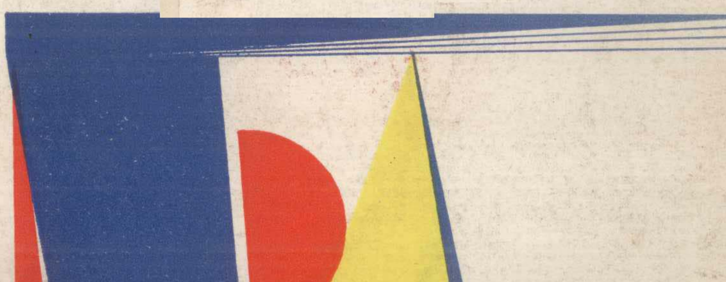
中学数学错题校正及错解辨析

主编：陈清森
乔家瑞 朱成杰



北京师范学院出版社

中 学 数 学
错题校正及错解辨析

陈清森　乔家瑞　宋成杰

北京师范学院出版社

(京)新208号

内 容 简 介

失败是成功之母。数学习题千变万化，随着题型新颖、构思巧妙的新题的不断出现，一些错题、错解也不断出现，产生众多不良影响。

本书详尽阐述了错题，错解产生的原因、表现形式、识别错题及防止错解的方法与手段，是广大中学师生学好数学、教好数学的重要参考书。

中学数学错题校正及错解辨析

编　　著	陈清森　乔家瑞　朱成杰
出版发行	北京师范学院出版社
社　　址	北京西三环北路105号(邮政编码100037)
经　　销	全国新华书店
印　　刷	北京顺义北方印刷厂
开　　本	787×1092　1/32　印　数 0,001—8,000 册
字　　数	222 千字　　印　张 10.875
版　　本	1993年10月　第1版
	1993年10月　第1次印刷
书　　号	ISBN7-81014-735-8/G·598
定　　价	6.50元

前　言

近几年来，在中学数学习题中，涌现了大量形式新颖、构思巧妙的新题目，更新了沿用多年的部分旧题。实践证明，这对于学生牢固掌握和熟练运用基础知识，培养和训练思维能力，起到了良好作用。但随之也出现了一定数量的错题、错解，甚至出现在教科书中、高考及中考题中、某些普及刊物中及复习资料中其影响较大，给教师教学、学生学习带来很多不良影响，后果十分严重。为解决这个问题，作者较详尽地阐述了错题、错解的产生原因、表现形式、识别错题及防止错解的方法及手段，并搜集了大量典型的错题及错解，供中学广大师生参考。

我们觉得本书进行这方面的研究是有价值的，这是数学教学及教学改革发展到一定阶段，必须从事的一项有意义的重要工作。同时，本书具有一定的实用价值。它可以在教与学中，防止和纠正差错；从对错题及错解的分析中，可以使学生从另一个侧面加深对知识的理解和运用，提高思维的批判性，培养严谨的治学精神。另外，在教与学中，一旦对题目的结构和解法产生怀疑时，可以使用本书查找核对，从而避免误入歧途而不能自拔，以便节省宝贵的时间。

本书是中学师生学习新课及总复习时十分有益的参考读物，是师范院校数学系学生、数学教学理论研究人员、各级各类考试命题人员的参考书；是各类考试中心筛选题目建立题库的参考书。

作　者

1992年12月

目　　录

第　一　篇

数学错题及其校正

第一章　数学错题的主要类型及产生原因

在浩瀚的数学题海中，不乏上乘之珍品，也存在一些应当摒弃或回炉的劣品．近几年来，中学数学习题如雨后春笋层出不穷，其中涌现出大量形式新颖，构思巧妙的好题目，它对培养和训练学生的思维，提高教学质量起了积极作用．随之而来也出现了一定数量的存在这样哪样缺陷或有严重问题的习题，有的流传甚广，直接影响着我们的教学．为了消除不良影响，促进教学健康发展，有必要对数学错题进行一番剖析，指出错误所在，分析产生原因，提出校正方法．

