Piecewise Deterministic
Markov Skeleton Processes
Piecewise Deterministic Markov Skeleton Processes

逐段决定
马尔可夫骨架过程

● 刘国欣 侯振挺 邹捷中/著

● 湖南科学技术出版社

Piecewise Deterministic Markov Skeleton Processes

PIECEWISE DETERMINISTIC
MARKOV SKELETON PROCESSES

● HUNAN SCIENCE & TECHNOLOGY PRESS

Piecewise Deterministic Markov Skeleton Processes

逐段决定
马尔可夫骨架过程

● 刘国欣 侯振挺 邹捷中 / 著

Liu Guoxin Hou Zhenting Zou jiezhong

● 湖南科学技术出版社

Piecewise Deterministic Markov Skeleton Processes

PIECEWISE DETERMINISTIC
MARKOV SKELETON PROCESSES

● HUNAN SCIENCE & TECHNOLOGY PRESS

逐段决定马尔可夫骨架过程
著　　者：刘国欣　侯振挺　邹捷中
责任编辑：胡海清
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路 66 号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731—4441720
印　　刷：湖南省新华印刷二厂
　　　　　(印装质量问题请直接与本厂联系)
厂　　址：邵阳市双坡岭
邮　　编：422001
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：2000 年 9 月第 1 版第 1 次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：6
插　　页：5
字　　数：150000
书　　号：ISBN 7-5357-3052-3/O·189
定　　价：30.00 元

作者简介

刘国欣
Liu Guoxin

河北工业大学教授，1960 年 6 月生，河北任丘人。1982 年和 1987 年在河北工学院（现河北工业大学）分别获得学士学位和理学硕士学位。师从侯振挺教授，学习与研究马尔可夫骨架过程，1998 年获博士学位。1996 年晋升为教授。主要研究领域为极限理论与逐段决定马尔可夫骨架过程。主持或参加 4 项省和国家自然基金项目。发表论文 20 余篇。现任河北工业大学文理学院院长。

侯振挺
Hou Zhenting

我国著名数学家，长沙铁道学院教授，博士生导师，1936 年生，河南密县人，1960 年毕业于唐山铁道学院，对马尔可夫过程理论的发展作出了卓越贡献，发表论文 70 余篇，专著 7 本，自 1978 年来，培养博士生 17 名，硕士生 37 名。他曾获得 1978 年国际戴维逊奖。1982 年以来，他获得过国家及省、部级奖励 10 多项，1984 年被评为“国家级有突出贡献的科技专家”。他是第五、六、七、八届全国人大代表，全国劳动模范。近年来，他和他的学生对马尔可夫决策过程进行了一系列深入研究，并提出了有广泛应用前景的马尔可夫骨架过程新概念，进而奠定了这类过程的理论基础。

邹捷中
Zou Jiezhong

长沙铁道学院教授、博士生导师。1947 年生，湖南省新化县人。师从著名数学家侯振挺教授学习与研究马尔可夫过程，1987 年获博士学位，同年获国际戴维逊奖，此后获多项部、省级奖励。1992 年被评为“铁道部有突出贡献的科技专家”。

序

PREFACE

周知，事物的发展总是从量变到质变，再从质变到量变这样交替发展的过程.因此，各种既有连续的渐进变化又有瞬时跳跃的混杂系统模型建立与研究日渐得到众多领域的广大学者关注.相继出现了半马尔可夫过程以及半再生过程、逐段性过程、跳线性系统等各种混杂系统模型，但这些模型大都未得到较好发展.有鉴于此，在总结各种混杂系统模型的基础上，我们于 1997 年提出了马尔可夫骨架过程概念，它几乎囊括了所有现存备受关注的混杂系统模型.经过这几年研究，在理论方面已取得了系统的成果，基础已经奠定，在应用方面已展现出其广阔的发展前景.当时刘国欣教授正在我这里攻读博士学位，他以应用最广泛的一类马尔可夫骨架过程——逐段决定马尔可夫过程为其博士论文的选题.本书大部分内容是刘国欣教授的学位论文以及我们有关逐段决定马尔可夫骨架过程和马尔可夫骨架过程的成果的总结.

在我们的研究和本书的写作过程中，得到了王寿仁、梁之舜、王梓坤、严士健、苗邦均、陈希孺、马志明、严加安、胡迪鹤、吴荣、戴永隆、刘文、陈木法、吴今培、李致中、肖果能、刘再明、张汉君、李俊平、袁成桂、俞政、尹清非、罗交晚、于贵穴、黄炳焱、方小斌、胡达轩、言军等同志的支持和帮助；得到国家自然科学基金和河北省自然科学基金资助；中南大学和河北工业大学的领导自始至终关注着本书的出

版;湖南科学技术出版社及胡海清编审为此书的出版倾注了大量的精力,在此,一并致谢.

由于作者水平有限,书中不当与错误之处在所难免,希望同行学者不吝赐教.

