数学分析习题详解

经典 Classics

经典教材辅导用书▌数学系列

知识要点

习题详解

解题方法及技巧

▌高教版《数学分析》（上册）（第三版）（华东师范大学数学系编）

林益　邵琨　罗德斌　俞小清　编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书·数学系列丛书

数学分析习题详解(上)

高教版《数学分析》(上册)(第三版)
(华东师范大学数学系编)

林 益 邵 琨 罗德斌 俞小清 编

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题详解(上)/林 益 邵 琨 罗德斌 俞小清 编. -2 版. —武汉:华中科技大学出版社,2008 年 7 月
ISBN 978-7-5609-3459-4

Ⅰ.数… Ⅱ.①林… ②邵… ③罗… ④俞… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 096505 号

数学分析习题详解(上) 林 益 邵 琨 罗德斌 俞小清 编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:周芬娜 封面设计:潘 群
责任校对:朱 霞 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:14.5 字数:395 000
版次:2008 年 7 月第 2 版 印次:2008 年 7 月第 3 次印刷 定价:22.00 元
ISBN 978-7-5609-3459-4/O·362

内容介绍

本书是对华东师范大学数学系所编写的、高等教育出版社出版的《数学分析》(第三版)上册全部习题的详解.为便于学生学习,在每章的习题解答之前,增加了知识要点部分,此部分不是对该章主要内容的罗列,而是帮助学生从更高的角度上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指出各概念、各定理的相互关联等,并指导解题方法,提示注意事项等.习题详解部分则周密、细致、规范,富有启发性,注意解题方法及技巧的运用,能给学生起到举一反三的作用.本书可供学生学习数学分析课程参考.

前　言

数学分析是数学系学生一门极其重要的基础课.它集中反映了数学科学的学科特点,并对学生进行了最基本、最必要的基础训练,是学生今后学习数学、攀登数学高峰的重要落脚点.它在本科数学学习中占有特殊的地位,因此加强数学分析课程的教学是必需的.

对于刚入学的数学系一年级学生而言,学习数学分析课程都有"难"的感觉.这是由数学的学科特点所决定的.因为数学的思想方法、理论体系与平常人的日常习惯是大相径庭的,一开始难以适应.学习上最突出的矛盾反映在"解题"这个环节上.众所周知,要学好数学就要动手解题(而且要有足够多的题量),但是要学会解题就必须在全面、正确地理解基本概念、基本理论和基本方法的基础上,运用辩证法来分析矛盾或转化矛盾,用逻辑推理来演化或推导等来解决问题.同时数学又是一种语言,要求学生用精确的数学语言表达自己的思路与论证.可见,提高解题能力绝非一日之功,而是需要长时间、坚持不懈地严格训练才能奏效的.而平时学生在这些方面的努力与成果,是通过作业来反映的.教师批改作业时的"√"与"×"还是不能充分反映学生学习的不足,也缺乏足够的视野空间.因此同学们自然希望手头有一本能弥补自己不足的教学参考书,特别是习题解答,以启发自己的思维,寻找自己知识的不足,提高语言表达能力等.

毫无疑义,华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)是一本优秀的理科教材,目前正被各高等院校广泛地采用.我们应邀编写该教材(上、下册)全部的习题解答,仅供学习参考.

为了学生学习方便,本书完全按照原教材的章、节编写,题号及数学符号与原教材一致.每章内容由两部分组成:一是知识要点,二是习题详解.知识要点不是对该章主要内容的罗列,而是从更高的角度上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指导解题方法,提示注意事项等.习题详解周密、细致、规范,富有启发性.

当然,习题解答是一把双刃剑,使用得当将受益,使用不当将受害.只有在独立完成习题的基础上对照阅读解答,或者经较长时间思考后仍不得要领时方可阅读解答,然后掩卷再独立完成,这样才能提高自身的数学素养,达到更好地学习数学分析课程的目的.

希望读者正确使用本书,并对本书的不足予以指正.

编　者

2005 年 7 月

目　　录

第一章 实数集与函数

知识要点

1. 实数包括有理数和无理数.本书利用实数的无限十进小数表示法来叙述实数理论.

2. 数学分析的理论推导中大量使用不等式,熟悉若干常见的不等式,如三角形不等式、平均值不等式,以及利用函数的单调性和有界性来放、缩不等式是必要的.

