矩阵分析引论及其应用

Introduction to Matrix Analysis with Applications

时 宝 盖明久 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

矩阵分析引论及其应用

Introduction to Matrix Analysis with Applications

时 宝 盖明久 编著

国防工業出版社

·北京·

内 容 简 介

本书在读者已有微积分学和线性代数等基础知识的基础上比较详细地介绍了矩阵分析的基础理论及其应用，包括线性空间和线性变换的基本概念；矩阵的Jordan标准形和Smith标准形，Schur引理和Hermite二次型；在矩阵的理论研究与实际应用中，如在计算数学中，有着非常重要作用的矩阵的范数理论和谱半径的估计；以极限理论为基础的矩阵分析理论基础；在计算数学中起着非常重要的作用，并成为许多工程领域数学算法基础的矩阵分解；矩阵特征值的估计；广义逆矩阵的概念、性质和计算方法，以及在解线性方程组中的应用。

本书适合高等院校数学类专业（包括军事院校数学类合训专业）高年级学生和理工专业硕士研究生学习和研究之用，也可供高校教师教学和科研参考。

图书在版编目（CIP）数据

矩阵分析引论及其应用／时宝，盖明久编著．—北京：国防工业出版社，2010.7
ISBN 978-7-118-06943-3

Ⅰ．①矩…　Ⅱ．①时…②盖…　Ⅲ．①矩阵分析
Ⅳ．①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第124543号

※

国防工業出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048）
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
新华书店经售

*

开本 710×960　1/16　**印张** 13½　**字数** 239千字
2010年7月第1版第1次印刷　**印数** 1—4000册　**定价** 35.00元

国防书店：（010）68428422　　发行邮购：（010）68414474
发行传真：（010）68411535　　发行业务：（010）68472764

编著者的话

在读者已有微积分学和线性代数等基础知识的基础上, 本书比较详细地讨论矩阵分析的基础理论及其应用.

本来矩阵分析可以作为线性代数的一部分, 但由于它在各种学科中所具有的重要作用, 人们通常把它单独拿出来, 作为硕士研究生的必修内容. 本书是这样来处理的.

线性代数可以认为是由 P Fermat[①] 和 Descartes[②] 开创的, 这应该是 17 世纪的事情. 但直到 18 世纪末, 线性代数也还是局限在平面和空间的范畴. 大约到了 19 世纪上半叶, 人们才完成了到 n 维向量空间的过渡. 在 1853—1858 年间, A Cayley[③] 在 "Memoir on the theory of matrices" 中首次引入了 n 维向量空间的概念和矩阵的概念, 他详细地讨论了矩阵的性质, 得到了著名的 Hamilton[④]-Cayley 定理而成为了矩阵理论的先驱. A Cayley 的矩阵理论后来产生了很大的影响, 特别是对现代物理的量子力学和相对论的创立起到了重要的推动作用. 到 1870 年, 因为 M Jordan[⑤] 在 "Treasure on substitutions and algebraic equations" 中的工作使矩阵

① Pierre de Fermat (1601—1666), 法国人, 微积分学的先驱, 被称为 "业余数学家之王".

② René Descartes (1596—1650), 法国人, 解析几何的开创者, 人们在他的墓碑上刻下了这样一句话: "Descartes, 欧洲文艺复兴以来, 第一个为人类争取并保证理性权利的人", 他是欧洲近代哲学的奠基人之一, Hegel 称他为 "现代哲学之父".

③ Arthur Cayley (1821—1895), 英国人.

④ Sir William Rowan Hamilton (1805—1865), 爱尔兰人.

⑤ Marie Ennemond Camille Jordan (1838—1922), 法国人, 他给出了简单闭曲线将平面分成两个部分的 Jordan 引理.

理论达到了它的顶点. 在 1888 年, G Peano① 以公理的方式定义了有限维或无穷维向量空间. 后来, O Toeplitz② 将线性代数的主要定理推广到了最一般的向量空间中.

下面来谈谈本书的内容安排. 全书内容共 7 章:

第 1 章介绍线性空间和线性变换的基本概念;

第 2 章介绍矩阵的 Jordan 标准形和 Smith③ 标准形, Schur④ 引理和 Hermite⑤ 二次型;

第 3 章介绍在矩阵的理论研究与实际应用中, 如在计算数学中, 有着非常重要作用的矩阵的范数理论和谱半径的估计;

第 4 章以极限理论为基础介绍矩阵分析理论基础;

第 5 章介绍在计算数学中起着非常重要的作用, 并成为许多工程领域数学算法基础的矩阵分解;

第 6 章介绍矩阵特征值的估计;

第 7 章简要介绍广义逆矩阵的概念、性质和计算方法, 以及在解线性方程组中的应用.

