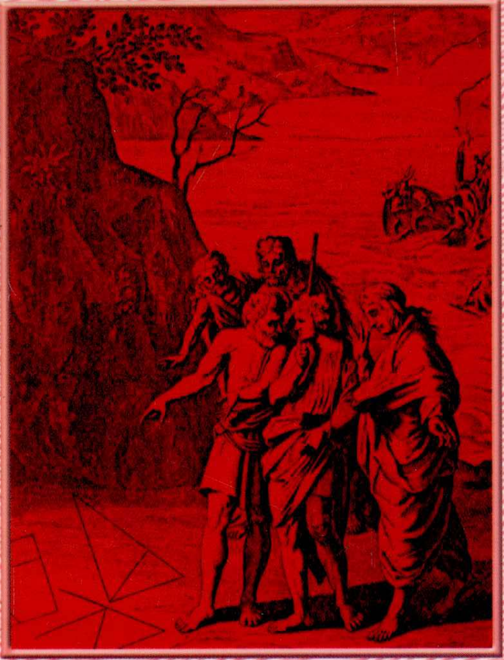
《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

哈尔测度

——从一道冬令营试题的背景谈起

刘培杰 编译



◎ 佐恩公理

◎ 拓扑空间的构成

◎ 距离空间的构成

◎ 关于勒贝格测度的进一步的研究

◎ 哈尔测度的存在性

学出版社
INOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

哈尔测度

——从一道冬令营试题的背景谈起

刘培杰 编译

- ◎ 佐恩公理
- ◎ 拓扑空间的构成
- ◎ 距离空间的构成
- ◎ 关于勒贝格测度的进一步的研究
- ◎ 哈尔测度的存在性

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道冬令营试题的背景谈起，详细介绍了哈尔测度及其相关知识。全书共分6章，分别为：一道冬令营试题、集合、拓扑空间、距离空间、点集的容积与测度、哈尔测度。

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读。

图书在版编目(CIP)数据

哈尔测度：从一道冬令营试题的背景谈起／刘培杰编译. -- 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5603-3746-3

Ⅰ.①哈… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①哈尔测度 Ⅳ.①O174.12

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第177397号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王慧　张佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张12.75　字数131千字
版　　次　2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3746-3
定　　价　28.00元

◎ 目录

第1章

一道冬令营试题

设 X 是一个有限集合,法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(偶数个元素组成的子集)都对应一个实数 $f(E)$,且满足如下条件:

(1)存在一个偶子集 D,使得

$$f(D)>1\ 996$$

(2)对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A,B,有

$$f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1\ 996$$

求证:存在 X 的子集 P 和 Q. 满足

(ⅰ)$P\cap Q=\varnothing,P\cup Q=\mathbf{Z}$;

(ⅱ)对 P 的任何非空偶子集 S,有

$$f(S)>1\ 996$$

(ⅲ)对 Q 的任何偶子集 T,有

$$f(T)\leqslant 1\ 996$$

证明 注意到 X 是有限集,所以 X 只能有有限个偶子集. 于是,由极端原理可知,∃(存在)偶子集 U,使得

$$f(U)=\max_{\substack{U\subset X\\ |U|\equiv 0(\bmod 2)}}\{f(U)\}$$

这样的 U 可能不止一个. 我们取使 f 达到最大值的偶子集中元素最少的一个

作为 P(假如这样的集合不止一个,我们任取其一).
然后再取 $Q=X/P$. 在这样的取法之下,显然有

$$P\cap Q=\varnothing, P\cup Q=X$$

往证:P,Q 也满足(ⅱ)(ⅲ).

由于已知 $\exists D$,使得 $f(D)>1\ 996$. 故由 P 的取法可知

$$f(P)\geqslant f(D)>1\ 996$$

我们再来考察 P 的任何一个非空的真偶子集. 因为

$$f(P)=f(S\cup(P\backslash S))=f(S)+f(P\backslash S)-1\ 996$$

并且注意到 $P\backslash S$ 也是偶子集且元素个数小于 P,所以

$$f(P\backslash S)\notin\left\{\max_{\substack{U\subset X\\ |U|\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}} f(U)\right\}$$

故
$$f(P\backslash S)<f(P)$$

从而
$$f(S)-1\ 996=f(P)-f(P\backslash S)>0$$

即 $f(S)>1\ 996$. 故(ⅱ)成立.