3. 区间与邻域是数学分析中最常见的实数集.有界集与无界集是数集的关键概念.掌握由有界集的定义导出其否定概念——无界集定义的正面叙述是理科学生的基本功.否定概念的肯定叙述常用于反证法的证明中.

4. 确界是数学分析的基础严格化中的重要概念,涉及确界的有关问题中均应很好地使用确界的定义.

5. 确界原理给出了数集确界存在性的定理.它是实数系完备性的几个等价定理之一,也是本书叙述实数理论和极限理论的基础.

6. 函数定义为数集到数集的映射,其定义方式优于初等数学中的函数定义.数学分析中函数的表示形式更为丰富,而诸如取整函数$[x]$、符号函数$\operatorname{sgn}x$、狄利克雷函数$D(x)$、黎曼函数$R(x)$等则是数学分析中的标志函数,它们在分析理论的研究中起着重要的作用.

7. 初等函数是由5个基本初等函数经过有限多次四则运算或有限多次复合运算得到的函数,它体现了数学对复杂问题研究的思想方法,也启示我们除了掌握5个基本初等函数的微积分运算外还应掌握有关运算在四则运算、复合运算中的法则.

8. 函数的有界性是数学分析中常用的函数性质,应正确地给出或使用有界函数与无界函数定义的正面叙述.

习题详解

§1 实　　数

1. 设a为有理数,x为无理数.证明:(1) $a+x$为无理数;(2) 当$a\neq 0$时,ax也是无理数.

证 (1) 反证法:假设$a,a+x$均为有理数,则$a=\dfrac{p_1}{q_1}$,$a+x=\dfrac{p_2}{q_2}$(p_1,p_2,q_1,q_2为整数,$q_1\cdot q_2\neq 0$),因此$x=(a+x)-a=\dfrac{p_2}{q_2}-\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{q_1p_2-q_2p_1}{q_1q_2}$.

由于p_1,p_2,q_1,q_2均为整数,故q_1p_2,q_2p_1,q_1q_2亦为整数,由此知x为有理数,与假设矛盾.所以$a+x$为无理数.

(2) 反证法:假设a,ax均为有理数,则$a=\dfrac{p_1}{q_1}$,$ax=\dfrac{p_2}{q_2}$(p_1,p_2,q_1,q_2为整数,$q_1\cdot q_2\neq 0$),由此

$x=\dfrac{ax}{a}=\dfrac{p_2q_1}{p_1q_2}$.

由于 p_1,p_2,q_1,q_2 均为整数,故 p_2q_1,p_1q_2 亦为整数,由此知 x 为有理数,与假设矛盾.所以 ax 为无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1)>0$;　　(2) $|x-1|<|x-3|$;　　(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

解　(1) 由 $x(x^2-1)>0$,得

$$\begin{cases}x>0,\\ x^2-1>0,\end{cases}\qquad ①$$

或

$$\begin{cases}x<0,\\ x^2-1<0.\end{cases}\qquad ②$$

解 $\begin{cases}x>0,\\ x^2-1>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x>0,\\ x>1 \text{ 或 } x<-1,\end{cases}$ 故　$x>1$.

解 $\begin{cases}x<0,\\ x^2-1<0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x<0,\\ -1<x<1,\end{cases}$ 故　$-1<x<0$.

由不等式组①、②,得 $x(x^2-1)>0$ 的解为

$$x>1 \text{ 或 } -1<x<0,\quad \text{即}\quad \{-1<x<0\}\cup\{x>1\}.$$

原不等式的解在数轴上的表示如图 1-1 所示.

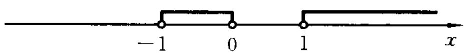

图 1-1

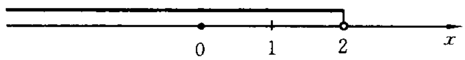

图 1-2

(2) 由 $|x-1|<|x-3|$,得 $(x-1)^2<(x-3)^2$,即

$$x^2-2x+1<x^2-6x+9,$$

整理得

$$x<2.$$

原不等式的解在数轴上的表示如图 1-2 所示.

(3) 由 $\sqrt{x-1},\sqrt{2x-1},\sqrt{3x-2}$,得

$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\geqslant \dfrac{1}{2},\\ x\geqslant \dfrac{2}{3},\end{cases}\quad \text{即}\quad x\geqslant 1.$$

而

$$\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+x-1}>\sqrt{x-1},\ \sqrt{3x-2}\geqslant 0,$$

故此题无解.

