

數級哀里福

Г. И. 托尔斯托夫著



高等教育出版社

數級哀里福

Г. П. 托尔斯托夫著
龍季和譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国家技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的托尔斯托夫 (Г. П. Толстов) 著“福里哀級數” (Ряды Фурье) 1951 年版譯出。原書是工程師的數理叢書之一，經苏联莫洛托夫動力學院採用為某些專業高等數學課程的參考書。

本書由北京工業學院龍季和翻譯，孫樹本校訂。

本書原由商務印書館出版，自 1957 年 4 月起改由本社出版。

福 里 哀 級 數

Г. П. 托尔斯托夫著

龍季和譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号
(北京市書刊出版業營業許可證出字第 054 号)

商務印書館上海廠印刷 新华書店發行

統一書号 13010·307 开本 850×1168 1/32 印張 10 8/16
字數 272,000 印數 4,701—8,230 定價(5) 1.30

1955 年 12 月商務初版(共印 6,500 册)

1957 年 4 月新 1 版

1960 年 3 月上海第 5 次印刷

目 錄

序	7
第一章 福里哀三角級數	9
§ 1. 週期函數	9
§ 2. 譜量	10
§ 3. 三角多項式和三角級數	14
§ 4. 術語的明確說明。可積性。函數項級數	15
§ 5. 基本三角函數系。正弦餘弦的正交性	19
§ 6. 週期是 2π 的函數的福里哀級數	21
§ 7. 在長度為 2π 的區間上給出的函數的福里哀級數	24
§ 8. 函數在一點處的左右極限。第一種間斷點	26
§ 9. 滑溜函數和逐段滑溜函數	27
§ 10. 福里哀級數收斂準則	29
§ 11. 奇函數和偶函數	30
§ 12. 餘弦級數和正弦級數	32
§ 13. 展成福里哀級數的例子	34
§ 14. 福里哀級數的複數形式	41
§ 15. 週期是 $2l$ 的函數	43
第二章 正交系	51
§ 1. 定義。標準系	51
§ 2. 按已知正交族展開的福里哀級數	52
§ 3. 最簡單正交系的例子	53
§ 4. 平方可積函數。蒲仰可夫斯基不等式	60
§ 5. 平方偏差。它的最小值	62
§ 6. 貝塞爾不等式和它的推論	63
§ 7. 完備系。在均值意義下的收斂性	64
§ 8. 完備系最重要的性質	67
§ 9. 完備系的判別準則	69
§ 10. 與矢量類比	71
第三章 福里哀三角級數的收斂性	74
§ 1. 貝塞爾不等式和它的推論	74

§ 2. 三角積分 $\int_a^b f(x) \cos nx dx$ 和 $\int_a^b f(x) \sin nx dx$ 當 $n \rightarrow \infty$ 時的極限	75
§ 3. 餘弦和式的公式. 輔助積分	79
§ 4. 福里哀級數部份和的積分公式	80
§ 5. 左右導數	81
§ 6. 在函數連續點處福里哀級數收斂的充分條件	83
§ 7. 在函數間斷點處福里哀級數收斂的充分條件	84
§ 8. 在 § 6, 7 建立的充分條件的推廣	86
§ 9. 逐段光滑(連續或不連續)函數的福里哀級數的收斂	87
§ 10. 週期是 2π 的連續逐段光滑函數的福里哀級數的絕對收斂性和均勻收斂性	87
§ 11. 週期是 2π 而具有絕對可積導數的連續函數的福里哀級數的均勻收斂性	90
§ 12. § 11 結果的推廣	94
§ 13. 局部性原理	98
§ 14. 無界函數展成福里哀級數的例子	100
§ 15. 關於週期是 $2l$ 的函數的附註	103

第四章 係數遞減的三角級數. 某些級數求和法 104

§ 1. 亞倍爾預備定理	104
§ 2. 正弦和式的公式. 輔助不等式	105
§ 3. 係數單調遞減的三角級數的收斂性	106
§ 4* § 3 定理的一些推論	110
§ 5. 複變函數對於一些三角級數求和法的應用	113
§ 6. § 5 結果的嚴格討論	116

