* G_n \subset G_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $T^*G_\infty \subset G_\infty$. 从而 G_∞ 约化 T.

如果 L 是 G_∞ 的任一子空间, 它包含 M_T 而且约化 T, 那么显然 $L \supset G_\infty$. 因而 $L = G_\infty$. 这就证明了 $T|_{G_\infty}$ 是纯的.

如果 $x \in \mathscr{H} \ominus G_\infty$, 那么 $[T^*, T]x \in \mathscr{H} \ominus G_\infty$. 但是 $[T^*, T]x \in G_\infty$, 这就是说 $[T^*, T]x = 0$. 从而证明了 $T|_{\mathscr{H} \ominus G_\infty}$ 是正常的. □

系 1.2.2 如果 $\mathscr{H}$ 上的算子 T 是纯的, 那么 $\mathscr{H} = G_\infty$, 反之亦然.

由于关于正常算子的谱分解已被充分地研究, 所以我们只研究纯算子. 此后, 总假设算子 T 是纯的. 定义

$$\mathscr{H}_n = G_n \ominus G_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

容易看出当 $n > 0$ 时 $\mathscr{H}_{n+1} \oplus \mathscr{H}_n = G_{n+1} \ominus G_{n-1}$. 我们要证明

$$T\mathscr{H}_n \subset \mathscr{H}_{n+1} \oplus \mathscr{H}_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.2.2}$$

显然当 $n = 0$ 时 (1.2.2) 成立. 此外

$$T\mathscr{H}_n \subset TG_n \subset G_{n+1}.$$

因此我们只要证明由 $h \perp G_{n-1}$ 推出 $Th \perp G_{n-1}$. 事实上, 如果 $h \perp G_{n-1}$, 那么

$$(h, T^k T^{*j} x) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \quad x \in M.$$

但是 $(Th, T^k T^{*j} x) = (h, T^* T^k T^{*j} x)$. 再由 (1.2.1), 我们有

$$(Th, T^k T^{*j} x) = \sum_{l=0}^{k-1} (h, T^j D_T x_l) + (h, T^k T^{*j+1} x),$$

其中 $x_l \in \mathscr{H}$. 这就推出

$$(Th, T^k T^{*j} x) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \quad x \in M.$$

从而证明了 (1.2.2).

命题 1.2.3 设 T 是纯的, 那么对于正交分解 $\mathscr{H}=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_n$, T 有下面的双对角线结构:

$$T=\begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ D_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & D_2 & B_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & D_3 & B_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.2.3}$$

这里 D_l 和 B_m 满足条件

$$[B_0^*,B_0]+D_1^*D_1=D_T,\quad [B_k^*,B_k]+D_{k+1}^*D_{k+1}=D_kD_k^*,\quad k\geqslant 1, \tag{1.2.4}$$

而且

$$B_{k+1}^*D_{k+1}=D_kB_k^*,\quad k\geqslant 0. \tag{1.2.5}$$

如果 T 又是**亚正常**的 (hyponormal), 即 $[T^*,T]\geqslant 0$ (参看附录 I), 那么令 $D_T=D_0^2$, 其中 $D_0\geqslant 0$, 此时 (1.2.4) 中第二式对 $k=0$ 也成立.

证 用 P_n 表示由 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_0$ 的投影算子. 定义

$$B_n=P_nT|_{\mathscr{H}_n},\ \text{又}\ D_{n+1}=P_{n+1}T|_{\mathscr{H}_n},\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{1.2.6}$$

由 (1.2.2) 和 (1.2.6) 立即推出 (1.2.3). 由 (1.2.3) 和

$$T^*T-TT^*=\begin{pmatrix} D_T & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

