

概率论与数理统计

崔海英 等 编



科学出版社
www.sciencep.com

概率论与数理统计

崔海英 等 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是按照我国现行的工科大学本科“概率论与数理统计”课程教学基本要求编写的. 全书主要包括: 随机事件与概率, 随机变量及其分布, 随机变量的数字特征, 数理统计的基本概念, 统计推断, 方差分析与回归分析, 贝叶斯公式与条件分布, 大数定律与中心极限定理及其应用, 随机过程, SPSS 的简单应用. 书中有些内容加了“※”号, 选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲.

本书适用于高等学校工科类、经济管理类及医学类的本科各专业.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/崔海英等编. —北京: 科学出版社, 2010
ISBN 978-7-03-028138-8

I. ①概… II. ①崔… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 120987 号

责任编辑: 张中波 / 责任校对: 刘小梅
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京市农林印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010 年 6 月第一次印刷 印张: 16 1/4

印数: 1—3 000 字数: 360 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序 言

我国的高等教育近年来有了很大变化与发展,在大学生人数不断增加的同时,新办专业也在不断增加,大学教育已经从精英教育走向了大众化、普及化教育.面对新的教育形势、不同专业的培养目标及不同学校的生源特点,编写符合各种需要及要求的教材是形势发展的必然要求.

我校教学一线的教师们,经过多年的教学实践及长期思索,为非重点院校工科类、经管类的本科生及专升本的学生,编写了这本《概率论与数理统计》教材.

本教材的编写充分考虑到非重点院校的一般工科类、经管类的本科生及专升本学生的特点,调整了教学内容,讲述了易于学生掌握的概率统计中最基本的概念、理论和最常用的基本方法,达到让学生了解基本思想、掌握基本运算和基本方法的目的,同时突出了概率论与数理统计的应用性,举例贴近生活,源于实际.

在不降低对概率统计课程的基本要求的基础上,本教材兼顾传统理论与时代发展.例如:

(1) 舍去了一般教材中关于古典概率模型比较详细的讨论,重点介绍了在统计部分涉及的相关概率论的概念;

(2) 通过实际的例子引入概念,对某些定理的证明进行了简化处理;

(3) 根据目前高中教材内容的变化及生源特点,增加了准备知识和衔接内容;

(4) 融入案例分析与统计软件(SPSS 软件)介绍,旨在提高学生解决实际问题的能力.

相信本教材的出版将有益于高等教育事业的发展,并希望作者在今后的教学中不断完善教材内容.同时欢迎更多适合不同水平学生、不同专业需求的数学教材问世.

黄 兰 开

2010 年 4 月 25 日

前 言

目前在普通高校的工科类、经济管理类专业都普遍开设有“概率统计”、“数理统计”等必修课,有的甚至还开设有“实用统计方法”等选修课,以适应社会发展对统计分析任务日益增多的需求.现在,“概率论与数理统计”是高等学校工科类、经济管理类及医学类的本科各专业的一门重要的基础理论课.

概率统计是一门实用性较强的学科,但实际情况是课时受限,因此我们编写这本教材的主要思路如下:首先根据生源特点及目前高中教材内容的变化,注重衔接,增加了准备知识的章节.其次对内容有所取舍,突出重点.本书的特点是概率论和数理统计的内容各占一半,相对于传统的概率论与数理统计教材,概率部分略有减弱,统计部分有所加强,因此在概率论部分关于古典概型只是一般讨论,关于概率论的大部分知识是点到为止,但是却加强了对于非常重要的正态分布的学习.编写中注重概念和理论的直观解释,尽量避免纯数学化的论证,同时保持内容的完整性和严谨性;注重概率统计方法在各个领域的应用,侧重对概率统计方法的介绍,培养学生对基本概念的正确理解及对常用方法的熟练掌握;介绍统计理论时,更偏重于方法和统计背景的介绍,同时以 SPSS 软件为平台,介绍各种统计方法的应用实现,旨在强调理论与应用的有机结合.希望通过本书的学习,使学生掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论及相应的处理随机事件的基本思想和方法,培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力.

本书中的例题有相当一部分来自于实际问题,以实际问题为背景,举例贴近生活,消除学生对数学的陌生感、抽象感,增强学好数学、用好数学的信心,并且对一些例子的计算步骤和结论有较详细的讨论.希望通过实例的讨论,使读者对于应用中遇到的问题会进行分析,并能够得出相应的结果.

本书是按照我国现行的工科大学本科“概率论与数理统计”课程教学基本要求编写的.全书主要内容包括:随机事件与概率,随机变量及其分布,随机变量的数字特征,数理统计的基本概念,统计推断,方差分析与回归分析,贝叶斯公式与条件分布,大数定律与中心极限定理及其应用,随机过程,SPSS 的简单应用.书中有些内容加了“※”号,选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲.