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε,有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

证　反证法:假设 $a\neq b$,则 $|a-b|=c>0$. 取 $\varepsilon_0=\dfrac{c}{2}>0$,由题设知 $|a-b|<\dfrac{c}{2}$,即 $c<\dfrac{c}{2}\Rightarrow c<0$. 矛盾,故 $a=b$.

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立.

证　由 $(|x|-1)^2\geqslant 0$,得 $|x|^2+1\geqslant 2|x|$. 而 $x\neq 0$,故 $|x|+\dfrac{1}{|x|}\geqslant 2$,即 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$. 由 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=2$ 知,当且仅当 $x=\pm 1$ 时等号成立.

5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$,有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;　　(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证　(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1$.

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|+|x-2|=2+|x-2|\geqslant 2$.

6. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,证明:$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$.你能说明此不等式的几何意义吗?

证　分析:欲证 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$,即证

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|^2\leqslant|b-c|^2,\quad \text{整理得}\quad \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\geqslant a^2+bc,$$

亦即证
$$(a^2+b^2)(a^2+c^2)\geqslant(a^2+bc)^2,$$
整理得
$$a^2b^2+a^2c^2\geqslant 2a^2bc,$$
即证
$$a^2(b-c)^2\geqslant 0.$$

证明如下.

由 $(b-c)^2\geqslant 0$ 得 $a^2(b-c)^2\geqslant 0$,即
$$a^2b^2+a^2c^2\geqslant 2a^2bc,$$
从而
$$a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geqslant a^4+2a^2bc+b^2c^2,$$
整理得
$$\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant(a^2+bc),$$
即
$$a^2-\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\leqslant -bc,$$
$$2a^2-2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\leqslant -2bc,$$
$$a^2+b^2-2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}+a^2+c^2\leqslant b^2+c^2-2bc,$$

故 $\left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right)^2\leqslant(b-c)^2\Rightarrow\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|$
$\leqslant|b-c|$.

几何意义:如图 1-3 所示,三角形两边之差小于或等于其在第三边上投影之差.

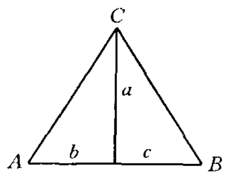

图 1-3

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$,证明:$\dfrac{a+x}{b+x}$介于 1 与$\dfrac{a}{b}$之间.

证　由于 $x>0,b>0$,故当

① $a\leqslant b$ 时,有 $\begin{cases}a+x\leqslant b+x,\\ ax\leqslant bx,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+x\leqslant b+x,\\ ab+ax\leqslant bx+ab\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+x}{b+x}\leqslant 1,\\ \dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a+x}{b+x}.\end{cases}$

② $a>b$ 时,有 $\begin{cases}a+x>b+x,\\ ax>bx,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+x>b+x,\\ ab+ax>bx+ab\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+x}{b+x}>1,\\ \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+x}{b+x}.\end{cases}$

综上,由①、②得,$\dfrac{a+x}{b+x}$介于$\dfrac{a}{b}$与 1 之间.

8. 设 p 为正整数,证明:若 p 不是完全平方数,则$\sqrt{p}$为无理数.

证　反证法:假设$\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$为有理数(m,n 为正整数,且 m/n 为既约分数),则 $p=\dfrac{m^2}{n^2}$,即 $pn=\dfrac{m}{n}\cdot m$.

由题设知 $n\neq 1$,$\dfrac{m}{n}$为既约分数,故$\dfrac{m}{n}\cdot m$ 必不为整数,而 pn 为整数,矛盾.因此$\sqrt{p}$必为无理数.

9. 设 a,b 为给定实数,试用不等式符号(不用绝对值号)表示下列不等式的解.

(1) $|x-a|<|x-b|$;　　(2) $|x-a|<x-b$;　　(3) $|x^2-a|<b$.