要研究错题，先要弄清什么是数学错题．众所周知，数学是一门抽象而严密的科学，由于它的特殊性决定了一道正确的数学题必需具备：科学性、严密性、完整性．有人称违背此“三性”之一者叫“病题”“有缺陷的题”等，本书把一切违背此“三性”的形形色色的存在这样哪样不足或有严重问题的数学题目统称为数学错题．

应当指出：由于某种需要，有意放宽题目条件或削弱题中的结论以降低题目的难度不算错题。

第一节　数学错题的主要类型及其校正

由于数学题目的内容十分丰富，形式各异，所以其错误的形式花样也多，自是难以说全。下面就常见的错题将其分成若干类型进行探讨。

为了后文的叙述之便，先介绍一下数学题的结构形式。就一般的数学题而言其结构形式可分为两类：其一，题目中的“条件”和“结论”都被明确提出。这类题一般是由一个数学命题加上相应的指令性语言而得。例如“平行四边形的对角线互相平分”是一个命题，加上指令“求证”，即变为“求证：平行四边形的对角线互相平分.”这就是一个数学题目。又如“$\sqrt{3}$是个无理数”这个命题加上指令“试证明”又是一个数学题，……；其二，题目中的“条件”或“结论”只知其一项，另一项则必须通过计算、推理而得。例如“求k为何值时，方程$kx^2-2x+1=0$有两个实根？”这个题目的条件是要通过推理、计算方能得到。又如“如果$A=1988^{1991}$，那么A的个位数字是几？”这个题目的结论也需通过计算、推理方能获得。本书所提到的数学题的“条件”和“结论”泛指：

（1）题目本身就存在的条件和结论。

（2）必须通过计算、推理得到该题的“条件”（或结论）与原来的“结论”（或条件）合并后的“条件”和“结论”。

一般地，一个正确的数学题，其条件之间或条件与结论

之间必需满足：第一，无矛盾性；第二，独立性；第三，完备性。一个有缺陷或有严重问题的题目往往表现为不满足上述三个条件之一。依此，我们将错题的主要类型逐一加以讨论如下。

一、题设条件自相矛盾

如果一个题目的题设具有两个或两个以上独立条件者，那么这若干独立条件必须互无矛盾或者说是相容的。例如某个题目有A、B两个独立条件(即条件A不包含条件B，同样条件B不包含条件A)，且由A成立推出B不能成立或由B成立推出A不能成立，这时，就说该题的条件是互不相容的，是相互排斥或者说是自相矛盾的。我们称这种题目犯“条件自相矛盾”的错题。

例1 若a，b为正整数，且$4ab = 4a^2 + 9b^2$，求证：

$$\lg\frac{2a+3b}{4}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

分析 本例题设有两个独立条件：(1)a，b都是正数；(2)$4ab = 4a^2 + 9b^2$。

由条件(2)，得

$$4a^2 + 9b^2 - 4ab = 0,$$

即 $$(2a-b)^2 + 8b^2 = 0 \Longrightarrow a = b = 0.$$

这同条件(1)相悖。故原题是一道犯条件自相矛盾的错题，其结论是无意义的。

更正 要修正一道错题，它的途径一般并非唯一，可以只变动条件或只更动结论或条件与结论都作适当更换。不论怎样变动，修正后的命题要保持原题的风格(或韵味)有时却不易做到，即使做到了，但题目的难易程度还会有不同。本

书对所举错题的更正，尽量做到保持或接近原题的格调，至于难易程度，则另当别论。

对本例的修正，当抓住该题的实质性的错误——条件自相矛盾入手，着重考虑变动某个条件，当然，题设条件变了其结论应作相应的变更。如将原题改为：

若a，b为正数，且$4a^2+9b^2=13ab$，求证：$\lg\frac{2a+3b}{5}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$。

例 2 已知$\sin\alpha=\frac{5}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$，且$\alpha,\beta$为锐角，求$\cos\beta$。

分析 这是一道在教材中沿用多年的三角习题，然而却是一道错题。

这是因为：$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，

而 $$\frac{2\sqrt{6}}{7}=\frac{4\sqrt{6}}{14}<\frac{11}{14}\quad(\because(4\sqrt{6})^2<11^2),$$