前 言

本书由崔海英任主编,杨静任副主编.参加本书编写的老师有:陈冬、尚学海、崔海英、冯远福、杨静、崔菊莲.全书由陈冬、崔海英、杨静统稿、校订.

北京工业大学高旅端教授详细审阅了本书初稿,并提出了宝贵意见与建议.北京联合大学任开隆教授也对本书提出了建设性意见.在本书编写和出版过程中得到了科学出版社的大力支持,同时北京联合大学教务处、基础部也给予了很多指导与关怀,在此一并表示衷心的感谢.

由于编写时间仓促,编者水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正.

编 者

2010年3月

目 录

序言

前言

第 0 章 准备知识	1
0.1 数学符号“ $\sum$ ”和“ $\prod$ ”	1
0.2 概率统计中若干常用基本概念	4
0.3 排列与组合	7
0.4 什么是概率和数理统计	10
阅读材料	12
第 1 章 随机事件与概率	16
1.1 随机事件	16
1.1.1 随机试验	16
1.1.2 样本空间	17
1.1.3 随机事件	17
1.1.4 事件之间的关系与运算	18
1.2 随机事件的概率	21
1.2.1 事件的频率	21
1.2.2 事件的概率	22
1.3 古典概型	24
1.4 条件概率, 概率的乘法公式	27
1.4.1 条件概率	27
1.4.2 乘法公式	29
1.4.3 全概率公式	30
1.5 事件的独立性	31
1.5.1 两个事件的独立性	31
1.5.2 多个事件的独立性	32
阅读材料	33

目 录

习题一	35
第2章 随机变量及其分布	38
2.1 随机变量	38
2.2 离散型随机变量	39
2.2.1 离散型随机变量的定义	39
2.2.2 两点分布	39
2.2.3 n 重伯努利试验、二项分布	40
2.2.4 泊松分布	40
2.3 连续型随机变量	40
2.3.1 连续型随机变量的定义	41
2.3.2 均匀分布	42
2.3.3 指数分布	42
2.3.4 正态分布	43
2.4 随机变量的分布函数	46
2.4.1 分布函数的定义	46
2.4.2 离散型随机变量的分布函数	47
2.4.3 连续型随机变量的分布函数	48
2.5 随机变量函数的分布	48
2.6 多维随机变量	51
2.6.1 二维离散型随机变量、边缘分布律、独立性	51
2.6.2 二维连续型随机变量、边缘概率密度函数、独立性	54
2.7 多维随机变量函数的分布	57
阅读材料	60
习题二	62
第3章 随机变量的数字特征	67
3.1 数学期望	67
3.1.1 数学期望的定义	67
3.1.2 数学期望的性质	72
3.2 方差	73
3.2.1 方差的定义	74
3.2.2 方差的性质	76

3.3 协方差和相关系数	78
阅读材料	80
习题三	81
第4章 数理统计的基本概念	85
4.1 总体、随机样本与统计量	85
4.1.1 总体、随机样本	85
4.1.2 统计量	87
4.2 抽样分布及其上 α 分位点	89
4.2.1 χ^2 分布	89
4.2.2 t 分布	91
4.2.3 F 分布	92
阅读材料	93
习题四	94
第5章 统计推断	96
5.1 参数估计	96
5.1.1 估计量的评价标准	97
5.1.2 矩估计	100
5.1.3 极大似然估计	103
5.2 区间估计	108
5.2.1 置信区间的概念	109
5.2.2 置信区间的求法	110
5.2.3 正态总体均值与方差的区间估计	111
5.2.4 单侧置信区间	117
5.3 假设检验	118
5.3.1 假设检验的基本步骤	119
5.3.2 双边检验和单边检验	121
5.3.3 正态总体的几个检验问题	123
阅读材料	128
习题五	130
第6章 方差分析与回归分析	133
6.1 单因素的方差分析	133

目 录

6.1.1 问题的提出	133
6.1.2 模型结构	135
6.1.3 检验统计量	138
6.1.4 方差分析表	139
6.2 一元回归分析	141
6.2.1 一元线性回归模型	142
6.2.2 a, b 的最小二乘估计	143
6.2.3 最小二乘估计 $a, \hat{b}$ 的性质	145
6.2.4 σ^2 的估计	146
6.2.5 线性假设的显著性检验	147
6.2.6 新观察值的预测	149
阅读材料	150
习题六	151
第7章 贝叶斯公式与条件分布	155
7.1 贝叶斯公式	155
7.2 条件分布	157
7.2.1 离散型随机变量的条件分布	158
7.2.2 连续型随机变量的条件分布	158
*7.3 贝叶斯估计	161
7.3.1 问题的提出	161
7.3.2 贝叶斯估计	161
7.3.3 贝叶斯假设	163
7.3.4 共轭分布	165
习题七	167
第8章 大数定律与中心极限定理及其应用	169
8.1 大数定律	169
8.1.1 切比雪夫不等式	169
8.1.2 依概率收敛	170
8.1.3 大数定律	170
8.2 中心极限定理	172
8.2.1 依分布收敛	172