解　(1) 由 $|x-a|<|x-b|$ 有 $(x-a)^2<(x-b)^2$,且 $a\neq b$,即

$$x^2-2ax+a^2<x^2-2bx+b^2,$$

整理得

$$(a-b)(a+b)<2(a-b)x.$$

由 $a\neq b$,有 $a>b$ 时,

$$x>\frac{a+b}{2}\Rightarrow\begin{cases}a>b,\\x>\dfrac{a+b}{2}.\end{cases}$$

$a<b$ 时,

$$x<\frac{a+b}{2}\Rightarrow\begin{cases}a<b,\\x<\dfrac{a+b}{2}.\end{cases}$$

(2) 由 $|x-a|<x-b$ 知 $x\geqslant b$,且 $b-x<(x-a)<x-b\Rightarrow$ 仅当 $a>b$ 时有解

$$x>\frac{a+b}{2},\quad 即\quad\begin{cases}a>b,\\x>\dfrac{a+b}{2}.\end{cases}$$

(3) 由 $|x^2-a|<b$,得 $\begin{cases}b>0,\\-b<x^2-a<b,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b>0,\\a-b<x^2<a+b.\end{cases}$

① 当 $a<b$ 时,　$\begin{cases}x^2<a+b,\\a+b>0,\end{cases}$　即　$\begin{cases}-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b},\\-b<a<b.\end{cases}$

② 当 $a\geqslant b>0$ 时,　$\begin{cases}a-b<x^2,\\x^2<a+b,\end{cases}$

即

$$\begin{cases}-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b},\\x<-\sqrt{a-b}或x>\sqrt{a-b}\end{cases}\Rightarrow-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}或\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}.$$

§2　数集·确界原理

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x|-x\geqslant0$;　　(2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant6$;

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$ (a,b,c 为常数,且 $a<b<c$);　　(4) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解　(1) 由 $|1-x|-x\geqslant0$,得 $x\leqslant0$ 时,不等式成立. $x>0$ 时,$|1-x|\geqslant x$ 与 $|1-x|^2\geqslant x^2$ 同解.解 $|1-x|^2\geqslant x^2$,得

$$1-2x+x^2\geqslant x^2,\quad 即\quad x\leqslant\frac{1}{2},$$

故不等式解为

$$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right].$$

(2) $x>0$ 时,$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant6$ 化为 $x^2-6x+1\leqslant0$,解之 $3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant3+\sqrt{8}$,$x<0$ 时,$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant6$ 化为 $x^2+6x+1\leqslant0$,解之 $-3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant-3+\sqrt{8}$.

不等式解为 $x\in[-3-\sqrt{8},-3+\sqrt{8}]\cup[3-\sqrt{8},3+\sqrt{8}]$.

(3) $x\leqslant a$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)\leqslant0$,不等式无解. $a<x<b$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)>0$,不等式成立. $b\leqslant x\leqslant c$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)\leqslant0$,不等式无解. $x>c$ 时,$(x-a)(x-b)(x-c)>0$,不等式成立.

综上，$x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$即为不等式之解.

(4) 由 $\sin x$ 的周期性，仅讨论 $x\in[0,2\pi]$即可.

$x\in[0,2\pi]$时，仅当$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$时 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$. 所以不等式解为

$$x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right],\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

2. 设 S 为非空数集，试对下列概念给出定义：

(1) S 无上界；　　(2) S 无界.

解　(1) 定义：设 S 为非空数集，若对于 $\forall M>0$，$\exists x\in S$ 有 $x>M$，则称 S 无上界.

(2) 定义：设 S 为非空数集，若对于 $\forall M>0$，$\exists x\in S$ 有 $|x|>M$，则称 S 无界.

3. 试证明：$S=\{y\,|\,y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}$有上界而无下界.

证　由于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $x^2\geqslant0$，故 $\forall y\in S$ 有 $y=2-x^2<3$，3 即为 S 的一个上界. 而对 $\forall M>0$，取 $x=\sqrt{3+M}$，即有 $|y|=|2-x^2|=|-1-M|=M+1>M$，故 S 无界$\Rightarrow S$ 无下界.

4. 求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

(1) $S=\{x\,|\,x^2<2\}$；　　(2) $S=\{x\,|\,x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}$；

(3) $S=\{x\,|\,x$ 为$(0,1)$内无理数$\}$；　　(4) $S=\{x\,|\,x=1-\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\}$.

解　(1) 由 $x^2<2\Rightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，故$\sqrt{2}$是 S 的上界，$-\sqrt{2}$是 S 的下界.

i) $\sup S=\sqrt{2}$.

