高等院校数学教材同步辅导及考研用书

线性代数

高教版（第五版）同济大学编

习题精解及考研辅导

周华任 等 编

知识结构分析

典型方法归纳

各种题型集成

课后习题精解

考研真题精选

打磨能力训练

成就考试考研

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

线性代数习题精解及考研辅导

高教版《工程数学线性代数》(第五版)(同济大学数学系编)

周华任　等编

东南大学出版社
·南京·

内容简介

本书是高等教育出版社的《工程数学线性代数(第五版)》(同济大学数学系编)的辅导教材，包括了知识逻辑结构图，学习目的要求，基本内容提要，解题方法归纳，课后习题精解，考研真题精选等部分，分析了考试的热点以及出题的角度和重点考察的知识点，加强了知识的应用性和针对性。本书题目丰富，难度适中，以研究生入学考试的题目难度标准选题，循序渐进，在笔者的课程教学和考研辅导中都取得了很好的效果。

本书可作为工科、经管等各专业学习线性代数课程的参考书，也可供报考硕士研究生的读者使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题精解及考研辅导/周华任等编.
—南京:东南大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5641-3681-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①周… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 167308 号

出版发行：东南大学出版社
社　　址：南京四牌楼 2 号　邮编：210096
出 版 人：江建中
网　　址：http://www.seupress.com
电子邮箱：press@seupress.com
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：南京京新印刷厂
开　　本：700 mm×1000 mm　1/16
印　　张：17
字　　数：469 字
版　　次：2012 年 8 月第 1 版
印　　次：2012 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5641-3681-9
定　　价：34.00 元

前　　言

本书是高等教育出版社的《工程数学线性代数(第五版)》(同济大学数学系编)的辅导教材，由以下几个部分组成：

1. 知识逻辑结构图：把本章的主要知识点用图解的方式表达出来。

2. 学习目的要求：根据考试及考研要求提炼每章学习要求，使读者学习时一目了然。

3. 基本内容提要：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

4. 解题方法归纳：归纳了线性代数这门课程中常见的题型和解题方法技巧，便于读者建立系统的应用知识的能力架构，提高学习的效率。

5. 课后习题精解：教材中课后习题丰富、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论，因此我们对课后全部习题给出了详细的解答。由于有些题目解题方法多种多样，大多数习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。

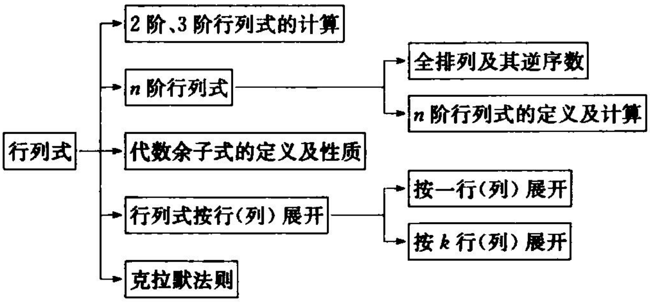
6. 考研真题精选：精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答，这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握线性代数的基本内容和解题方法。

本书由周华任、钱岳红、蔡开华、陈玉金、刘硕松、李喜波、卢刚、任宝龙编写，由于作者的水平有限，书中的疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

目　录

第一章 行 列 式

知识逻辑结构图



学习目的要求

(1) 掌握对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式.

(2) 掌握 n 阶行列式的定义及性质.

(3) 了解余子式的概念,掌握代数余子式的定义及性质.

(4) 掌握行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.

(5) 掌握克拉默法则.

基本内容提要

1. 全排列及其逆序数

(1) 全排列:把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列.

(2) 逆序和逆序数:在一个排列$(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s)$中,若一对数的前后位置与大小顺序相反,则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 若 τ 为奇数,则称$(i_1 i_2 \cdots i_n)$为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

(1) 定义:n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中,$(p_1 p_2 \cdots p_n)$为自然数 1, 2, …, n 的一个排列,τ 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有排列$(p_1 p_2 \cdots p_n)$求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素,a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的元素.

(2) 2 阶和 3 阶行列式还适用对角线法则.

(3) 由 n 阶行列式的定义可得到一些特殊行列式的值.

① 上、下三角行列式等于主对角线上的元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

② 对角行列式等于对角线元素之积,即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

③ 次对角线行列式的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

3. 行列式的性质

(1) 行列式 D 和它的转置行列式 D^{T} 的值相等.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用这个数 k 乘以此行列式,即行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5) 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数然后加到另一列(行)对应的元素上,行列式的值不变.