8.2.2 中心极限定理	172
8.3 中心极限定理的几种用法	176
习题八	179
第9章 随机过程	181
9.1 随机过程的定义	181
9.1.1 有关随机过程的几个实例	181
9.1.2 随机过程的有关定义	182
9.1.3 随机过程的分布函数和数字特征	184
9.2 几类重要的随机过程简介	187
9.2.1 独立增量过程	187
9.2.2 计数过程	188
9.2.3 泊松过程	190
9.2.4 维纳过程(布朗运动)	192
9.3 马尔可夫链	193
9.3.1 马尔可夫链的定义	194
9.3.2 多步转移概率矩阵	197
9.3.3 遍历性	201
9.4 平稳过程	205
9.4.1 严平稳过程的定义和数字特征	205
9.4.2 宽平稳过程	206
阅读材料	209
习题九	210
第10章 SPSS 的简单应用	214
10.1 SPSS 简介	214
10.2 数理统计问题的 SPSS 求解	216
习题答案	227
参考文献	238
附录	239

第0章

准备知识

本章叙述一些准备知识,其中包括概率统计一些常用公式和简化计算方法,介绍了均值、方差、中位数等基本概念,为今后各章的学习提供一个更直观的背景.同时还介绍了概率统计的应用实例,以了解如何运用概率统计的思想方法.

0.1 数学符号“ $\sum$ ”和“ $\prod$ ”



0.1.1 求和号 $\sum$

$\sum$ 是一个符号,表示若干个数的连加. n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 相加,可用 $\sum_{i=1}^n a_i$ 表示,即

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

式中 i 称为流动下标(均为整数), a_i 称为通项.很明显

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{d=1}^n a_d.$$

可见流动下标用什么符号表示对求和没有影响,这一点我们以后要常常用到.其次,只有通项 a_i 有了明确的定义时,求和才有意义.例如 $a_i = x^i$,则有 $\sum_{i=1}^k a_i = x + x^2 + \dots + x^k$.

下面给出求和号今后常用的几个运算性质.

性质 0.1.1 $\sum_{i=1}^n c = nc$ (特别有 $\sum_{i=1}^n 1 = n$).

证明 按定义,通项 $a_i = c$, 因此

$$\sum_{i=1}^n c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n\text{个}} = nc.$$

性质 0.1.2 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$

证明
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.\end{aligned}$$

性质 0.1.3 $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i.$

证明
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n ca_i &= ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= c \sum_{i=1}^n a_i.\end{aligned}$$

例 0.1.1 (等差数列求和) 设 $a_i = a + id (i=0, 1, 2, \cdots, n)$, 求 $\sum_{i=0}^n a_i$ 的值.

解
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n i &= 0 + 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + n + 1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{1}{2}[(1 + n) + (2 + n - 1) + \cdots + (n + 1)] \\ &= \frac{1}{2}n(n + 1),\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (a + id) &= \sum_{i=0}^n a + \sum_{i=0}^n id = \sum_{i=0}^n a + d \sum_{i=0}^n i = (n + 1)a + d \sum_{i=0}^n i \\ &= (n + 1)a + d \cdot \frac{1}{2}n(n + 1) \\ &= (n + 1) \cdot \frac{1}{2}[a + (a + nd)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{项数} \cdot (\text{首项} + \text{末项}).\end{aligned}$$

例 0.1.2(等比数列求和) 设 $a_i = x^i, x \neq 1, i = 0, 1, 2, \dots, n$, 求 $\sum_{i=0}^n a_i$ 的值.

解 记 $s_n \triangleq \sum_{i=0}^n a_i, n = 0, 1, 2, \dots$, 于是

$$s_0 = a_0 = x^0 = 1,$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = x^0 + x = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}, \quad (x \neq 1),$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = x^0 + x + x^2 = 1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}, \quad (x \neq 1),$$

容易看出

$$\begin{aligned} & (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) \\ &= 1+x+x^2+\dots+x^n - x - x^2 - \dots - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}. \end{aligned}$$

因此有

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad (x \neq 1),$$

即

$$\sum_{i=0}^n a_i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad (x \neq 1),$$

由此可知

$$\sum_{i=0}^n ax^i = \frac{a(1-x^{n+1})}{1-x}, \quad (x \neq 1).$$

例 0.1.3(双重连加号)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} &= \sum_{i=1}^m (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}) \\ &= (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n}) + \\ &\quad \dots + (a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn}) \end{aligned}$$

0.1.2 连乘号 $\prod$

$\prod$ 是一个符号, 表示若干个数连乘. n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 相乘, 可用 $\prod_{i=1}^n a_i$ 表示, 即

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

式中 i 称为流动下标(均为整数), a_i 称为通项. 很明显

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k.$$

下面给出求连乘号今后常用的几个运算性质.