首先$\sqrt{2}$为 S 的上界；其次对 $\forall\alpha<\sqrt{2}$，由实数的稠密性知，$\exists\gamma$ 满足$\alpha<\gamma<\sqrt{2}$，即 $\gamma>\alpha$ 且 $\gamma\in S$，由定义知 $\sup S=\sqrt{2}$.

ii) $\inf S=-\sqrt{2}$.

首先$-\sqrt{2}$为 S 的下界；其次对 $\forall\beta>-\sqrt{2}$，由实数的稠密性知，$\exists\gamma$ 满足$-\sqrt{2}<\gamma<\beta$，即 $\gamma<\beta$ 且 $\gamma\in S$，由定义知 $\inf S=-\sqrt{2}$.

(2) i) $\sup S=+\infty$.

对 $\forall M>0$，取 $n=[M]+1\in\mathbf{N}_+$，而 $x=n!\geqslant n>M$，故 S 无上界.

ii) $\inf S=1$.

首先 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ 有 $x=n!\geqslant1$，即 1 为 S 的下界；其次对 $\forall\beta>1$，$\exists1\in\mathbf{N}_+$，$x_0=1!=1\in S$，有 $x_0<\beta$，由定义知 $\inf S=1$.

(3) i) $\sup S=1$.

首先 1 为 S 的上界；其次对 $\forall\alpha<1$，由实数的稠密性知，$\exists\gamma$ 满足$\alpha<\gamma<1$，即 $\gamma>\alpha$ 且 $\gamma\in S$，由定义知 $\sup S=1$.

ii) $\inf S=0$.

首先 0 为 S 的下界；其次对 $\forall\beta>0$，由实数的稠密性知，$\exists\gamma$ 满足 $0<\gamma<\beta$，即 $\gamma<\beta$ 且 $\gamma\in S$，由定义知 $\inf S=0$.

(4) i) $\sup S=1$.

首先 1 为 S 的一个上界；其次对 $\forall\alpha<1$，取 $N=\left[\frac{\lg\frac{1}{1-\alpha}}{\lg2}\right]+1>\frac{\lg\frac{1}{1-\alpha}}{\lg2}$，此时有 $2^N>\frac{1}{1-\alpha}$，即 $1-\alpha>\frac{1}{2^N}\Rightarrow\alpha<1-\frac{1}{2^N}$，故 $\exists x_0=1-\frac{1}{2^N}>\alpha$ 且 $x_0\in S$，由定义知 $\sup S=1$.

ii) $\inf S=\frac{1}{2}$.

$n=1$ 时，$x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；$n>1$ 时，$x=1-\frac{1}{2^n}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}$ 是 S 的下界. 又对 $\forall\beta>\frac{1}{2}$，$\exists 1\in\mathbf{N}_+$，$x_1=\frac{1}{2}\in S$ 使 $x_1<\beta$，由定义知 $\inf S=\frac{1}{2}$.

5. 设 S 为非空有下界数集，证明：$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$.

证 若 $\inf S=\xi\in S$，则由下确界定义知，$\forall x\in S$ 有 $x\geqslant\xi$，又 $\xi\in S$，故 $\min S=\xi$. 若 $\xi=\min S$，则由最小值定义知，$\forall x\in S$ 有 $x\geqslant\xi$，且对 $\forall\beta>\xi$，$\exists\xi\in S$，使 $\xi<\beta$，故 $\inf S=\xi$.

综上，
$$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S.$$

6. 设 S 为非空数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$，证明：

(1) $\inf S^-=-\sup S$;　　(2) $\sup S^-=-\inf S$.

证 (1) 设 $\xi=\sup S$，则 $\forall x\in S^-$，有 $-x\in S$，故 $-x\leqslant\xi$，即 $x\geqslant-\xi\Rightarrow-\xi$ 是 S^- 一个下界，且 $\forall\beta>-\xi$，即 $-\beta<\xi$. 由 $\xi=\sup S$ 知，$\exists-x_0\in S$ 使得 $-x_0>-\beta\Rightarrow x_0<\beta$，且 $x_0\in S^-$. 故 $\inf S^-=-\xi=-\sup S$.

(2) 由定义知 $(S^-)^-=S$，故由(1)知 $\inf(S^-)^-=-\sup S^-$，即 $-\inf S=\sup S^-$.