4. 行列式按行(列)展开

(1) 代数余子式:把 n 阶行列式元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 外都为 0,则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

(3) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即行列式按行(列)展开法则:

按第 i 行展开,有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

按第 j 列展开,有

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

(4) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j$$

(5) 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

5. 克拉默法则

考虑含有 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为 0 时,称为齐次线性方程组,否则称为非齐次线性方程组.

(1) 若上述方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则它有惟一解:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 D_i 是把 D 中第 i 列元素用方程组右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式.

(2) 若线性方程组无解或者有两个不同的解,则其系数行列式 $D = 0$.

(3) 若齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则它只有零解;若齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式等于 0.

6. 拉普拉斯定理

(1) 位于 n 阶行列式的第 $i_1, \cdots, i_k$ 行及第 $j_1, \cdots, j_k$ 列($1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$)交叉位置上的元素,按原来相对位置所构成的 k 阶行列式 D_1 称为 D 的一个 k 阶子式,不在这 k 行 k 列上的元素,按原来相对位置所构成的 $(n-k)$ 阶子式 D_2 叫做 D_1 的余子式,而称 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}D_2$ 为 D_1 的代数余子式.

(2) 拉普拉斯定理:任意取定 n 阶行列式的某 k 行(列),位于这 k 行(列)中的 k 阶子式共有 C_n^k 个,则这 C_n^k 个子式与其相应的代数余子式乘积的和等于 D.

解题方法归纳

题型 1　计算排列的逆序数

计算逆序数的方法：看有多少个比 1 大的数码排在 1 的前面，设为 m_1 个，那么就有 m_1 个数码与 1 构成逆序；然后把 1 划去，再看有多少个比 2 大的数码排在 2 前面，设有 m_2 个，那么就有 m_2 个数码与 2 构成逆序，再把 2 划去. 依此类推，最后设在 n 前面有 m_n 个数码（显然 $m_n = 0$），那么这个排列的逆序数为 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

例 1　求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1) 1347265；　　　(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解：(1) $\tau(1347265) = 0+3+0+0+2+1 = 6$，为偶排列.

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

例 2　选择 i 和 k，使：(1) $1i25k4897$ 成奇排列；(2) $1274i56k9$ 成偶排列.

解：(1) 由题意，i, k 只有两种选择：$i = 3,\ k = 6$ 或 $i = 6,\ k = 3$. 一般取小数在先，大数在后，如果符合要求即为所求，否则后一种情况符合要求.

而 $\tau(132564897) = 5$，即为所求，故 $i = 3,\ k = 6$.

(2) 由题意：$i = 3,\ k = 8$ 或 $i = 8,\ k = 3$.

而 $\tau(127435689) = 5$，则 $i = 8,\ k = 3$.

题型 2　利用行列式性质进行行列式计算

方法　利用性质将行列式化为上(或下)三角行列式以及利用其他性质计算(如提取公因式、逐行或列相加减等).

例 3　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：将第 $2, 3, \cdots, n$ 行加到第 1 行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第 1 行的 $-a$ 倍加到第 $2, 3, \cdots, n$ 行，有

$$D_n=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&0\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&0\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

解：由于 D 的主对角线及第 1 行与第 1 列元素非 0，其余元素为 0，把第 2 行的 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍，第 3 行的 $\left(-\frac{1}{3}\right)$ 倍，…，第 n 行的 $\left(-\frac{1}{n}\right)$ 倍都加到第 1 行上，使 D 化成下三角行列式，得

$$D=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}&0&0&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$$

解：利用逐行(列)相加减的技巧将该行列式化为三角行列式，即有

$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$
$$=1$$

例 6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$$

解：所有行(列) 对应元素相加后相等的行列式，可把所有行(列) 加到第 1 行(或第 1 列)，提取公因子后再化简计算. 该行列式所有列对应元素相加后均为 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，将第 2 列至第 n 列对应元素加到

第 1 列，然后提出公因子$(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)$，有

$$D_n=\begin{vmatrix} b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

再将第 1 行乘(－1)加到其余各行，得

$$D_n=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}$$

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解：这是一个“爪”型行列式，通常提取公因式化为三角行列式. 从第i行提出a_{i-1}($i=2, 3, \cdots, n+1$)，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

再将第 2 行的(－1)倍，…，第 n 行的(－1)倍加到第 1 行，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解：利用行列式性质直接将它化成"爪"型行列式. 第 2 行，第 3 行，…，第 n 行分别减去第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}$$

将第 i 行分别提出因子 $a_i(i=2,\cdots,n)$，得

$$D_n=a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -\dfrac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -\dfrac{a_1}{a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

将第 1 行分别减去第 2 行，第 3 行，…，第 n 行，得

$$D_n=a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix}1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\dfrac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=a_2a_3\cdots a_n\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)$$

$$=a_1a_2a_3\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

题型 3 利用行列式按行(列)展开定理

方法 当行列式的某一行(列)中的零元素较多时才能显出展开定理的优势，所以往往先利用行列式性质使行列式的某一行(列)出现较多的零元素，然后再利用定理.