对 $\forall\, T\subset Q, |T|\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$,显然 $f(T\cup P)$ 不能超过最大值 $f(P)$. 于是由

$$f(T\cup P)=f(T)+f(P)-1\ 996$$

可得
$$f(T)-1\ 996=f(T\cup P)-f(P)\leqslant 0$$

即 $f(T)\leqslant 1\ 996$. 故(ⅲ)也成立.

注 1 本题是根据第 5 届冬令营试题改编.

注 2 本题的背景是匈牙利著名数学家、1903 年匈牙利数学奥林匹克优胜者哈尔(Haar, Alfréd, 1885—1933)提出的以他的名字命名的哈尔测度的特例.

哈尔曾是德国大数学家希尔伯特的助教. 他的父亲是一位匈牙利的大葡萄园主,十分富有. 据库朗回忆,当时在哥廷根大学,存在一个数学小圈子,其领袖

人物就是艾尔弗雷德·哈尔. 他个子不高,身材匀称. 库朗说他有一种让人佩服的品质,仿佛在世界上哪里都跟在家里一样. 他是一个头脑反应特别快而且思维非常精确的天才. 这种数学天份后来在冯·诺伊曼身上见到过. 当时所有的学生都相信,艾尔弗雷德·哈尔会成为给数学留下最深印记的大数学家之一.

我国著名科学家钱伟长先生的导师冯·卡门教授同哈尔一样都是匈牙利数学奥林匹克的优胜者. 他是由哈尔介绍到哥廷根大学去,并很快接替哈尔的位置当上库朗都公认的"圈内"的领袖.

集 合[1]

第 2 章

§1 集合及其运算

集合的概念已成为现代数学最基本的概念. 了解集合论知识的读者也许会想起基数(势)或序数的理论,但是作为数学这一门的最基本的集合论并不是指这些概念.

不论是读者已学过的代数学和几何学,抑或是即将要学的拓扑和测度理论,它们的完整体系都是先取集合 S,从而设定其元素及子集的性质和运算的公理来构成的. 自然科学与数学的关系好比文学与语法的关系. 文学的主体为思想而表现于文章,语法则说明文章的构造. 自然科学的研究对象为实体,而可用数学将它表达出来. 数学的对象是几乎完全抽象的东西,而我们主要的兴趣仅在于它们相互的结合. 这个抽象东西就是集合.

① 内容取自河田敬义的《集合·拓扑·测度》.

读者也许在开始的时候有这样的印象，就是把极容易的东西，故意唠唠叨叨说得难懂. 但希望把它看做学外语必须先学语法一样，刚开始学习时要有耐心. 以下，用易懂的方法从集合论的叙述讲起.

逻辑记号 $\neg A$ 表示否定，$A \wedge B$ 是合取符号（A 和 B），$A \vee B$ 是析取符号（A 或 B）. $A \Rightarrow B$ 是推断符号，即若 A 则 B. $A \Leftrightarrow B$ 是等价符号，即 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$. 此外

$$(\exists x) \quad P$$

表示"存在着具有性质 P 的 x"；

$$(\forall x) \quad P$$

则表示"对于所有 x 都有性质 P".

所谓事物 a（不是字母 a）就是指用 a 来表示的对象. $a = b$ 意味着：关于 a 成立的性质，对于 b 也成立，而关于 b 成立的性质，对于 a 亦成立. 所谓集合 A 乃是可以互相区别的事物的汇集. 构成集合 A 的事物 a 称为 A 的元（或称元素 element）. 当事物 a 属于 A（或者说含于 A）时，记为

$$a \in A$$

否则就用 $a \notin A$ 表示.

在集合论中，所有其他的概念都可以由事物（元素）、集合和关系（$\in$）引导出来.