7. 设 A,B 皆为非空有界数集，定义数集 $A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$. 证明：

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;　　(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证 (1) 设 $\sup A=\xi_1$，$\sup B=\xi_2$，由定义知 $\forall x\in A,y\in B$，有 $x\leqslant\xi_1$，$y\leqslant\xi_2\Rightarrow x+y\leqslant\xi_1+\xi_2$，即 $\xi_1+\xi_2$ 为 $A+B$ 的上界. 又 $\forall\alpha<\xi_1+\xi_2$，记 $\varepsilon=\xi_1+\xi_2-\alpha>0$，取 $\alpha_1=\xi_1-\frac{\varepsilon}{2}<\xi_1$，$\alpha_2=\xi_2-\frac{\varepsilon}{2}<\xi_2$，$\exists x_0\in A,y_0\in B$ 使 $x_0>\alpha_1$，$y_0>\alpha_2$，即 $\exists z_0=x_0+y_0\in A+B$，使 $z_0>\alpha_1+\alpha_2=\alpha$. 故
$$\sup(A+B)=\xi_1+\xi_2=\sup A+\sup B.$$

(2) 设 $\inf A=\eta_1$，$\inf B=\eta_2$，由定义知 $\forall x\in A,y\in B$，有 $\eta_1\leqslant x_1$，$\eta_2\leqslant x_2$，即 $\eta_1+\eta_2\leqslant x_1+x_2$，$\eta_1+\eta_2$ 为 $A+B$ 的下界. 又 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_1\in A,y_1\in B$ 使得 $x_1<\eta_1+\frac{\varepsilon}{2}$，$y_1<\eta_2+\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $x_1+y_1<\eta_1+\eta_2+\varepsilon$. 故
$$\inf\{A+B\}=\inf A+\inf B.$$

8. 设 $a>0,a\neq1$，x 为有理数. 证明：
$$a^x=\begin{cases}\sup\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & a>1,\\ \inf\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}, & a<1.\end{cases}$$

证 i) $a>1$ 时，记 $S=\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}$，对于 $\forall a^r\in S$，由 $r<x$ 有 $a^r<a^x$，因此 a^x 为 S 的上界.

$\forall\alpha<a^x$，若 $\alpha\leqslant0$，则 $\forall a^r\in S$ 有 $a^r>\alpha$；若 $\alpha>0$，根据有理数的稠密性知，$\exists r_0$（r_0 为有理数）使 $\log_a\alpha<r_0<x(\log_a\alpha<\log_a a^x=x)$，即 $a^{r_0}>\alpha$ 且 $a^{r_0}\in S$，故 $\sup S=a^x$.

ii) $0<a<1$ 时，记 $S'=\{a^r\mid r\text{ 为有理数},r<x\}$，对于 $\forall a^r\in S'$，由 $r<x$ 有 $a^r>a^x$，因此 a^x 为 S 的下界.

$\forall\beta>a^x$，根据有理数的稠密性知，$\exists r'$（r' 为有理数）使 $\log_a\beta<r_1<x(\log_a\beta<\log_a a^x=x)$，即 $a^{r'}<\beta$ 且 $a^{r'}\in S'$，故 $\inf S'=a^x$.

§3 函数概念

1. 试作下列函数的图像：

(1) $y=x^2+1$;　　(2) $y=(x+1)^2$;　　(3) $y=1-(x+1)^2$;　　(4) $y=\mathrm{sgn}(\sin x)$;

(5) $y=\begin{cases}3x, & |x|>1,\\ x^3, & |x|<1,\\ 3, & |x|=1.\end{cases}$

解　函数(1)～(5)的图像如图 1-4 所示.