第五章 三角函數系的完備性. 福里哀級數的運算 124

§ 1. 用三角多項式近似表示函數	124
§ 2. 三角函數系的完備性	126
§ 3. 達布諾夫公式. 三角函數系完備性的重要推論	127
§ 4* 用多項式逼近函數	129
§ 5. 福里哀級數的加減法. 它與數字的乘法	131
§ 6* 福里哀級數乘法	132
§ 7. 福里哀級數的積分法	134
§ 8. 福里哀級數的微分法. 週期是 2π 的連續函數的情形	138
§ 9* 福里哀級數的微分法. 函數在區間 $[-\pi, \pi]$ 上給出時的情形	141
§ 10* 福里哀級數的微分法. 函數在區間 $[0, \pi]$ 上給出時的情形	146
§ 11. 福里哀級數收斂性的改善	153
§ 12. 三角函數展式表	158
§ 13. 福里哀係數的近似計算	161

第六章 福里哀三角級數定和法 167

§ 1. 問題的提出	167
§ 2. 算術均值法	167

§ 3. 福里哀級數部份和的算術均值的積分公式	169
§ 4. 福里哀級數用算術均值法定和	170
§ 5. 幕因子法	175
§ 6. 泊阿松核	176
§ 7. 幕因子法在福里哀級數定和時的應用	176

第七章 二重三角級數。福里哀積分 184

§ 1. 雙變量正交系。福里哀級數	184
§ 2. 雙變量的基本三角函數系。二重福里哀級數	186
§ 3. 二重福里哀三角級數部份和的積分公式。收斂準則	189
§ 4. 對 x 和對 y 具有不同週期的函數的二重福里哀級數	191
§ 5. 福里哀積分作為福里哀級數的極限	192
§ 6. 依賴於參數的廣義積分	194
§ 7. 兩個預備定理	197
§ 8. 福里哀積分公式的證明	200
§ 9. 福里哀積分的各種形式	201
§ 10* 福里哀變換	203

第八章 貝塞爾函數 207

§ 1. 歐拉-貝塞爾方程	207
§ 2. 具非負指標的第一種貝塞爾函數	207
§ 3. 關於 I -函數	211
§ 4. 具負指標的第一種貝塞爾函數	212
§ 5. 歐拉-貝塞爾方程的一般積分	214
§ 6. 第二種貝塞爾函數	214
§ 7. 相異指標的貝塞爾函數間的關係	216
§ 8. 具有形如 $p = \frac{2n+1}{2}$ (n 是整數) 指標的第一種貝塞爾函數	218
§ 9. 貝塞爾函數的漸近公式	219
§ 10. 貝塞爾函數和有關函數的根	224
§ 11. 帶參數的歐拉-貝塞爾方程	226
§ 12. 函數 $J_p(\lambda x)$ 的正交性	227
§ 13. 積分 $\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx$ 的計算	230
§ 14* 積分 $\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx$ 的估計	231

第九章 貝塞爾函數作成的福里哀級數 234

§ 1. 福里哀-貝塞爾級數	234
§ 2. 福里哀-貝塞爾級數的判斂準則	235
§ 3* 貝塞爾不等式和它的推論	237
§ 4* 保證福里哀-貝塞爾級數一致收斂的係數的階	238

§ 5*: 二次可微函數的福里哀-貝塞爾係數的階	242
§ 6*: 多次可微函數的福里哀-貝塞爾係數的階	245
§ 7*: 福里哀-貝塞爾級數的逐項微分	248
§ 8. 第二類的福里哀-貝塞爾級數	251
§ 9*: §§ 3-7 的結果在第二類福里哀-貝塞爾級數的推廣	254
§ 10. 區間 $[0, 1]$ 上給出的函數的福里哀-貝塞爾級數展式	256

第十章 解決若干數學物理問題的特徵函數法..... 259

§ 1. 方法的實質	259
§ 2. 邊界問題通常的提法	264
§ 3. 關於特徵值的存在問題	265
§ 4. 特徵函數; 它們的正交性	265
§ 5. 關於特徵值的正負號	268
§ 6. 按特徵函數展開的福里哀級數	269
§ 7. 特徵函數的方法實際上一定可以引向問題的解決嗎?	273
§ 8. 廣義解	276
§ 9. 非齊次問題	279
§ 10. 總結	281