性质 0.1.4 $\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$. (读作 n 的阶乘)

性质 0.1.5 $\prod_{i=1}^n c = c^n$.

证明 按定义, 通项 $a_i = c$, 因此

$$\prod_{i=1}^n c = \underbrace{c \cdot c \cdot \cdots \cdot c}_{n\uparrow} = c^n.$$

性质 0.1.6 $\prod_{i=1}^n ca_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i$

证明 $\prod_{i=1}^n ca_i = (ca_1) \cdot (ca_2) \cdot \cdots \cdot (ca_n)$
 $= c^n \prod_{i=1}^n a_i$

0.2 概率统计中若干常用基本概念



0.2.1 均值

定义 0.2.1 给定一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 我们称

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

为该组数据的均值.

均值就是通常所说的算数平均数, 或简称为平均数. 像“平均身高”、“平均成绩”、“平均产值”等在日常生活中经常使用, 是人们所熟悉的概念. 由于均值反映一组数的总的情况, 所以它具有代表性, 且 $\bar{x}$ 具有如下性质:

性质 0.2.1 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$.

证明 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \bar{x}$
 $= \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0.$

性质 0.2.2 $\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 \geq \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 等号当且仅当 $c = \bar{x}$ 时成立.

$$\begin{aligned} \text{证明 } \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 &= \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + n(\bar{x} - c)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2, \end{aligned}$$

因为 $(\bar{x} - c)^2 \geq 0, n > 0$, 所以 $n(\bar{x} - c)^2 \geq 0$, 且 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 与 c 无关, 所以 $\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 \geq \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 恒成立, 且等号仅在 $c = \bar{x}$ 时成立.

0.2.2 加权平均数

定义 0.2.2 给定一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 又给定了一组正数 $p_1, p_2, \dots, p_n$, 且 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, 则称

$$\bar{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的加权平均数, p_i 称为 x_i 的权.

由定义不难看出以下三点:

(1) 对于同一组数, 给出不同的权(只要满足权均为正数及和为 1 两个条件), 可得出不同的加权平均数, 即同一组数的加权平均数不止一个.

(2) 对于一组数, 用某一组不全相等的数进行加权平均时, 权较大的数据对加权平均的结果影响较大. 例如用不同的仪表测量物体运动的速度, 有的仪表精度高, 有的就差, 把它们所测得的数据等同看待, 显然是不妥的, 就应对不同精度的仪表所测得的数据赋以不同的权, 然后求加权平均数.

(3) 一般的均值(算术平均数)也可看作是一种加权平均数, 相应的权 p_i 全一样, 都是 $\frac{1}{n}$. 也就是说, 求均值时, 我们是把 n 个数据等同看待的.

0.2.3 中位数

定义 0.2.3 将一组(有限个)数据, 按从小到大的次序排好, 设为

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad x_i \leq x_j, \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

当 n 为奇数时, 我们称 $M = x_{\frac{n+1}{2}}$ 为这一组数据的中位数;

当 n 为偶数时, 我们称 $M = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ 为这一组数据的中位数.

在有些实际问题中, 常用中位数作一组数据的代表值.

0.2.4 方差与标准差

定义 0.2.4 给定一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 我们称

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

为这一组数据的方差. 其中 $\bar{x}$ 为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的均值; 称

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

为这一组数据的标准差.

很明显, s^2 是各 x_i 与 $\bar{x}$ 的偏差之平方 $(x_1 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2$ 的均值的 $\frac{n}{n-1}$ 倍, 是平方偏差, 因此称它为方差. 标准差 s 是方差 s^2 的算术平方根, 它与 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 有相同的度量单位. 容易看出, s^2 越大, 这组数据就越“分散”, 或者说, 这组数据的变异性(即互相不同的程度)就越大; s^2 越小, 这组数据的变异性就越小, 也就更“集中”. 当 $s^2 = 0$ 时, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x}$, 就没有变异.

因此, 对一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 作分析时, $\bar{x}$ 与 s (或 s^2) 是最常用的两个量: $\bar{x}$ 是代表性的值; s 或 s^2 是描述数据的变异性的值.

0.2.5 简化算法

在概率统计中经常会遇到均值、方差的计算, 为了使计算简化, 下面几个公式是经常会用到的.

命题 0.2.1 若 s^2 是一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差, 则

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right).$$

证明 由定义 0.2.4 知, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot \bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + n \cdot \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2, \end{aligned}$$

所以