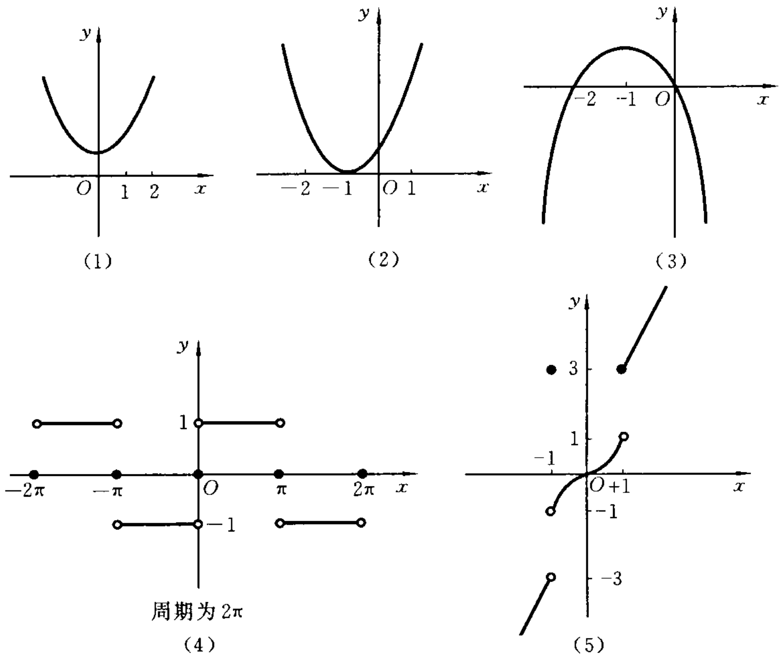

图 1-4

2. 试比较函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 分别当 $a=2$ 和 $a=\dfrac{1}{2}$ 时的图像.

解　当 $a=2$ 和 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图像如图 1-5 所示.

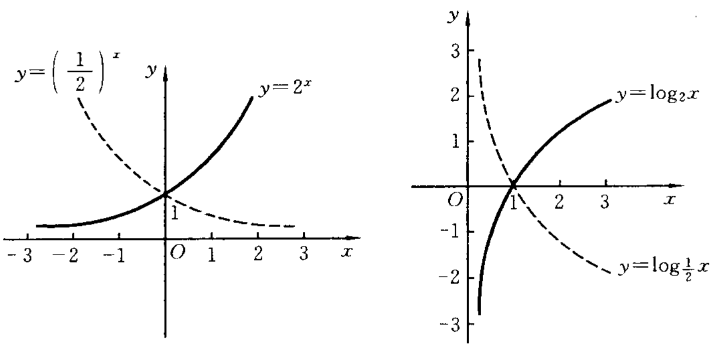

图 1-5

3. 根据图 1-6 写出定义在[0,1]上的分段函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$的解析表达式.

解　$f_1(x)=\begin{cases} 4x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 4-4x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1. \end{cases}$

$$f_2(x)=\begin{cases} 16x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{4}, \\ 8-16x, & \dfrac{1}{4}<x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1. \end{cases}$$

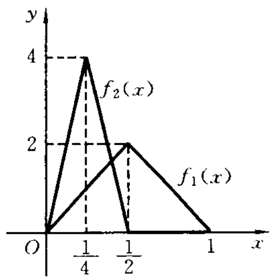

图 1-6

4. 确定下列初等函数的存在域：

(1) $y=\sin(\sin x)$； (2) $y=\lg(\lg x)$； (3) $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$； (4) $y=\lg\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)$.

解 (1) $y=\sin x$ 的存在域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,+1]$，故 $D=(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\lg x$ 的存在域为$(0,+\infty)$，故 $0<\lg x$，即 $x>1$，$D=(1,+\infty)$.

(3) $y=\arcsin x$ 的存在域为$[-1,+1]$，故$-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant1$，即$\frac{1}{10}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant10$，$D=[1,100]$.

(4) $y=\lg x$ 的存在域为$(0,+\infty)$，故 $\arcsin\frac{x}{10}>0$，即 $0<\frac{x}{10}\leqslant1$，$D=(0,10]$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ 求：(1) $f(-3)$，$f(0)$，$f(1)$；(2) $f(\Delta x)-f(0)$，$f(-\Delta x)-f(0)$ $(\Delta x>0)$.

解 (1) $f(-3)=2+(-3)=-1$， $f(0)=2+0=2$， $f(1)=2^1=2$.

(2) $f(\Delta x)-f(0)=2^{\Delta x}-2$， $f(-\Delta x)-f(0)=2+(-\Delta x)-2=-\Delta x$.

6. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $f(2+x)$，$f(2x)$，$f(x^2)$，$f(f(x))$，$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

解
$$f(2+x)=\frac{1}{1+2+x}=\frac{1}{3+x},\quad f(2x)=\frac{1}{1+2x},\quad f(x^2)=\frac{1}{1+x^2},$$
$$f(f(x))=f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x},\quad f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f(1+x)=\frac{1}{1+1+x}=\frac{1}{2+x}.$$

7. 试问下列函数是由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=(1+x)^{20}$； (2) $y=(\arcsin x^2)^2$； (3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$； (4) $y=2^{\sin^2x}$.

解 (1) $y=(1+x)^{20}$由 $y=r^{20}$，$r=s+t$，$s=1$，$t=x$ 复合而成.

(2) $y=(\arcsin x^2)^2$ 由 $y=r^2$，$r=\arcsin s$，$s=x^2$ 复合而成.

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$由 $y=\lg r$，$r=s+t$，$s=1$，$t=u^{\frac{1}{2}}$，$u=s+w$，$w=x^2$ 复合而成.

(4) $y=2^{\sin^2x}$由 $y=2^r$，$r=s^2$，$s=\sin x$ 复合而成.

8. 在什么条件下，函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$的反函数就是它本身？

解 由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$中解出 x. 因$(cx+d)y=ax+b$，$(cy-a)x=b-dy$，故
$$x=\frac{-dy+b}{cy-a}.$$
比较 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$和 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$知，当 $a+d=0$ 时，或当 $b=c=0$ 而 $a=d\neq0$ 时，函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$的反函数就是它本身.

9. 试作函数 $y=\arcsin(\sin x)$的图像.

解 $y=\arcsin(\sin x)$为以 2π 为周期的周期函数，故仅在$[-\pi,\pi]$内作出其图像即可(图 1-7).

注意：由 $\arcsin[\sin(-x)]=-\arcsin(\sin x)$ 知，$y=\arcsin(\sin x)$为奇函数，其图像关于原点对称.

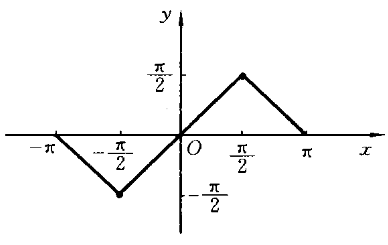

图 1-7

10. 试问下列等式是否成立？

(1) $\tan(\arctan x)=x$，$x\in\mathbf{R}$； (2) $\arctan(\tan x)=x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

解　(1) $\tan(\arctan x)=x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

(2) 由于 $y=\arctan x$ 的值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，而 x 的取值范围 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，故 $y=\arctan(\tan x)\neq x$.

或令 $x=\frac{5}{4}\pi$，则 $\arctan\left(\tan\frac{5}{4}\pi\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}\neq\frac{5}{4}\pi$，故 $\arctan(\tan x)\neq x$.

11. 试问 $y=|x|$ 是初等函数吗？

解　$y=|x|=\sqrt{x^2}$，故 $y=|x|$ 是初等函数.

12. 证明关于函数 $y=[x]$ 的如下等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1$；　　(2) 当 $x<0$ 时，$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$.

证　(1) 由定义知，$\forall\alpha\in\mathbf{R}_+$ 有 $[\alpha]\leqslant\alpha<[\alpha]+1$，得

$$\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1\Rightarrow\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x},\quad \text{即}\quad 1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1.$$

(2) 由定义知，$\forall\beta\in\mathbf{R}_-$ 有 $\beta-1<[\beta]\leqslant\beta$，得

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}\Rightarrow1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant1.$$

§4　具有某种特性的函数

1. 证明：$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

证　当 $x=0$ 时，

$$f(0)=0,$$

当 $x\neq0$ 时，

$$|f(x)|=\frac{|x|}{x^2+1}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2},$$

即 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$. 故 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

2. (1) 叙述无界函数的定义；

(2) 证明：$f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数；

(3) 举出函数 f 的例子，使 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的无界函数.

解　(1) 定义：设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若对 $\forall M>0$，$\exists x\in D$，使 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为数集 D 上的无界函数.

(2) 对 $\forall M>0$，取 $x_0=\sqrt{\frac{1}{M+1}}\in(0,1)$，则有

$$|f(x_0)|=|M+1|=M+1>M,$$

故 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数.

(3) 例：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\in(0,1),\\ \frac{1}{2}, & x=0,x=1,\end{cases}$$

由(2)知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 为无界函数.

3. 证明下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $y=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增；　　(2) $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增；