1.1* 设有两个集合 A, B，如果 A 中的元素与 B 中的元素完全一致，也就是说：$a \in A \Leftrightarrow a \in B$ 的时候，表之为 $A = B$.

1.2* 一个元素都没有的集合（这也认为是集合的一种）称为空集（empty set）. 空集用 $\varnothing$ 表示.

---

* 凡带有 * 记号者表示这一小段为定义（下同）. ——编者注

当集合 A 含有元素 $a,b,\cdots,c$ 时,记为

$$A=\{a,b,\cdots,c\}$$

例如:$\{x\}$ 表示仅含一个元素 x 的集合,而 $\{x,y\}$ 乃是由两个元素 x,y 所构成.

$\{x,y\}$ 与 $\{y,x\}$ 是同一集合的不同写法,故 $\{x,y\}=\{y,x\}$.

1.3* 当 $x\in A$ 时,称 x 为变元,而称 A 为 x 的变域.设 $P(x)$ 是关于 x 的命题,那么

$$B=\{x\in A\mid P(x)\}$$

乃表示:对于使命题 $P(x)$ 成立的所有属于 A 的 x 的全体.

1.4* 若 A 的所有元素都是 B 中元素,即

$$a\in A\Rightarrow a\in B$$

此时称 A 为 B 的子集,记为

$$A\subset B$$

由此可知

(1)$\varnothing\subset A$;

(2)$x\in A\Leftrightarrow\{x\}\subset A$;

(3)$A=B\Leftrightarrow(A\subset B)\wedge(B\subset A)$;

(4)$(A\subset B)\wedge(B\subset C)\Rightarrow A\subset C$.

1.5* (1)所谓 C 是 A,B 两集合之和集(或称并集),是指由 A 及 B 中的元素全体所构成的集合,即

$$x\in C\Leftrightarrow(x\in A)\vee(x\in B)$$

记为

$$C=A\cup B$$

(2)所谓 C 是 A,B 两个集合之交集,意指 C 是由 A,B 共有元素所构成的集合,即

$$x\in C\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in B)$$

记为

$$C=A\cap B$$

(3)设A,B为两个集合,并设集合C的所有元素都属于A但不属于B,即

$$x\in C\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\notin B)$$

这时称C为A与B的差集,记为

$$C=A\setminus B$$

(见图1).

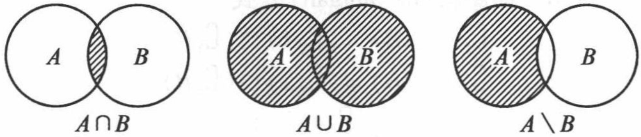


图1

1.6 对于集合$A,B,C,\cdots$,有如下的性质:

交换律

$$A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$$

结合律

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

吸收律

$$(A\cup B)\cap A=A,(A\cap B)\cup A=A$$

1.7* 集合的元素可以为任何事物,因此,以集合为元素而构成的集合(集合的集合)也在考虑之列.在这样的意义下,我们用$\mathfrak{P}(X)$表示以集合X的所有子集为元素而构成的集合,并称$\mathfrak{P}(X)$为X的幂集合,记为

$$\mathfrak{P}(X)=\{A\mid A\subset X\}$$

特别是$\varnothing$与 X 都属于$\mathfrak{P}(X)$. 一般来讲,$\mathfrak{P}(X)$的子集$\mathfrak{A}$称为集合族. 此外,对于 $A\in\mathfrak{P}(X)$,称

$$\complement_X A=X\backslash A$$

为 A 的(关于 X 的)补集(complement).

若 $A,B\in\mathfrak{P}(X)$,则 $A\cup B$ 及 $A\cap B$ 也属于$\mathfrak{P}(X)$. 除此以外,尚有下面等式成立:

1.8 德摩根(de Morgan)公式

$$\complement_X(A\cup B)=(\complement_X A)\cap(\complement_X B)$$

$$\complement_X(A\cap B)=(\complement_X A)\cup(\complement_X B)$$

$$\complement_X(\complement_X A)=A$$

$$A\cup(\complement_X A)=X$$

$$A\cap(\complement_X A)=\varnothing$$

1.9*　用(a,b)表示元素 a,b 的序偶

$$(a,b)=(a',b')\Leftrightarrow a=a'\wedge b=b'$$

例如,$(a,b)=(\{a\},\{a,b\})$,即有上述的性质.