所以有 $$\cos(\alpha+\beta)>\cos\alpha. \tag{1}$$

已知α，β是锐角，所以$\alpha+\beta$亦为锐角。在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，余弦函数是减函数，故应有$\cos\alpha>\cos(\alpha+\beta)$。　　(2)

对比(1)，(2)两式，明显矛盾。那么，问题出在哪？

我们把原题条件分为下列三项：

(1) $\sin\alpha=\frac{5}{7}$；

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$；

（3）α，β为锐角。

事实上，由（1）和（2）成立推出（3）不能成立，由（1）和（3）成立推出（2）不能成立，同样由（2）和（3）成立推出（1）不能成立。因此，原题是一道条件自身相矛盾的错题。如果按原题条件，就会推出角$\alpha=45°35'$，$\alpha+\beta=38°13'$的荒谬结果。

更正 本例错误在于原设条件相互排斥，只要变换原题的某些条件，仍然是道好题目。修正本例，可从如下几个方面考虑：

（1）缩小$\sin\alpha$的值；

（2）缩小$\cos(\alpha+\beta)$的值；

（3）亦可将$\alpha+\beta$更换成$\alpha-\beta$等等。

例如，采取缩小$\sin\alpha$的值，将它改为：

已知$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$，且$\alpha$，$\beta$为锐角，求$\cos\beta$。

注 由改后的条件可先求出$\cos\alpha=\frac{\sqrt{8}}{3}$，再求出$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，最后由$(\alpha+\beta)$的正、余弦展开式联立解方程组，可得$\cos\beta=\frac{5\sqrt{3}+22\sqrt{2}}{42}\approx0.9470$，$\beta\approx18°44'$。

例3 已知平行四边形两邻边长为3和9，两对角线的一个交角为60°，求它的面积。

分析 为了说明方便，我们给出如下一个示意图（实际上，不存在合条件的平行四边形）。

今设$AB=3$，$BC=9$，$\angle AOB=60°$，$AO=x$，

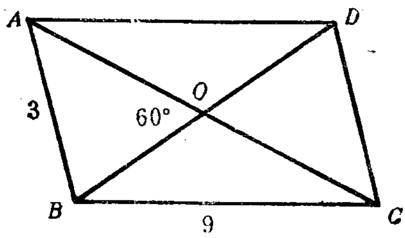


图 1-1

$BO=y$.

在$\triangle AOB$中，依余弦定理可得

$$\begin{cases}3^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ & ①\\ 9^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ & ②\end{cases}$$

由②－①，得$2xy=72$.

$\therefore \quad xy=36$.

$$\therefore \quad S_{\square ABCD}=4S_{\triangle AOB}=4\times\frac{1}{2}xy\sin 60^\circ$$

$$=36\sqrt{3}\text{（平方单位）}.$$

事实上，平行四边形两邻边的长之值确定后，以此平行四边形为矩形时的面积最大．据此，原题中所求的平行四边形面积应不大于27个平方单位，但$36\sqrt{3}>27$，故原题是个错题．

问题出在哪？下面我们做进一步的探索．

仍如图1-1所示，设$\square ABCD$邻边分别为3和9，两对角线所交之锐角为α，$OA=x$，$OB=y$.

$\because \quad S_{\square ABCD}=4S_{\triangle AOB}\leqslant 3\times 9=27$,

$\therefore \quad S_{\triangle AOB}\leqslant\frac{27}{4}. \Longrightarrow \frac{1}{2}xy\sin\alpha\leqslant\frac{27}{4}$,

$$\Longrightarrow xy\sin\alpha\leqslant\frac{27}{2},$$

$$\Longrightarrow xy\leqslant\frac{27}{2\sin\alpha} \qquad ①$$

又因为由下列方程组

$$\begin{cases}3^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha,\\ 9^2=x^2+y^2-2xy\cos(180°-\alpha).\end{cases}$$

可解得　$xy\cos\alpha=18$　②

∵　$\cos\alpha>0$，∴由（1），（2）可得　$18\leqslant\frac{27}{2}\mathrm{ctg}\alpha$.