侯振挺

2000 年夏

目录

CONTENTS

绪　论

PIECEWISE DETERMINISTIC MARKOV SKELETON PROCESSES

严格说来，任何系统的发展演化均可用随机过程来刻划. 自从随机过程的概念诞生以来，各种各样的模型不断涌现. 到目前为止，随机过程的研究大致可分为两大类：一类是描写事物渐进变化的轨道连续过程；另一类是描写事物飞跃与突变的跳跃过程. 然而，事物的发展总是从量变到质变，再从质变到量变，这样交替发展变化的过程. 近 20 年来，各种既有连续的渐进变化又有瞬间的跳跃的混杂系统模型的研究，得到了众多学者特别是应用随机过程的诸多领域，如系统建模，随机控制，金融保险等领域学者的关注. 有鉴于此，在总结各种现存随机模型的基础上，1997 年侯振挺教授等放弃了马尔可夫过程过强的限制，提出了马尔可夫骨架过程的概念. 所谓马尔可夫骨架过程，是指在一列随机时刻具有马尔可夫性的过程.

逐段决定马尔可夫骨架过程，简称逐段决定过程，是应用最广泛的一类马尔可夫骨架过程. 它在一列随机时刻具有马尔可夫性，在相邻两个这样的随机时刻之间按决定性系统演化. 作为描写连续时间非扩散随机系统的一般模型，逐段决定过程具有相当的普遍性，几乎涵盖了所有现存连续时间非扩散随机模型. 在随机服务系统（排队论）、控制与优化、金融、保险、生态学等诸多领域有着广泛应用.

逐段决定过程这一术语源于英国学者 Davis 1984 年提出的 PDP (Piecewise Deterministic Process)模型. Davis 的 PDP 是逐段决定过程

的特例,它限制过程的随机跳依 Poisson 型发生,而且是马尔可夫过程. Davis 的模型一经提出立即引起了欧美学者的关注. Vermes (1985), Gugerli(1986), Costa & Davis(1988,1989), Lenhart(1989), Gatarek(1990,1991,1992), Dempster(1991), Dempster & Juan Juan Ye(1992,1993,1995) 等相继开展了 Davis PDP 的控制理论的研究. PDP 的理论亦广泛地应用于具体随机模型的研究,如 Davis, Dempster, Sethi & Vermes (1989) 的扩容模型, Costa & Davis (1989) 及 Costa (1991)的修理店模型, Waters 等(1991)的终身健康保险模型等. 有关结果可参见 Davis (1993)的专著《马尔可夫模型与优化》(Markov Models and Optimization). 特别值得提出的是, Dassios & Embrechts (1989) 和 Embrechts & Schmidli (1994) 应用 PDP 理论,大大发展了保险风险模型,使模型更加接近于实际.

全书共分五章. 第一章给出本书所需的某些基本概念和已知结果,内容包括 Polish 空间,最小非负解理论,单调类定理,过程与停时,离散型流等. 最小非负解理论是研究马尔可夫跳跃过程的强有力的工具. 本书仅在第 3 章的 § 3.2 和 § 3.3 将最小非负解理论应用于逐段决定过程的研究,但已显示了最小非负解理论在逐段决定过程的研究中的适用与有效性. 我们对离散型流的概念作了推广,目的在于使之适于一般非正则过程. 第 2 章讨论一般跳跃过程的鞅表示理论. 这一理论在一般随机过程著作中少有系统介绍,但在应用随机过程的研究中是基本的. 我们基本采用 Davis (1993)的方式叙述,并对 Davis (1993)关于一般跳跃过程的局部鞅表示的主要定理作了改进.

第 3 章和第 4 章是本书的主体. 周知,马尔可夫过程研究至今已形成了丰富而深刻的理论体系. 因此,马尔可夫建模成为当今随机系统建模的主旋律. 但现实中,一个随机过程是否为马尔可夫过程往往并非一目了然. 从建模的观点看,一个随机系统在某些固定或随机时刻所呈现的"无后效性"通常很容易看清楚. 因此,以马尔可夫骨架过程作为系统建模的出发点是方便的. 另一方面,从马尔可夫过程的理论不难发现,很多结果并不本质地依赖过程在任一时刻的马尔可夫

性.因此,从马尔可夫过程的概念到马尔可夫骨架过程概念的引入,应该说,是颇为自然的事情.但却经历了近一个世纪的漫长岁月.第3章首先从马尔可夫骨架过程的一般概念和简单性质出发,给出了逐段决定马尔可夫骨架过程(逐段决定过程)的定义及等价条件,向前向后方程;借助于最小非负解理论,研究逐段决定过程的正则性,首达时间的分布和矩等.其次给出了逐段决定过程成为(强)马尔可夫过程的充要条件.这一条件的意义在于,一旦建立了系统的逐段决定过程模型,很容易验证此模型是否为马尔可夫模型;如果不是马尔可夫模型,可明了其不成为马尔可夫模型的原因,为进一步建立马尔可夫模型指明了方向.这一章的最后详细讨论了借助补充变量的马尔可夫建模的一般方法.