就推出 (1.2.4) 和 (1.2.5). □

定义

$$\Lambda_T=(T^*|_{\mathscr{H}_0})^*, \tag{1.2.7}$$

$$C_T=[T^*,T]|_{\mathscr{H}_0}. \tag{1.2.8}$$

定理 1.2.4 如果 T 是纯算子, 那么它酉等价于算子

$$\widetilde{T}=\begin{pmatrix}\Lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ C_1 & \Lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & C_2 & \Lambda_2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & C_3 & \Lambda_3 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}. \tag{1.2.9}$$

它是 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 上按正交分解 $\widetilde{\mathscr{H}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\oplus\widetilde{\mathscr{H}_n}$ 所成的块矩阵, 其中 $\Lambda_0=\Lambda_T, C_0=C_T, C_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots, C_1=(C_0-[\Lambda_0^*,\Lambda_0])^{1/2}$,

$$C_{n+1}=(C_n^2-[\Lambda_n^*,\Lambda_n])^{1/2},\quad n=1,2,\cdots, \tag{1.2.10}$$

$$\Lambda_{n+1}=C_{n+1}^{-1}\Lambda_n C_{n+1},\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{1.2.11}$$

而且 $\widetilde{\mathscr{H}_n}=\mathrm{cl}\,(C_n$ 的值域$), n=1,2,\cdots$ 满足如下条件:

$$\mathscr{H}_0=\widetilde{\mathscr{H}_0}\supset\widetilde{\mathscr{H}_1}\supset\widetilde{\mathscr{H}_2}\supset\cdots.$$

证 由 (1.2.3), 容易看出

$$TG_n\subset G_n\oplus(D_{n+1}\text{ 的值域}).$$

所以 $G_{n+1}\subset G_n\oplus$ $(D_{n+1}$ 的值域). 因此

$$\mathrm{cl}(D_{n+1}\text{ 的值域})=\mathscr{H}_{n+1}.$$

从而就有由 $\mathscr{H}_{n+1}$ 到 cl $(|D_{n+1}|$ 的值域) 上的酉算子 V_{n+1} 使得

$$D_{n+1}=V_{n+1}|D_{n+1}|,$$

这里 $|A|$ 表示 $(A^*A)^{1/2}$. 令

$$U=\begin{pmatrix}I & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ 0 & V_1^* & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & V_1^*V_2^* & \cdots & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & V_1^*V_2^*\cdots V_{n-1}^* & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

为 $\mathscr{H}$ 到 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 上的酉算子, 那么 $\widetilde{T}=UTU^*$ 就形如 (1.2.9), 其中 $\Lambda_0=B_0$,

$$\Lambda_n = V_1^* \cdots V_n^* B_n V_n \cdots V_1, \tag{1.2.12}$$

而且

$$C_n = V_1^* \cdots V_{n-1}^* D_n V_{n-1} \cdots V_1, \tag{1.2.13}$$

这里 $n=1,2,\cdots$, 此外 $V_0=I$. 我们要用数学归纳法来证明 $V_1^*V_2^*\cdots V_n^*$ 是在 $\mathscr{H}_n$ 上等距的. 首先, 对 $n=1, V_1^*$ 是由 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathrm{cl}(D_1$ 的值域$)\subset \mathscr{H}_0$ 上的酉算子. 令 $\widetilde{\mathscr{H}_0}=\mathscr{H}_0$. 由 (1.2.13) 容易看出 $\widetilde{\mathscr{H}_n}=V_1^*\cdots V_n^*\mathscr{H}_n, n=1,2,\cdots$. 假设 $V_1^*\cdots V_n^*$ 是在 $\mathscr{H}_n$ 上等距的, 其中 $n\geqslant 1$. 我们要证明 $V_1^*\cdots V_n^*V_{n+1}^*$ 在 $\widetilde{\mathscr{H}_{n+1}}\subset\widetilde{\mathscr{H}_n}$ 上也是等距的. 从 V_{n+1}^* 是 $\mathscr{H}_{n+1}$ 到 $\mathrm{cl}(|D_{n+1}|$ 的值域$)$ 上的酉算子及 $D_{n+1}\mathscr{H}\subset\mathscr{H}_{n+1}$ 这个事实, 我们可以得出 $|D_{n+1}|$ 的值域在 $\mathscr{H}_n$ 中, 而且 V_{n+1}^* 在 $\mathscr{H}_{n+1}$ 上是等距的, 且使 $\mathrm{cl}(V_{n+1}^*$ 的值域$)\subset\mathscr{H}_n$. 因此 $V_1^*\cdots V_n^*V_{n+1}^*$ 在 $\mathscr{H}_{n+1}$ 上是等距的而且 $\widetilde{\mathscr{H}_{n+1}}\subset\widetilde{\mathscr{H}_n}$. 所以 U 是酉算子.