本书整个内容的选取是由作者多年在科学研究、军事院校数学类合训专业和理工专业硕士研究生教学过程中所获得的一些体会. 在编撰过程中, 借鉴了程云鹏 [1]、罗家洪等和史荣昌 [6] 等中的部分内容. 由于作者水平有限, 再加上时间比较仓促, 谬误之处在所难免, 并且只能挂一漏万, 敬请读者和同行不吝以各种方式赐教.

本书适合高等院校数学类专业 (包括军事院校数学类合训专业) 高年级学生和理工专业硕士研究生学习和研究之用, 也可供高校教师教学和科研参考.

本书的出版得到海军航空工程学院专业技术拔尖人才基金 (名师工程) 和国防工业出版社的大力支持, 在此一并表示感谢.

2010 年 3 月 24 日于烟台

①Giuseppe Peano (1858—1932), 意大利人, 1889 年给出用集合定义自然数的 Peano 公理; 1890 年第一次构造出充满正方形的连续曲线的例子.

②Otto Toeplitz (1881—1940), 波兰人.

③Henry John Stephen Smith (1826—1883), 爱尔兰人, 将 Gauss 的实二次型理论推广到复二次型理论.

④Issai Schur (1875—1941), 白俄罗斯人.

⑤Charles Hermite (1822—1901), 法国人.

目 录

第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间和线性变换是现代矩阵理论经常用到的两个概念, 线性代数对这两个概念已做了初步的介绍. 本章将进一步介绍线性空间与线性子空间, 线性变换及其矩阵表示, 特征子空间的基本理论.

1.1　线性空间

人们讨论问题, 都是相对于某一个给定的 "范围" 来说的. 离开了这个范围, 问题就难以讲清楚了. 在讨论自然科学、社会科学和工程技术等问题时, 也要把问题放到某一个范围内, 这就产生了线性空间的概念.

线性空间的建立离不开相应的数域. 我们知道, 如果复数的一个非空集合 $\mathbb{P}$ 含有非零的数, 且其中任意两个数的和、差、积、商 (除数不等于零) 仍属于该集合, 则称 $\mathbb{P}$ 为一个数域. 例如有理数域 $\mathbb{Q}$、实数域 $\mathbb{R}$、复数域 $\mathbb{C}$ 等, 而且有理数域是最小的数域, 其他所有的数域都包含有理数域.

1.1.1　线性空间的定义

定义 1.1.1　设 V 是一个非空集合, $\mathbb{P}$ 是一个数域. 如果

(1) 在集合 V 上定义了一个二元运算 "+"(称为加法), 使得对任意的 $x, y \in V$, 都有 $x + y \in V$;

(2) 在数域 $\mathbb{P}$ 的元素与集合 V 的元素之间定义了数量乘法运算, 使得对任意的 $\lambda \in \mathbb{P}, x \in V$, 都有 $\lambda x \in V$;

(3) 上述两个运算满足下列八条规则:

①对任意的 $x, y \in V$, 都有 $x+y=y+x$; (交换律)

②对任意的 $x, y, z \in V$, 都有 $(x+y)+z=x+(y+z)$; (结合律)

③ V 中存在零元素, 记为 ϑ, 对于对任意的 $x \in V$, 都有 $x+\vartheta=x$;

④对任意的 $x \in V$, 存在 $y \in V$, 使得 $x+y=\vartheta$, y 称为 x 的负元素, 记为 $y=-x$;

⑤对任意的 $x \in V$, 都有 $1x=x$;

对任意的 $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$, 对任意的 $x, y \in V$, 下列三条成立:

⑥ $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$;

⑦ $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

⑧ $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

则集合 V 叫做数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间或向量空间, 简称为线性空间 . 当 $\mathbb{P}$ 是实数域时, V 叫做实线性空间; 当 $\mathbb{P}$ 是复数域时, V 叫做复线性空间.

由定义可以证明, 线性空间中零元素和每一个元素的负元素都是唯一的, 并且

$$0\cdot x=\vartheta, \quad \lambda\cdot\vartheta=\vartheta, \quad (-1)\cdot x=-x.$$

进一步, 在线性空间中, 对任意的 $x, y \in V$, 定义减法为 $x-y=x+(-y)$.