∴　$\mathrm{ctg}\alpha\geqslant\frac{4}{3}$.

当$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$时，查表得$\alpha\approx36°52'$. 这表明邻边分别为 3 和 9 的平行四边形，其对角线所夹之锐角不大于$36°52'$，本例给出60°的交角，明显超出α的取值范围。至此，我们可断言：邻边长分别为 3 和 9 的平行四边形，其对角线所夹之锐角绝对不可能为60°，反之亦然。以上说明原题犯了条件自相矛盾的错误。

人们或许要问，既是不存在合条件的平行四边形，又怎能求得它的“面积”呢？这是因为前面解题过程中掩盖了所求x和y都是虚数的事实，假如有人先求出x，y的值，就可发现本例无解。

更正　修正本例可以从两方面入手，其一，改变平行四边形的两邻边长；其二，改变两对角线所夹的角。本着保持原命题的风格和难易程度，最简便的修正方案是改原题中的60°角为30°角，其余条件不变，则仍不失为一个好题。

例4 若在$\triangle ABC$中，$\operatorname{tg}A$与$\operatorname{tg}B$是方程$x^2+6x+7=0$的两个根，求角C。

分析 现给出如下解答：

$$\because \begin{cases}\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=-6\\ \operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B=7\end{cases} \qquad (※)$$

又 $\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}[\pi-(A+B)]=-\operatorname{tg}(A+B)$

$$=-\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B}=-1.$$

$$\therefore \quad C=\frac{3}{4}\pi.$$

从解答过程看，似乎天衣无缝，特殊角$\frac{3}{4}\pi$这个结果又有几分迷人！然而，仔细一想却发现纰漏。因为由角C是钝角立即推知角A和角B必须都是锐角，但从(※)式观察便知$\operatorname{tg}A<0$且$\operatorname{tg}B<0$，就是说A，B也都是钝角。这在$\triangle ABC$中是不可能出现的，所以原命题有误！问题出在题设条件"在$\triangle ABC$中"与条件"$\operatorname{tg}A$与$\operatorname{tg}B$是方程$x^2+6x+7=0$的两个根"之间的矛盾。

更正 修正本例方案多种。如果不改变原命题者意图的最省事的改法是将原题中的方程改为"$x^2-6x+7=0$"即可。依此，可求得角C仍是一个特殊角$\frac{\pi}{4}$。

例5 如图1-2，从二面角$P—MN—Q$内一点A分别作$AB\perp$平面P，$AC\perp$平面Q(B，C为垂足)，已知$AB=3\text{cm}$，$AC=1\text{cm}$，$\angle BAC=60°$。求：

(1)二面角$P—MN—Q$的度数；

(2)A到棱MN的距离。

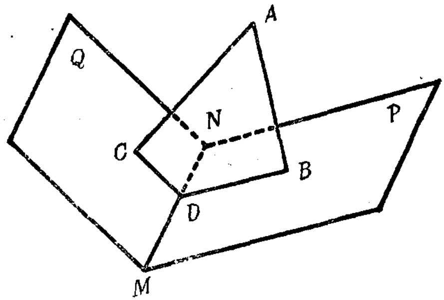


图 1-

分析 从本例的题设和所给的图形可知:

(1)$\angle BDC=120°$,

$\angle ABD=90°$.

于是,$\angle ADB<90°$且锐角$\angle ADC>30°$.

(2)在$\triangle BCA$中,依余弦定理,有

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$$
$$=9+1-3=7.$$

$\therefore\quad BC=\sqrt{7}$.

(3)由于A,B,C,D共圆,依正弦定理有

$$AD=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°}=\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

(4)在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中,$\dfrac{AC}{AD}=\sin\angle ADC>\sin 30°$

$=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\quad AD<2AC$,即$AD<2$.