由 (1.2.4), (1.2.5), (1.2.12) 和 (1.2.13) 得到 (1.2.10) 和

$$C_{n+1}\Lambda_{n+1}=\Lambda_n C_{n+1}.$$

如果 y 在 $\Lambda_n C_{n+1}$ 的值域中, 那么就有 Λ_{n+1} 的值域中的 x 使得

$$C_{n+1}x=y.$$

如果又有 x' 使得 $C_{n+1}x'=y$, 那么 $x=x'$. 这是因为

$$C_{n+1}\ \text{的核}=(C_{n+1}\ \text{的值域})^{\perp}=\{0\}.$$

所以我们可以定义 $x=C_{n+1}^{-1}y$, 从而证明了 (1.2.11). □

系 1.2.5 如果 T 是纯算子, 那么在 (1.2.7) 和 (1.2.8) 中定义的 $\{\Lambda_T, C_T\}$ 是**完全酉不变量**.

证 显然 $\{\Lambda_T, C_T\}$ 是酉不变量. 假如 T 和 T' 是两个纯算子. 它们有相应的 $\{\mathscr{H}_0, C_0, \Lambda_0\}$ 和 $\{\mathscr{H}_0', C_0', \Lambda_0'\}$, 其中 $C_0=C_T, \Lambda_0=\Lambda_T, C_0'=C_{T'}$ 和 $\Lambda_0'=\Lambda_{T'}$. 假设有由 $\mathscr{H}_0$ 到 $\mathscr{H}_0'$ 上的酉算子 V 满足条件

$$C_0'=VC_0V^{-1}\quad \text{和}\quad \Lambda_0'=V\Lambda_0V^{-1}.$$

作出 $\widetilde{\mathscr{H}'}=\Sigma\oplus\mathscr{H}_n', \mathscr{H}_n'=\mathrm{cl}\ (C_n'$ 的值域$)$ 上的块矩阵

$$\widetilde{T}'=\begin{pmatrix} \Lambda_0' & 0 & 0 & \cdots \\ C_1' & \Lambda_1' & 0 & \cdots \\ 0 & C_2' & \Lambda_2' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

那么

$$C_1' = (C_{T'} - [\Lambda_0'^*, \Lambda_0'])^{1/2} = V(C_T - [\Lambda_0^*, \Lambda_0])^{1/2}V^* = VC_1V^*.$$

令 $V_1 = V|_{\widetilde{\mathscr{H}_1}}$, 那么 V_1 是由 $\widetilde{\mathscr{H}_1}$ 到 $\widetilde{\mathscr{H}_1'}$ 上的酉算子, 而且

$$C_1' = V_1C_1V_1^*.$$

由 (1.2.11) 我们得到 $\Lambda_1' = V_1\Lambda_1V_1^*$, 由数学归纳法, 我们可以构造由 $\widetilde{\mathscr{H}_n}$ 到 $\widetilde{\mathscr{H}_n'}$ 上的酉算子 $V_n, n = 2, \cdots$ 使得

$$C_n' = V_nC_nV_n^* \quad 和 \quad \Lambda_n' = V_n\Lambda_nV_n^*, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

再作如下的酉算子:

$$W = \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & V_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & V_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

我们得到 $\widetilde{T}' = W\widetilde{T}W^*$, 从而证明了这个系. □

设 H 是 Hilbert 空间上的算子. 再说一遍: 如果 $[H^*, H] \geqslant 0$, 就是说

$$([H^*, H]x, x) \geqslant 0 \quad 对一切\ x \in \mathscr{H}$$

成立. 那么 H 称作亚正常的 (参看附录 I). 在 1.3 节中我们将说明次正常算子是亚正常的. 在第 5 章中我们将给出亚正常算子而不是次正常的例子.