设 A,B 为两个集合,称

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

为 A 与 B 的笛卡儿积(见图 2). 它的射影 pr(projection)定义为

$$pr_A:A\times B\to A,\ pr_A(a,b)=a$$

$$pr_B:A\times B\to B,\ pr_B(a,b)=b$$

如果 $A_1\subset A,B_1\subset B$,就定义为

$$\begin{cases}pr_A^{-1}(A_1)=A_1\times B,\ pr_B^{-1}(B_1)=A\times B_1\\ pr_A^{-1}(A_1)\cap pr_B^{-1}(B_1)=A_1\times B_1\end{cases}$$

设 $A_1,A_2\subset A$ 而 $B_1,B_2\subset B$,可证下面等式成立

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$$

$$\complement_{A\cup B}(A_1\times B_1)=((\complement_A A_1)\times B)\cup(A_1\times(\complement_B B_1))$$

$$=(A\times(\complement_B B_1))\cup((\complement_A A_1)\times B_1)$$

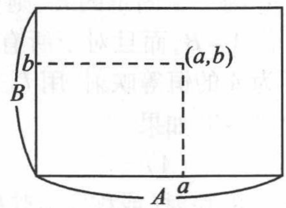


图2

同样地,用

$$(a,b,c,\cdots,f)=((\cdots((a,b),c),\cdots),f)$$

来定义元素 $a,b,c,\cdots,f$ 的有序集. $(a,b,c,\cdots,f)=(a',b',c',\cdots,f')\Leftrightarrow a=a',b=b',\cdots,f=f'$. 用

$$A\times B\times\cdots\times C=\{(a,b,\cdots,c)\mid a\in A,b\in B,\cdots,c\in C\}$$

来定义集合 $A,B,\cdots,C$ 的笛卡儿积.

§2 映 射

2.1* 设有集合 A,B. 如果有一对应关系或法则存在,对于 A 中任一元素 a,有 B 中唯一的一个元素 b 与之对应,那么我们就称给出了一个从 A 到 B 的映射 f,用

$$f:A\to B(\text{或 } A\xrightarrow{f}B)$$

表示,并记为 $b=f(a)$. 此时称 A 为映射 f 的定义域(domain),而

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}\quad(\subset B)$$

称为 f 的值域(range). 对应、函数、与映射同义.

2.2* 设有两个映射 f,g. $f=g$ 表示 f 的定义域 A 与 g 的定义域 A 完全一致,且对所有的 $a\in A$ 皆有

$f(a)=g(a)$. 如果映射 $f:A \to B$,对于任意 $a \in A$,都有 $f(a)=b_0$,这里 b_0 为一个固定的元,则称 f 为以 b_0 为值的常值映射. 若 $A=B$,而且对于所有的 $a \in A$,都有 $f(a)=a$,则称 f 为 A 的恒等映射,用 I_A 来表示.

2.3*　设 $f:A \to B$,如果

$$f(A)=B$$

则称 f 为 A 到 B 上的映射(或称完全映射). 如果

$$f(a)=f(a') \Rightarrow a=a'$$

则称 f 为一一对应的映射(或称单调映射). 若映射 $f:A \to B$ 是由 A 到 B 上的一一对应的映射,则称 f 为完全一一对应的映射(或称完全单调映射). 设 $f:A \to B$ 为完全一一对应的映射,对于 $f(a)=b$,置

$$a=f^{-1}(b)\ (a \in A, b \in B)$$

于是,得出一个完全映射 $f^{-1}:B \to A$,称 f^{-1} 为 f 的逆映射.