下面是一些典型线性空间的例子.

例 1.1.1 设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, 由分量属于 $\mathbb{P}$ 的 n 维向量的全体构成的集合记为

$$\mathbb{P}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{P}, i=1,2,\cdots,n\},$$

则 $\mathbb{P}^n$ 按照通常的向量加法运算和数乘向量运算成为数域 $\mathbb{P}$ 上一个线性空间.

例 1.1.2 设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, 由元素属于 $\mathbb{P}$ 的 $m\times n$ 矩阵的全体构成的集合记为

$$\mathbb{P}^{m\times n}=\left\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij}\in\mathbb{P}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n\right\},$$

则 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 按照通常的矩阵加法运算和数乘矩阵运算成为 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间.

例 1.1.3 数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式 (即多项式的系数都属于 $\mathbb{P}$) 的全体 $\mathbb{P}[t]$ 按照通常的多项式运算和数乘多项式运算成为 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间.

而数域 $\mathbb{P}$ 上次数小于 n 的多项式的全体 $\mathbb{P}[t]_n$(含零多项式) 按照通常的多项式运算和数乘多项式运算, 亦成为 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间.

例 1.1.4 定义在区间 $[a,b]$ 上的实值连续函数集合 $C[a,b]$, 按照函数加法和数乘函数运算, 构成实数域上的一个线性空间.

例 1.1.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的所有解 (包括零解) 的集合, 按照向量加法运算和数乘向量运算构成一个实线性空间, 称为该方程组的解空间, 也称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核或零空间, 记为 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{A})$.

例 1.1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则集合

$$V=\{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}\in\mathbb{C}^m \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\}$$

按照向量加法运算和数乘向量运算构成一个复线性空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间或值域, 记为 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{A})$.

上述例题请读者自行验证.

1.1.2 向量的线性相关性

线性空间中的元素称为向量. 当然, 这里所指的向量要比线性代数里的 n 元向量广泛得多, 但向量的线性相关性的概念与结论和线性代数中的概念和结论是完全类似的.

定义 1.1.2 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$. 如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{P}$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\vartheta, \tag{1.1.1}$$

则称向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性相关的.

若 (1.1.1) 式当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时才成立, 则称这组向量是线性无关的.

例 1.1.7 试验证 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的一组向量 (矩阵)

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是线性无关的.

请读者作为练习.

定义 1.1.3 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in V(r \geqslant 1)$. 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{P}$, 使得向量 α 可以表示为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

则称 α 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 或称 α 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合.

类似于线性代数中的证明思路, 可以证明如下结论.

定理 1.1.1 线性空间 V 中的一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r > 1)$ 是线性相关的充分必要条件是至少有一个向量能够由其他的向量线性表示.

由此可以得出, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是线性无关的, 则其中任意一个向量都不能由其他的向量线性表示.

定理 1.1.2 如果线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是线性无关的, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 是线性相关的, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示, 且表示方法是唯一的.

1.1.3 线性空间的基、维数与向量的坐标

定义 1.1.4 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 如果 V 中存在一组向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$$

满足

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性无关的;

(2) V 中的任意一个向量 α, 都可由该向量组线性表示为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \quad k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{P}, \tag{1.1.2}$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, $(k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标. 此时, 称 V 的维数为 n, 记为 $\dim V = n$, 并称 V 为 n 维线性空间.

由定理 1.1.2 知, 向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 是唯一的. 人们经常把 (1.1.2) 式改写成

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

但这里要注意 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 并不是数, 而是借助于矩阵的乘积运算来表示 (1.1.2) 式的.

例如, 对于线性空间 $\mathbb{P}^n$ 来说, 容易证明向量组

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$$

是线性无关的, 并且对于 $\mathbb{P}^n$ 中的任一向量 $\alpha = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由该向量组线性表示为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n,$$

故 $\mathbb{P}^n$ 是 n 维线性空间.

今后主要用到的是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$.

再考察线性空间 $\mathbb{P}^{m\times n}$, 若用 $\boldsymbol{I}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列上的元素为 1, 而其他元素皆为零的 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 个矩阵 $\boldsymbol{I}_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 构成 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 的一个基. 故 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 是 $m \times n$ 维线性空间.

以后主要用到的是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{C}^{m\times n}$.

