

[美] 斯蒂芬·弗莱彻·休森 著

邹建成 杨志辉 刘喜波等 译

朱惠霖 校

A MATHEMATICAL BRIDGE

An Intuitive Journey in Higher Mathematics

数学桥

对高等数学的一次观赏之旅



[美] 斯蒂芬·弗莱彻·休森 著
邹建成 杨志辉 刘喜波等 译
朱惠霖 校

A MATHEMATICAL BRIDGE

An Intuitive Journey in Higher Mathematics

数学桥

对高等数学的一次观赏之旅



图书在版编目(CIP)数据

数学桥——对高等数学的一次观赏之旅/(美)休森著;
邹建成等译. —上海:上海科技教育出版社,2010.8

ISBN 978-7-5428-4981-6

I. ①数… II. ①休…②邹… III. ①高等数学—高
等学校—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 035412 号

A Mathematical Bridge:
An Intuitive Journey in Higher Mathematics
by
Stephen Fletcher Hewson

Copyright © by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
All rights reserved.

This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means,
electronic or mechanical, including photocopying, recording
or any information storage and retrieval system
now known or to be invented,
without written permission from the Publisher.

Simplified Chinese Edition Copyright © 2010
by Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House.
上海科技教育出版社经
World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 授权
获得本书中文简体字版版权

责任编辑: 李 凌
封面设计: 童郁喜

数学桥——对高等数学的一次观赏之旅

[美] 斯蒂芬·弗莱彻·休森

邹建成 杨志辉 刘喜波等 译

朱惠霖 校

出版发行: 上海世纪出版股份有限公司
上海科技教育出版社
(上海市冠生园路393号 邮政编码 200235)

网 址: www.ewen.cc
www.sste.com

经 销: 各地新华书店

印 刷: 江苏启东市人民印刷有限公司

开 本: 787×1092 1/16

字 数: 547 000

印 张: 25.75

版 次: 2010年8月第1版

印 次: 2010年8月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-5428-4981-6/O·660

图 字: 09-2004-664

定 价: 59.00 元

数 学 桥 的 故 事

这座数学桥位于剑桥大学王后学院。作为架设在卡姆河一段狭窄河道上的一个小小的木结构建筑,数学桥连接着王后学院的古代部分和现代部分。这座桥据传说是由三一学院的研究员牛顿设计的。当初建造这座桥时没有用任何钉子和螺栓,它是一个用木梁相互连接而构成的复杂体,木梁以一种完全自支撑的方式装配在一起。这归功于牛顿的天才设计。这座桥经受了时间的考验,直到一个世纪后,这个学院的一群好奇的研究员决定拆解这座桥,以研究它的组成部件和内部结构。不幸的是,由于这个设计十分复杂,要把这座桥重新建造起来,只能用上许多结实的螺栓了。虽然这里不是证实或否定这个传说的地方,但它确实为本书所进行的数学讨论提供了一个有趣的比喻。

鸣 谢

许多人为这本书的诞生作出了贡献。在起始阶段,许多朋友和同事就本书的内容和风格提出了实质性的建议。在这方面,我尤其要感谢 Ed Holland 和 Dom Brecher,他们对全部初稿给出了非常详细的意见,这项工作绝非意志薄弱者所能胜任。还有许多朋友自始至终参与了或投入了各种关于抽象数学的谈话活动或者书评会。我谨在此向所有这些贡献者表示衷心的感谢,但是特别的感激之情要给予 Dave Pottinton, Darren Leonard, Philip Kinlen, Taco Portengen, Steve West, George Kaye, Ed Holland, Chris Harding, Anne-Marie Winton, Aisling Metcalfe, Sally Parker, Andy Heeley, Lynette Holland 和 Sue Harding。在这一工作中我一直受到一种专业性不那么强的支持,为此我要感谢我的家人:妈妈,爸爸, Jamie, Cheryl, Faye 和 Martin, 他们中大多数人对这本书的内容一点儿也不懂,但他们懂得它对我的意义。最后,我必须从心底深深地感谢我的妻子 Maria,在我写作这本书期间,她始终不渝地给予了超越她责任所在的支持。