又 $AB=3<\dfrac{2\sqrt{21}}{3}=AD$,

故有$AB < AD < 2$(cm)。

综上述，推出$3 < 2$的荒谬结论，至此，我们断言本例犯条件自相矛盾的错误。

更正 由于本例题设条件之间的矛盾比效隐蔽，当揭示出矛盾所在之后修正并不难。例如(1)只将$AC = 1$cm这个条件改为2cm，其余条件及所求对象不变即可；(2)亦可修正原题给的图形如图1-3，其他条件及所求对象都不动。

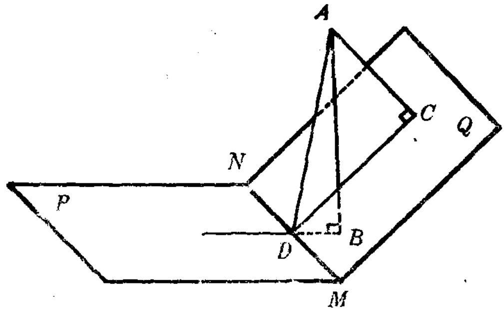


图 1-3

例6 甲从A地出发到B地，乙从B地出发到A地，甲先行2公里，则又经过2小时后在AB的中点处与乙相遇；若同时出发，相遇后甲再走$2\frac{1}{2}$小时到达B地，乙再走$1\frac{3}{5}$小时到达A地。求甲、乙两人的速度各是多少？

分析 按本题的条件出发，设甲每小时行x公里，乙每小时行y公里。依题意，可列出如下二元方程组：

$$\begin{cases} 2+2x=2y & ① \\ \dfrac{2\frac{1}{2}x}{y}=\dfrac{1\frac{3}{5}y}{x} & ② \\ 2\frac{1}{2}x+1\frac{3}{5}y=2x\cdot 2y & ③ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2+2x=2y, \\ 5x-4y=0, \\ 25x-24y=0. \end{cases}$$

显然，此方程组无解，所以本题无解。但命题者给出解答如下：

设甲每小时行x公里，乙每小时行y公里。

则 $$\begin{cases} 2+2x=2y, \\ \dfrac{2\frac{1}{2}x}{y}=\dfrac{1\frac{3}{5}y}{x}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$$

答 （略）

然而，又有考生给出的答案是$\begin{cases} x=24, \\ y=25 \end{cases}$．（假设同命题者）它是由前述的方程①和③组成的方程组解得的。

同是一道题目，却得到三种截然不同的结论，究竟问题出在哪？可以毫不犹豫地回答：出在题设的条件之中，请看下面事实：

如果将原题表述为："…甲先行 2 公里，则又经t小时后在AB的中点处与乙相遇；…"则依此可列方程组如下：

（$v_{甲}=x$公里/小时，$v_{乙}=y$公里/小时。）

$$\begin{cases}2+tx=ty,\\ \dfrac{5}{2}x+\dfrac{8}{5}y=2+t(x+y),\\ \dfrac{5}{2}x\Big/y=\dfrac{8}{5}y\Big/x.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x=40/9(\text{公里}),\\ y=50/9(\text{公里}),\\ t=1.8(\text{小时}).\end{cases}$$

上述表明原题中"又经过 2 小时后"这个条件与其余条件是相矛盾的，进一步探知它还是多余的。

更正 将原题中的"又经过 2 小时后"这个条件删去，改为：

甲从 A 地出发到 B 地，乙从 B 地出发到 A 地，如果甲先行 2 公里，那么恰在 AB 的中点处与乙相遇；如果同时出发，那么相遇后甲再走$2\frac{1}{2}$小时到达B地，乙再走$1\frac{3}{5}$小时到达A地。求甲、乙两人的速度各是多少？

（答案：$v_{甲}=40/9$公里/小时，$v_{乙}=50/9$公里/小时。）

例7 已知$\dfrac{a}{c}=\sin\theta$，$\dfrac{b}{c}=\cos\theta$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $a^a=(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}$。求证：$(\lg a)^2=\lg(c-b)\cdot\lg(c+b)$。

分析 由$\dfrac{a}{c}=\sin\theta$，$\dfrac{b}{c}=\cos\theta$

$$\Longrightarrow a^2+b^2=c^2$$

$$\Longrightarrow a^2=(c-b)\cdot(c+b)$$