第十一章 應用..... 283

§ 1. 弦振動方程	283
§ 2. 弦的自由振動	284
§ 3. 弦的強迫振動	288
§ 4. 樞軸縱振動方程	290
§ 5. 樞軸的自由振動	292
§ 6. 樞軸的強迫振動	295
§ 7. 矩形膜振動	296
§ 8. 圓形膜沿半徑的振動	302
§ 9. 圓形膜的振動 (一般情形)	306
§ 10. 樞軸上熱擴散方程	311
§ 11. 樞軸兩端保持溫度為零時熱的擴散	312
§ 12. 樞軸兩端保持常溫時熱的擴散	314
§ 13. 樞軸兩端為已知變化溫度時熱的擴散	315
§ 14. 在樞軸兩端與週圍介質有自由交流發生時熱的擴散	316
§ 15. 無界樞軸熱的擴散	321
§ 16. 圓柱面上的熱擴散; 表面絕熱的情況	326
§ 17. 圓柱面內部的熱擴散; 在表面上與外界介質有熱交流的情況	328
§ 18. 圓柱內的熱擴散; 溫度穩定的情況	329

索引..... 332

序

本書的任務是：向讀者介紹福里哀三角級數的理論，給出關於一般的，和某些特殊的正交系理論的初步知識，以及指出這些理論是怎樣用來解決實際問題的。

本書假定讀者已經通曉在通常工學院數學大綱範圍內的數學解析課程。但是作者認為，為讀者方便起見，在某幾節裏（分見各處），提供一些微積分學裏的結果還是有好處的。

材料的編排是按照教學法來考慮的，因為作者有機會在工學院裏有好幾年連續擔任福里哀級數這門課程的講授。

至於材料的內容，作者有點違反傳統，在福里哀級數教程裏，一方面引入貝塞爾函數理論的初步，另一方面引入應用於數理物理問題的特徵函數方法的初步（包括常微分方程邊界問題的概念）。作者也違反了要未證明這個定理要未就根本不提這個定理的那種傳統辦法，而是在若干個別情況只有敘述却無證明。這樣做無非是想使本書不因嚴格和冗長的推理而負擔過重（這些推理有時會要求讀者過多的數學知識，超出了作者所應該要求的），同時能使讀者熟識理論的基本部份。

在第十一章（應用）裏，作者僅限於討論振動和熱傳導的問題，因為作者認為理論的說明，至少在初步，應該體現在一些現象上，儘可能簡單的和儘可能在某種程度為廣大讀者所熟知的。

作者在寫這本書時，曾經請益：

И. И. 普里瓦洛夫，福里哀級數，1934。

Л. 傑克遜，福里哀級數和正交多項式，1948。

В. И. 斯米爾諾夫，高等數學教程，卷二，1948。

Г. М. 菲赫金哥爾次, 微積分學教程, 卷三, 1949。

P. O. 枯枝曼, 貝塞爾函數, 1935。

Г. Н. 瓦特遜, 貝塞爾函數的理論, 第一部, 1949。

С. Л. 索波列夫, 數學物理方程, 1947。

И. И. 普里瓦洛夫, 積分方程, 1935。

P. 柯朗及 Л. 奚路伯, 數學物理方法, 卷一, 1931, 卷二, 1945。

X. C. 卡斯洛亞, 熱傳導理論, 1947。

在 H. C. 柯施里亞科夫著, 數理物理的基本方程 (1933), 及 A. H. 克雷洛夫著, 論數理物理某些微分方程 (1933), 這兩本書和上面提到的普里瓦洛夫, 枯枝曼, 卡斯洛亞等著的各書裏, 有興趣的讀者可以找到更多的數學物理的問題, 這些問題是可以運用本書所講過的辦法來解決的。

讀者要是希望在函數按特徵函數展開的理論方面得到更結實的知識, 可以看 B. M. 勒維湯所著, 按特徵函數的展開 (1950) 這一書。

本書有幾節略去不讀是不會損害全書的完整性的, 沒有它們, 讀者也可以自如地掌握實際應用所必需的方法 (它們是補充知識的性質, 是拓大和加深基本知識的性質)。這幾節在目錄和正文裏都加上星號。

在編著本書時候, 採用了 B. Я. 柯茲洛夫, Л. А. 突馬金, A. И. 普來斯蔡爾各位的意見, 謹向他們表示感謝。

托爾斯托夫

1950年9月24日

第一章 福里哀三角級數

§1. 週期函數 對於 x 的一切值都確定的函數 $f(x)$ ，在下列情況下叫做週期函數：如果存在着常數 $T \neq 0$ ，不管 x 是什麼，都有

$$f(x+T) = f(x). \quad (1.1)$$

具有這樣性質的數 T ，叫做函數 $f(x)$ 的週期。最熟知的週期函數是 $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\dots$ 。在許多數學在物理和工程問題的應用中，都必須要和週期函數打交道的。