序言

数学桥

大学数学难学是一个众所周知的事实。但它到底有多难，直到我开始学习大学数学时，我才明白。对于要把注意重点从高中数学中以重复性操练为基础的常规解题训练转移到作为真正数学的智力体操上来，我毫无准备。庆幸的是，在我的奋力拼搏下，我通过了最初几个月的学习，而且逐渐地开始理解正式讲课中无处不在的大量符号的含义。我发现，数学是一门既令人惊叹又让人愉悦的生机勃勃的学科，尽管它远在一条由形式化、简洁性和逻辑性构成的水流湍急、险象环生的大河的那一侧。

几年以后，我在从事研究和讲授数学的过程中，发现一代又一代的数学家苗子仍在我当初面临的同样问题作战。很自然，一些学生很突出，很快成了技巧娴熟的数学家。一些学生没能完成向更高层次数学的过渡，于是放弃，不再继续学习数学。其他一些学生很成功，这种“成功”在于能将符号搬来弄去，并在考试中取得高分，但是他们不具备任何有意义的数学悟性。第四类由有可能成为既技巧娴熟又聪颖过人的数学家的学生组成，但他们仍然觉得向更高层次数学的过渡很困难。这四类学生的共同之处是，他们都是有才能的学生，但他们在中学阶段没有接触更高层次的数学就进了大学。有那么多学生最终归于后两类，这让我一直感到吃惊。

进一步的调查发现，看来几乎没有一种图书资料能以一种清晰的、直观的，特别是以一种有趣的方式来提供这种过渡性材料。一方面，我们有着标准的教材。当然，这些教材是必需的，但从整体上讲它们也是内容非常密集、阅读非常困难、编排非常紧凑的东西，除了适用于专门的学习和参考外，其他什么都不适用。另一方面，还有许多精彩的“普及性”数学图书。然而，这些图书往往关注数学中十分前沿的尖端性研究论题，这

种论题只与一小部分成功的数学家直接相关,而且只经过数年的研究.此外,这些图书往往不包含任何实在的数学细节;它们有点像是在对数学进行观光,或对人类智能进行探视,对一个景点拍一张照,然后赶往下一个景点.虽然它们是长期灵感的重要来源,或者就是一种令人愉快的读物,但阅读这种图书几乎不需要数学技巧,人们也几乎不能从中得到任何数学技巧.

我觉得这两个极端之间肯定可以有一个折衷点:一种真正的数学书,它表述内容的风格比通常的数学书更具有谈话性、更为直观而且更为亲切.由于这些原因,我灵感迸发,着手写这本书——一本杂交型的“普及性教科书”,一本我在从事数学家职业之前就应该乐于拥有的书.本书的目标很简单:

以一种只需要基本的高中数学为起点的方式,发掘典型的数学学位课程中的核心元素和亮点.强调许多令人惊叹的结果所具有的自然之美和实用价值,同时保持数学上的纯正性.

于是,经过数年的努力,这本书现已完成,我想让它适用于以下人群:

- 有抱负的数学家,他们想更多地了解关于数学的真正艺术.
- 数学专业本科毕业生,他们愿意阅读关于其大学数学课程中各个“亮点”的一种引人入胜的概览性读物.
- 科学家、工程师和热情的业余爱好者,他们想知道数学家到底是干什么的.
- 数学教师,他们希望对较高层次的内容有一种使人耳目一新的表述,以从中找到例子来激发自己和学生的灵感.
- 进修高等数学概要或适合诗人的数学等课程的学生.