在本专著中, 我们主要是讨论次正常算子, 但也给出某些关于一些特殊类亚正常算子 (却不一定是次正常的) 的定理. 这些定理可以帮助我们更好地了解次正常算子.

命题 1.2.6　如果 H 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的纯亚正常算子, 那么 $\sigma_p(H) = \varnothing$ (这里 $\varnothing$ 表示空集).

证　设 $z \in \sigma_p(H)$, 由

$$[H^* - \bar{z}, H - z] = [H^*, H] \geqslant 0$$

导出

$$\|(H^* - \bar{z})f\| \leqslant \|(H - z)f\|, \quad f \in \mathscr{H}.$$

因此, 如果 $f \neq 0$ 是算子 H 的相应于特征值 z 的特征向量, 那么 $(H^* - \bar{z})f = (H - z)f = 0$. 所以 $M_f = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{C}\}$ 约化 H, 而 $H|_{M_f}$ 是 zI_{M_f}, 这里 I_{M_f} 是 M_f 上的恒等算子. 因此 H 不是纯的, 从而证明了本命题. □

1.3 次正常算子的解析模型

设 S 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的次正常算子, N 是它的在 $\mathscr{K} \supset \mathscr{H}$ 上的 m.n.e. 令 $\widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{K} \ominus \mathscr{H}$, P 和 $\widetilde{P}$ 分别是由 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{H}$ 和 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 上的投影算子. 令 A 是由 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 到 $\mathscr{H}$ 的如下的算子:

$$Ax = PNx, \quad x \in \widetilde{\mathscr{H}}. \tag{1.3.1}$$

令 $\widetilde{S}$ 是由 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 到 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 自身的如下的算子:

$$\widetilde{S} \overset{\text{定义}}{=\!=} N^*|_{\widetilde{\mathscr{H}}}. \tag{1.3.2}$$

算子 $\widetilde{S}$ 的值域在 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 中, 因为 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 是 N^* 的不变子空间. 所以我们有关于 N 的块矩阵表示如下: 按分解 $\mathscr{K} = \mathscr{H} \oplus \widetilde{\mathscr{H}}$,

$$N = \begin{pmatrix} S & A \\ 0 & \widetilde{S}^* \end{pmatrix}. \tag{1.3.3}$$

条件 $N^*N = NN^*$ 等价于下述三个恒等式同时成立:

$$[S^*, S] = AA^*, \tag{1.3.4}$$

$$[\widetilde{S}^*, \widetilde{S}] = A^*A, \tag{1.3.5}$$

和

$$S^*A = A\widetilde{S}. \tag{1.3.6}$$

由 (1.3.4) 我们得知**次正常算子必是亚正常的**.

算子 $\widetilde{S}$ 也是 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 上的次正常算子. 它的一个 m.n.e. 是 N^*. $\widetilde{S}$ 称作 S 的**对偶** (dual).

例 设 $H^2(\mathbb{T})$ 是单位圆上满足条件

$$\|f\|^2 = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty$$

的所有解析函数 f 所成的 Hilbert 空间. 设 $L^2(\mathbb{T})$ 是 $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 上所有可测而且平方可积的函数全体所成的 Hilbert 空间, 它的内积是

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta.$$

令 U_+ 是 $H^2(\mathbb{T})$ 上的如下的乘法算子:

$$(U_+ f)(z) = zf(z), \quad |z| < 1.$$