週期是 T 的函數的和，差，積，商顯然也是具有同一週期的週期函數。

如果對於 x 值的任一個區間 $[a, a+T]$ 作出週期函數 $y=f(x)$ 的圖形，那末將所作圖形按週期重複下去，就得到這函數的全部圖形（圖1）。

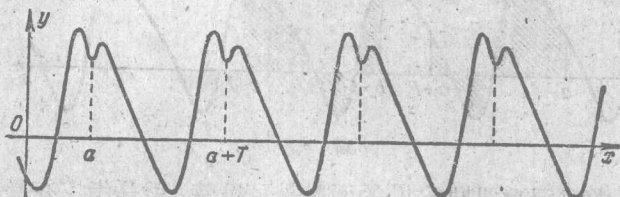


圖 1

如果 T 是函數 $f(x)$ 的週期，那末 $2T$, $3T$, $4T$, $\dots$ 也都是週期，這從週期函數的圖形或從下面這一串等式

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \dots$$

可以立刻看出來，而這一串等式，則是重複引用條件 (1.1) 得來的。由這條條件還可得到

$$f(x-T) = f[(x-T)+T] = f(x),$$

這就是說數 $-T$ 也是週期。因此 $-2T, -3T, -4T, \dots$ 也都是週期。這樣一來，如果 T 是週期，那末所有形如 kT 的數，其中 k 是正的或負的整數，也都是週期。今後我們規定 $T > 0$ 。

對於週期是 T 的任意函數 $f(x)$ 我們指出下面這個性質：

如果 $f(x)$ 在某個長度是 T 的區間上可積，那末它在任何另一個同長的區間上也可積，而且積分的值不變，即對於任意的 a, b 有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx. \quad (1.2)$$

把積分解釋為面積，這性質就不難推出。實際上，積分是由曲線 $y=f(x)$ ，兩端的縱坐標線，和 Ox 軸四者所圍成的面積來表示的， Ox 軸上方的面積冠以“+”號， Ox 軸下方的面積冠以“-”號。在上述情形，由於 $f(x)$ 有週期性，(1.2) 中的兩個積分對應的面積是一樣的 (圖 2)。

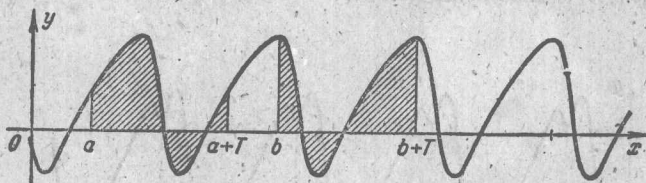


圖 2

今後，當我們說週期為 T 的函數是可積時，就是指它在長為 T 的區間上是可積的，也就意味着它在任意有限區間上是可積的，這不難由上面建立的性質推出。

§ 2. 諧量 最簡單，同時在應用上也是十分重要的週期函數是

$y = A \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 A, ω, φ 是常量。這個函數叫做具有振幅 $|A|$, 頻率 ω , 初相 φ 的諧量。這諧量的週期是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。實際上, 對於任意的 x , 我們有

$$A \sin \left[\omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right] = A \sin [(\omega x + \varphi) + 2\pi] = A \sin(\omega x + \varphi).$$

“振幅”, “頻率”, “初相” 這些名稱的來源, 是和下面關於簡單振動, 即諧振動的力學問題聯系着的。

設質量為 m 的質點 M , 受力 F 的作用, 沿直線運動, 力與點 M 到定點 O 的距離 s 成正比, 方向朝着 O (圖 3)。和通常一樣, 規定: 在 O 的右邊, $s > 0$; 在 O 的左邊, $s < 0$, 即和尋常一樣地給直線一個正向, 這樣我們便得 $F = -ks$, 其中 k 是比例係數, $k > 0$ 。於是

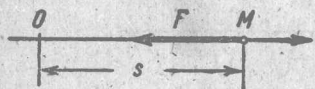


圖 3

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks$$

或

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0,$$

其中 $\omega^2 = \frac{k}{m}$, 即 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

函數 $s = A \sin(\omega t + \varphi)$, 其中 A 和 φ 是常數, 是所得微分方程的解 (不難驗證) (運動開始時, 即 $t=0$ 時, 若已知點 M 的位置和速率, 這些常數便可算出)。我們便得到了諧量。這樣一來, s 便是時間 t 的週期函數, 以 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 為週期。這表示, 在上述的力作用下, 點 M 作振動。