就像刚才提到的,数学是难学的.这本书也不例外.由于所述概念的丰富性,阅读本书需要在脑力上付出高度的努力.在书中各个不同的地方,需要对附录中所详细叙述的数学知识有一个基本水平上的知晓或熟悉.然而,本书非常具有谈话性,而且各个部分相对独立,因此可以在不同的深度水平上阅读.而且,一个论题对另一个论题的依赖性也保持在最低水平.只要可能,每个新章节都从头讲起,所以如果某个领域变得太难懂了,或者不令你感兴趣了,你可以转到下一个领域.此外,为了避免破坏内容的流畅性或遗漏掉作为数学思想之基础的关键点,在一些地方我对某些技术性较强的细节略而不讲.但愿这些地方已被清楚地指明,而这些省略不会影响到大多数读者.

数学是一种激动人心而又充满活力的艺术形式,我希望本书能给你带来对数学之真正意义的某种领悟.

斯蒂芬·弗莱彻·休森

2003年4月

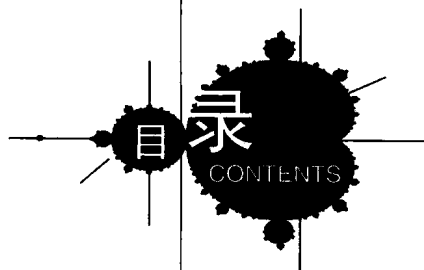


目录

CONTENTS

序言	I
1. 数	1
1.1 计数	2
1.1.1 自然数	2
1.1.1.1 自然数的构造	2
1.1.1.2 算术	3
1.1.2 整数	4
1.1.2.1 零和负整数的性质	5
1.1.3 有理数	6
1.1.4 序	6
1.1.4.1 使 \mathbb{N} , \mathbb{Z} 和 \mathbb{Q} 有序	7
1.1.5 从一到无穷大	8
1.1.5.1 无穷集的比较	8
1.1.6 无穷算术	8
1.1.7 超越 ∞	11
1.2 实数	13
1.2.1 怎样产生无理数	15
1.2.1.1 实数的代数描述	16
1.2.2 有多少个实数	17
1.2.3 代数数和超越数	18
1.2.3.1 超越数的例子	20
1.2.4 连续统假设和更大的无穷大	20
1.3 复数及其高维同伴	22
1.3.1 复数 i 的发现	22

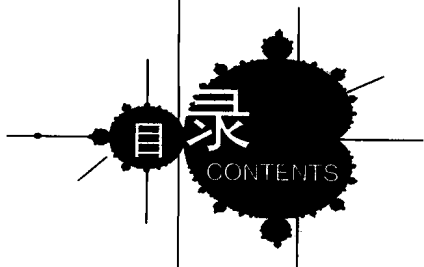
1.3.2	复平面	23
1.3.2.1	复数在几何中的应用	24
1.3.3	棣莫弗定理	25
1.3.4	多项式和代数基本定理	26
1.3.4.1	多项式方程的求解	26
1.3.5	还有其他的数吗	28
1.3.5.1	四元数	29
1.3.5.2	凯莱数	31
1.4	素数	31
1.4.1	计算机、算法和数学	32
1.4.2	素数的性质	33
1.4.3	素数有多少个	34
1.4.3.1	素数的分布	35
1.4.4	欧几里得算法	35
1.4.4.1	欧几里得算法的速度	36
1.4.4.2	连分数	37
1.4.5	贝祖引理和算术基本定理	39
1.5	模整数	40
1.5.1	模为素数的算术	41
1.5.1.1	一个关于素数的公式	42
1.5.1.2	费马小定理	43
1.5.2	RSA 密码	43
1.5.2.1	建立 RSA 体制	44
1.5.2.2	一种 RSA 密码体制	46





2. 分析	49
2.1 无穷极限	50
2.1.1 三个例子	50
2.1.1.1 阿基里斯和乌龟	50
2.1.1.2 连续复合利率	51
2.1.1.3 方程的迭代解法	53
2.1.2 极限的数学描述	55
2.1.2.1 收敛的一般准则	58
2.1.3 极限应用于无穷和	58
2.1.3.1 一个例子:几何级数	59
2.2 无穷和的收敛与发散	59
2.2.1 调和级数	60
2.2.2 收敛判别法	60
2.2.2.1 比较判别法	61
2.2.2.2 交错级数判别法	62
2.2.2.3 绝对收敛	62
2.2.2.4 比率判别法	63
2.2.3 幂级数及其收敛半径	64
2.2.3.1 确定收敛半径	65
2.2.4 无穷级数的重新排列	66
2.3 实函数	67
2.3.1 实值函数的极限	67
2.3.2 连续函数	69
2.3.3 微分	71
2.3.3.1 例子	73