与马尔可夫跳跃过程比较,逐段决定马尔可夫过程具有鲜明特点.首先,马尔可夫跳跃过程首次随机跳时服从指数分布,即便是带跳扩散过程(diffusion process with jump)的研究亦假定了跳时的Poisson型,而逐段决定马尔可夫过程首次随机跳时的分布可能取任意分布.由逐段决定马尔可夫过程的研究我们容易看到,几何分布——这一与指数分布并肩的唯一离散型“无记忆”分布——在马尔可夫过程理论中的地位.其次,逐段决定马尔可夫过程建立了马尔可夫过程与半动力系统理论的深刻而直接的联系.可以说,去掉随机性的马尔可夫过程是半动力系统,而半动力系统的直接推广就是马尔可夫过程.它们所刻划的系统具有同样的性质:在取定了计时起点后,系统当前的状态决定它将来的状态.因此,马尔可夫过程与半动力系统具有深刻联系是自然的.再次,随机分析的思想方法在逐段决定马尔可夫过程的研究中具有不可替代性.特别是始于Strook-Varadhan (1979)的马尔可夫过程鞅问题的广义生成算子思想,较强生成算子理论更适于逐段决定马尔可夫过程的研究.第4章从半动力系统与逐段决定马尔可夫过程的联系出发,给出了逐段决定马尔可夫过程的基本概念和性质;借助于一般跳跃过程的局部鞅表示理论,给出了广义生成算子的刻划与Ito公式;基于此,进一步研究逐段决定马尔可夫过程

泛函的期望的计算问题，给出了过程泛函的期望所满足的脉冲积分微分方程；最后，建立了逐段决定马尔可夫过程与其嵌入链的平稳分布间的联系.

第 5 章介绍逐段决定马尔可夫过程理论在风险理论中的应用. 风险理论的研究基本上是，在考虑到各种经济环境因素的基础上，建立更贴近实际的风险模型，得到有实际意义的结论并给出其风险论中的解释. 近 20 年来，各种各样的马尔可夫模型的研究已经成为风险理论研究的主旋律. 特别是在破产理论的研究中，基于马尔可夫过程广义生成算子理论的方法，已成为几近程式化的研究风险理论的方法. 第 5 章首先从经典风险模型出发，纳入逐段决定马尔可夫过程框架，导出破产理论的经典结果；接着讨论加入各种经济环境因素的模型推广. 重点是介绍基于逐段决定马尔可夫过程理论的研究方法.

本书组织材料的原则是对熟悉测度论基础与基本随机过程理论的读者自封闭. 我们选择了从基本概念出发，循序渐进地展开，力图反映作者在逐段决定马尔可夫骨架过程研究中的最新进展，其中也参考和引用了他人的成果.

我们对逐段决定马尔可夫骨架过程表现出的偏爱可能有以下理由：一是马尔可夫过程的理论虽然日臻完善，但仍有诸多困惑. “不识庐山真面目，只缘身在此山中. ”容度理论放弃了测度可加性的限制，解决了测度论中普遍可测性问题. 同样地，由于放弃了马尔可夫过程过强的限制，我们推广了 Davis PDP 的概念. 二是架起 Q 过程与扩散过程间的桥梁. 粗略地说，Q 过程对应代数方程，扩散过程对应偏微分方程，而逐段决定过程对应常微分方程. 三是为随机分析的研究提供直观背景. 除了 Ito 随机积分的概念外，它几乎涉及了随机分析各个重要方面. 更重要的是，逐段决定过程与现代控制与优化，金融，保险等领域的直接而且深刻的联系，便于研究者选题和把握所选题目的意义. 而理论与应用的水乳交融，更利于理论与应用两方面的深入发展.

第1篇

预备知识

[illegible]

1 基本知识

§1.1 Polish 空间与单调类定理

Polish 空间是概率论中经常用到的一类拓扑空间. 这是因为这类空间足够广泛且具良好的性质.

定义 1.1.1 设 E 为一可分拓扑空间. 如果在 E 上存在与其拓扑相适应的距离 d, 使 (E,d) 为一可分完备距离空间, 则称 E 为 Polish **空间**.

这里称距离空间是**完备的**, 如果空间中的基本列皆收敛. 注意, 完备性概念不是拓扑概念: 一个完备距离空间可以改赋以一等价距离变成非完备的.

定理 1.1.2 Polish 空间的任一开(闭) 子空间仍为 Polish 空间.

证明 设 E 为 Polish 空间. 由于 E 的每个子空间都是可分的, 只需证明其任意开(闭) 子空间可赋予完备距离.

设 d 为 E 的一完备距离. 如果 F 为 E 的闭子空间, 则 d 在 F 上的限制 d_F 即为 F 的完备距离.

设 U 为 E 的任一开子空间. 不妨设 $U \neq E$. 则

$$d_0(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| \tag{1}$$

定义一 U 上的距离. 由三角不等式知

$$|d(x,U^c) - d(y,U^c)| \leqslant d(x,y),$$

故 $d(x,U^c)$ 是关于 x 的连续函数. 因此, 任一 U 中的序列 (x_n) 按 d 收敛