而对线性空间 $\mathbb{P}[t]_n$ 来说, 可以证明 $1, t, \cdots, t^{n-1}$ 是它的一个基, 故它是 n 维线性空间.

1.1.4　基变换与坐标变换

为了叙述简便, 如果无特殊需要, 以后把数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间简称为线性空间.

在 n 维线性空间 V 中, 任意 n 个线性无关的向量都可取作它的基 (或称之为坐标系). 但同一个向量在不同基下的坐标一般是不同的, 如飞行器的位置在直角坐标系, 球面坐标系, 大地坐标系中的坐标是不同的. 在科学研究和工程应用中需要将不同坐标系中的坐标经过转化统一到同一个坐标系中. 下面就讨论当基改变时, 向量坐标的变化规律. 首先介绍过渡矩阵的概念.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两个基, 它们之间的关系是

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{n2}\alpha_n, \\ \qquad\cdots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \cdots + c_{nn}\alpha_n, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

则称系数矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵, 而 (1.1.3) 式称为基变换公式.

可以证明过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, 并且 (1.1.3) 式可以写成矩阵形式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,\boldsymbol{C}. \tag{1.1.4}$$

需要指出的是, (1.1.4) 式右端作矩阵乘法运算之前, 需要将 α_i 当作一个量来看待; 而在矩阵乘法运算之后, 比较等式两端的分量时, 亦将 β_i 当作一个量看待.

现在讨论向量的坐标变换问题.

设 $\xi\in V$ 在这两个不同基下的坐标分别为

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

和

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}},$$

即有

$$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n.$$

采用形式写法并利用 (1.1.4) 式, 有

$$\begin{aligned}\xi&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\ &=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\ &=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于向量在一个基上的坐标是唯一的, 所以有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

或者

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.1.6}$$

(1.1.5) 式和 (1.1.6) 式给出了在基变换 (1.1.4) 下向量坐标的变换公式.

例 1.1.8　在 $\mathbb{R}^n$ 中, 给定两组基

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$$

和

$$\beta_1 = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (0, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}, \cdots, \beta_n = (0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

已知向量 ξ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 试求该向量在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$.

解　容易看出

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

于是两组基下的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此,ξ 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_i=x_i-x_{i-1}, \quad i=2,\cdots,n. \end{cases}$$

例 1.1.9　在 $\mathbb{R}^3$ 中, 试求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵, 其中

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解　为了简单起见, 采用“中介基”的方法. 引进 $\mathbb{R}^3$ 中的简单基

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

由例 1.1.8 的讨论过程容易看出, 从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{C}_1;$$

从基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{C}_2.$$

所以有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2,$$

从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&3&0\\5&-1&3\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&3&-3\\9&5&-8\\0&8&3\end{pmatrix}.$$

1.1.5　线性子空间

在三维几何空间里,考虑过原点的一条直线或一个平面. 不难验证这条直线或这个平面上的所有向量关于向量的加法和数乘运算,分别构成一个一维和二维的线性空间. 这就是说,它们一方面是三维几何空间的一部分,同时自身关于原来的运算也构成一个线性空间. 称这样的线性空间为原来线性空间的子空间. 在实际应用中,通过空间分解,可使问题限定在特定的子空间内,将复杂问题化成一个个简单问题来处理.

定义 1.1.5　设 W 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 的一个非空子集. 如果 W 对于 V 所定义的加法运算及数量乘法运算,满足

(1) 如果 $\alpha,\beta\in W$, 则 $\alpha+\beta\in W$;

(2) 如果 $\alpha\in W, k\in\mathbb{P}$, 则 $k\alpha\in W$,

则称 W 是 V 的线性子空间,简称子空间.

容易验证,线性子空间 W 也是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间,即 W 中的向量不仅对于线性空间 V 中已定义的线性运算封闭,而且满足相应的八条运算律. 另外,由于线性子空间不可能比整个线性空间有更多数目的线性无关的向量,所以其维数不可能超过整个线性空间的维数,即 $\dim W\leqslant\dim V$.

例 1.1.10　在线性空间 V 中,仅含有一个零向量的子集构成 V 的一个子空间,称之为零子空间. 而 V 也可以看成是自身的一个子空间. 这两个子空间称为 V 的平凡子空间.

例 1.1.11　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$, 秩为 r, 则 $\boldsymbol{A}$ 的核空间

$$\mathfrak{N}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^n\}$$

构成了 n 维线性空间 $\mathbb{P}^n$ 的一个 $n-r$ 维的子空间.