2.3.3.2 微分中值定理	75
2.3.3.3 洛必达法则	77
2.3.4 面积与积分	78
2.3.5 微积分基本定理	79
2.4 对数函数和指数函数以及 e	81
2.4.1 $\ln x$ 的定义	81
2.4.2 $\exp x$ 的定义	84
2.4.3 欧拉数 e	85
2.4.3.1 e 的无理性	87
2.5 幂级数	88
2.5.1 泰勒级数	90
2.5.1.1 作为警示的例子	92
2.5.1.2 实函数的复扩张	92
2.6 π 与分析学观点下的三角学	93
2.6.1 角度与扇形面积	94
2.6.1.1 π 的一个级数展开式	95
2.6.2 正切、正弦和余弦	97
2.6.2.1 用幂级数定义 $\sin x$ 和 $\cos x$	98
2.6.3 傅里叶级数	99
2.7 复函数	102
2.7.1 指数函数和三角函数	102
2.7.2 复函数的几个基本性质	103

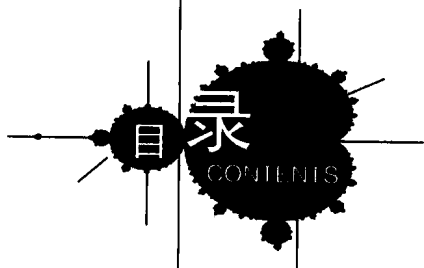


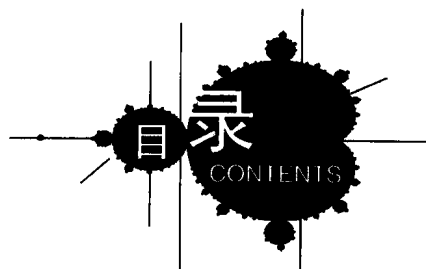
目录

CONTENTS

2.7.3 对数函数及多值函数	103
2.7.4 复数幂	105
3. 代数	107
3.1 线性性	108
3.1.1 线性方程	108
3.1.1.1 线性方程组	109
3.1.2 向量空间	111
3.1.2.1 直线、平面和其他向量空间	112
3.1.2.2 向量空间的子空间和交	113
3.1.2.3 向量的物理学例子	114
3.1.2.4 有多少个向量空间	115
3.1.2.5 向量的进一步例子	118
3.1.3 将向量空间投入应用:线性映射和矩阵	119
3.1.3.1 再探联立线性方程组	119
3.1.3.2 矩阵代数的性质	120
3.1.4 解线性方程组	121
3.1.4.1 齐次方程	121
3.1.4.2 线性微分算子	121
3.1.4.3 非齐次线性方程	122
3.1.4.4 求方阵的逆阵	122
3.1.4.5 行列式	124
3.1.4.6 行列式的性质	124
3.1.4.7 方阵的求逆阵公式	125
3.2 最优化	125
3.2.1 线性约束	125
3.2.2 单纯形法	126