例 9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\1 & -1 & x+1 & -1\\1 & x-1 & 1 & -1\\1+x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

解：行列式中各行元素之和都相等，可先把各列的每一个元素都加到第 1 列，则有

$$D\xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}}\begin{vmatrix}x & -1 & 1 & x-1\\x & -1 & x+1 & -1\\x & x-1 & 1 & -1\\x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\1 & -1 & x+1 & -1\\1 & x-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\0 & 0 & x & -x\\0 & x & 0 & -x\\0 & 0 & 0 & -x\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}x\begin{vmatrix}0 & x & -x\\x & 0 & -x\\0 & 0 & -x\end{vmatrix}=x^4$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1\\1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1\end{vmatrix}$$

解：利用行列式的性质，将第 1 行的 (-1) 倍加到第 $i(i=2,3,\cdots,n)$ 行上去，则

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2\end{vmatrix}=(-2)^{n-1}$$

例 11 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1)\end{vmatrix}$$

解：由于第 $2,3,\cdots,n$ 行的元素的和都是零，将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列上，有

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}(n+1)!$$

例 12 计算下列 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解:按第 1 行展开,得

$$D_n=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=a^n+(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$=a^n+(-1)^{2n+1}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}$$
$$=a^{n-2}(a^2-1)$$

题型 4 代数余子式的计算

方法 由行列式展开定理可知行列式

$$D_n=|a_{ij}|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D_n, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

也可将展开定理反过来使用,即已知行列式 $D=|a_{ij}|$ 及其元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 和任意 n 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,求和式 $\sum\limits_{j=1}^{n}k_jA_{ij}$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_iA_{ij}$,可将某些低阶行列式(代数余子式或余子式)的计算转化为高阶行列式计算更为方便.

例 13 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,求 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$,其中 $A_{i2}(i=1,2,3,4)$ 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式.

解:方法 1 因为 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式($i=1,2,3,4$),故将 D 中第 2 列元素依次换为 3, 7, 4, 8,即得

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$$

方法 2 因 3, 7, 4, 8 恰为 D 中第 3 列元素,而 A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42} 为 D 中第 2 列元素的代数余子式,故 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和,则 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=0$.

例 14 已知 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$,其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D 中第 4 行第 j 列元素的代数余子式.

解:可以通过代数余子式的定义求,也可以通过观察发现利用第 2 行和第 4 行.

$$\begin{cases}(1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43})+(2A_{44}+2A_{45})=27\\(2A_{41}+2A_{42}+2A_{43})+(1\cdot A_{44}+1\cdot A_{45})=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27\\2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0\end{cases}$$

解此方程组得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,\quad A_{44}+A_{45}=18.$$

题型 5 n 阶行列式的计算

方法 1 定义法——根据定义可以得到某些特殊行列式的结果,对 2 阶和 3 阶行列式,用对角线法则计算则不易出错.

方法 2 降阶法——利用行列式按行(列)展开定理,将高阶行列式降为低阶行列式,注意按零元素较多的行(列)展开或将某行(列)通过变形化为较多的零再展开.

方法 3 化为三角行列式法.

方法 4 递推公式法——对于 n 阶行列式 D_n,应用行列式的性质,找出 D_n 与 D_{n-1},或 D_n 与 D_{n-1}, D_{n-2} 之间的关系,由递推关系式求出 D_n 的值.

例 15 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

解：由第1列展开

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\cdot(-1)^{n-1} \\ &= a_n+xD_{n-1}=a_n+x(xD_{n-2}+a_{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= a_n+a_{n-1}x+\cdots+x^{n-2}(xD_1+a_2) \\ &= a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_2x^{n-2}+x^{n-1}D_1 \\ &= a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1} \end{aligned}$$

例16 **计算 n 阶行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解：按第1行展开得

$$D_n=3D_{n-1}-2D_{n-2}$$

则

$$D_n-2D_{n-1}=D_{n-1}-2D_{n-2}=D_{n-2}-2D_{n-3}=D_2-2D_1$$

因为

$$D_1=|3|=3,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7$$

即

$$D_n-2D_{n-1}=7-6=1$$

所以

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1}+1=2(2D_{n-2}+1)+1 \\ &= \cdots=2^{n-1}D_1+2^{n-2}+\cdots+1=2^{n-1}\times 3+2^{n-2}+\cdots+1 \\ &= 2^{n-1}(2+1)+2^{n-2}+\cdots+1=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1 \\ &= 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$