2.4*　设映射 $f:A \to B$, $g:B \to C$,用

$$h(a)=g(f(a)) \quad (a \in A)$$

来定义映射 $h:A \to C$,这时称 h 为 f,g 的结合(见图 3),记为

$$h=g \circ f$$

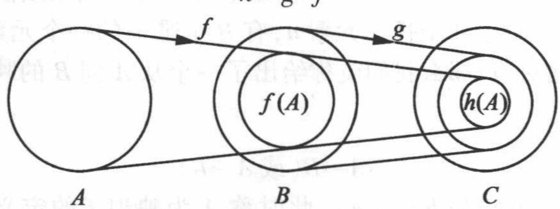


图 3

2.5　由上面定义可得:

(1)结合律: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \Rightarrow h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$.

(2)设 $f:A \to B$ 为完全一一对应的映射,则

$$f^{-1}\circ f=I_A,f\circ f^{-1}=I_B$$

注 由完全一一对应的映射 $f:A\to A$ 全体构成的集合,按照上面的结合律成群. 这时,群的单位元为 I_A,f 的逆元为 f^{-1}.

2.6* 设 $A_1\subset A$,并有映射 $f:A\to B,g:A_1\to B$,如果对于所有的 $a_1\in A_1$,有

$$f(a_1)=g(a_1)$$

则称 f 为 g 的扩大,相对地来讲,称 g 为 f 的缩小,记为

$$g=f|A_1$$

设有映射 $f:A\to B$. 作 $A\times B$ 的子集合

$$G(f)=\{(a,f(a))|a\in A\}$$

称 $G(f)$ 为 f 的图象(见图4). $E=G(f)$ 具有下面的性质:

(1)对于所有的 $a\in A$,存在着 $(a,b)\in E$ 的元素 (a,b);

(2)若 $(a,b)\in E,(a,b')\in E$,则 $b=b'$.

反之,如果 $E\subset A\times B$ 满足(1),(2),当 $(a,b)\in E$ 时,置 $b=f(a)$,这样就定义了一个映射 $f:A\to B$. 由此可见,映射的概念在集合论中,并不是新的概念,可从具有性质(1),(2)的 $A\times B$ 的子集 E 引出来.

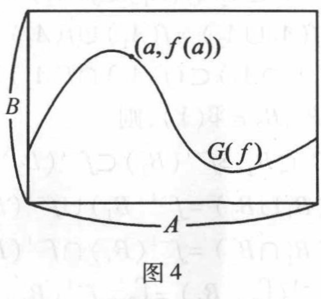


图4

2.7* (多变元的映射)用

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y \quad (x_i\in X_i, i=1,2,\cdots,n)$$
表示映射
$$f:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y$$
这时,称 f 为 n 变元的映射.

2.8* 设已知一映射 $f:X\to Y$,当 $A\in\mathfrak{P}(X)$ 时,置
$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}\quad(\in\mathfrak{P}(Y))$$
当 $B\in\mathfrak{P}(Y)$ 时,置
$$f^{-1}(B)=\{b\mid f(b)\in B\}\quad(\in\mathfrak{P}(X))$$
(见图5). 在这个定义中,f 是完全映射抑或完全一一对应的映射,那是无关紧要的. 于是,由 $f:X\to Y$ 就引出了映射
$$f:\mathfrak{P}(X)\to\mathfrak{P}(Y)\text{ 及 }f^{-1}:\mathfrak{P}(Y)\to\mathfrak{P}(X)$$

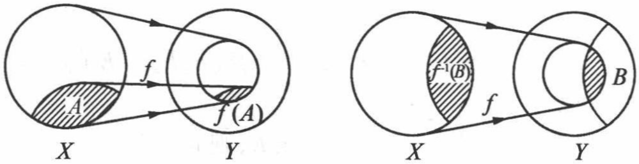


图5

2.9 设 $A_1,A_2\in\mathfrak{P}(X)$,则
$$A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$$
$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$$
$$f(A_1\cap A_2)\subset(f(A_1)\cap f(A_2))$$
设 $B_1,B_2\in\mathfrak{P}(Y)$,则
$$B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(\complement_{\mathfrak{P}(Y)}B_1)=\complement_{\mathfrak{P}(Y)}f^{-1}(B_1)$$

2.10* 设有映射 $f:\Lambda\to\mathfrak{P}(X)$,置