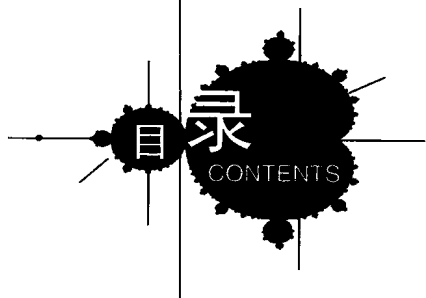
3.2.2.1 一个例子	129
3.2.2.2 食谱问题	131
3.2.2.3 运输问题	131
3.2.2.4 博弈	132
3.3 距离、长度和角度	132
3.3.1 纯量积	133
3.3.1.1 标准几何与欧氏纯量积	133
3.3.1.2 多项式和纯量积	135
3.3.2 一般纯量积	137
3.3.2.1 柯西-施瓦茨不等式	137
3.3.2.2 长度和距离的一般性质	138
3.3.2.3 不是由纯量积导出的长度	139
3.4 几何与代数	140
3.4.1 二维空间中的二次型	141
3.4.2 三维空间中的二次曲面	142
3.4.3 特征向量和特征值	143
3.4.3.1 求特征向量和特征值	144
3.4.3.2 实对称矩阵的特殊性质	144
3.4.3.3 再探二次型	146
3.4.3.4 例子再探	146
3.4.4 等距变换	148
3.4.4.1 平移	151
3.4.4.2 行列式、体积和等距变换	151





3.5 对称	153
3.5.1 对称群	154
3.5.1.1 群公理	155
3.5.1.2 再说四元数	155
3.5.1.3 模为 p 的整数乘法	156
3.5.2 对称中的对称——子群	157
3.5.2.1 有限群的特殊性质	158
3.5.3 群作用	160
3.5.4 二维和三维的墙纸	162
3.5.4.1 点阵上的墙纸	163
3.5.4.2 贴墙纸	165
3.5.4.3 对晶体学的应用	166
4. 微积分与微分方程	169
4.1 微积分的起因和内容	169
4.1.1 加速度、速度和位置	169
4.1.1.1 积分	170
4.1.2 多亏牛顿	172
4.1.2.1 一种单摆	172
4.1.2.2 从单摆到复摆	173
4.1.2.3 基于牛顿定律的微积分的发展	174
4.2 线性常微分方程	175
4.2.1 线性常微分方程的全解	175
4.2.2 非齐次方程	176
4.2.3 解齐次线性方程	177
4.2.3.1 常系数方程	177

4.2.4 幂级数解法	178
4.2.4.1 贝塞尔函数	180
4.2.4.2 一般的级数求解法	181
4.3 偏微分方程	181
4.3.1 偏导数的定义	182
4.3.2 弦振动方程	182
4.3.2.1 波动解释	184
4.3.2.2 分离变量法	185
4.3.2.3 初始条件和边界条件	185
4.3.2.4 弦乐器	186
4.3.3 扩散方程	187
4.3.3.1 太阳能加热	189
4.3.4 从实数看复导数	190
4.3.4.1 拉普拉斯方程	191
4.4 微积分与几何相遇	192
4.4.1 切向量与法向量	192
4.4.2 梯度、散度和旋度	195
4.4.3 面积分与体积分	196
4.4.3.1 高斯积分	198
4.4.3.2 散度的几何解释	199
4.4.3.3 旋度的几何解释	201
4.4.3.4 重访傅里叶	201
4.4.3.5 散度定理的应用	201
4.4.4 拉普拉斯方程和泊松方程	203



目录

CONTENTS

4.4.4.1 解拉普拉斯方程	203
4.4.4.2 泊松方程	204
4.4.4.3 边界条件与解的唯一性	204
4.5 非线性性	205
4.5.1 关于流体运动的纳维-斯托克斯方程	205
4.5.2 微分方程的扰动	207
4.5.2.1 弹道学	208
4.5.2.2 单摆并不简单	210
4.6 定性方法:不求出解的解法	213
4.6.1 解微分方程意味着什么	214
4.6.2 相空间与轨道	215
4.6.3 画出相空间轨道图	216
4.6.3.1 一阶非线性微分方程	216
4.6.3.2 二阶非线性微分方程	216
4.6.3.3 披着虎皮的简谐运动	217
4.6.3.4 非线性方程的例子	218
4.6.4 不动点附近的一般流型	221
4.6.5 例子:猎食方程	221
4.6.6 相互竞争的食草动物	223
5. 概率	227
5.1 概率论的基本概念	227
5.1.0.1 生日相同问题	228
5.1.1 两个作为警示的例子	230
5.1.1.1 比赛中止问题	230
5.1.1.2 门和山羊的问题	231