振幅 $|A|$ 是點 M 離 O 的最大距離。數量 $\frac{1}{T}$ 是單位時間中的振動次數。由此得到“頻率”的名稱。數量 φ ——初相——指出點 M 在開始運動時的位置, 因為當 $t=0$ 時, 我們有 $s_0 = A \sin \varphi$ 。

再回到諸量 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 來。它的圖形是什麼樣子的呢？我們可以規定 $\omega > 0$ ，因為要不是這樣，負號可以提到 $\sin$ 號的外面。在最簡單的情形， $A=1$ ， $\omega=1$ ， $\varphi=0$ ，我們得到函數 $y = \sin x$ ，即通常的正弦函數（圖 4, a）。當 $A=1$ ， $\omega=1$ ， $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，得到餘弦函數 $y = \cos x$ ，它的圖形可以將正弦函數 $y = \sin x$ 向左移動 $\frac{\pi}{2}$ 而得到。

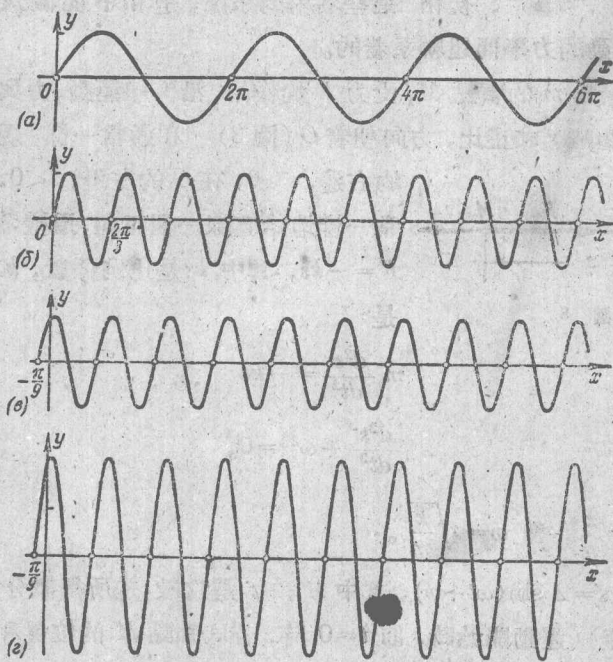


圖 4

考察諸量 $y = \sin \omega x$ ，並設 $\omega x = z$ ，便有 $y = \sin z$ 。我們便得到通常的正弦函數，不過 $x = \frac{z}{\omega}$ 。因此諸量 $y = \sin \omega x$ 的圖形可以將通常正弦函數的圖形，在橫標方向變形而得到。當 $\omega > 1$ 時，變形成為均勻地壓縮 ω 倍；而 $\omega < 1$ 時，伸展 $\frac{1}{\omega}$ 倍。圖 4, b 表示週期為 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 的諸

量 $y = \sin 3x$ 。

又考察諸量 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ，並設 $\omega x + \varphi = \omega z$ 。諸量 $y = \sin \omega z$ 的圖形是我們已經知道了的。但是 $x = z - \frac{\varphi}{\omega}$ 。因此，諸量 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的圖形，可以由諸量 $y = \sin \omega x$ 的圖形，沿橫軸移動 $-\frac{\varphi}{\omega}$ 而得到。圖 4, σ 表示週期為 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，初相為 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 的諸量 $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

最後，諸量 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的圖形，可以由諸量 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的圖形，將所有縱標乘 A 而得到。圖 4, ν 表示諸量 $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

總結上述：所有諸量 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的圖形，都可以由通常正弦函數的圖形，沿坐標軸作均勻壓縮（或伸展）和沿 Ox 軸移動而得到。

利用已知的三角公式，我們可以寫出

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A(\cos \omega x \sin \varphi + \sin \omega x \cos \varphi)。$$

設

$$a = A \sin \varphi, \quad b = A \cos \varphi, \quad (2.1)$$

則所有諸量可以表成

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x \quad (2.2)$$

的形狀。

反之，所有形如 (2.2) 的函數都是諸量。要證明這一點，我們只要從方程 (2.1) 求出 A 和 φ ：

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

由此不難把 φ 求出來。

今後對於諸量，都採用像 (2.2) 那種形狀的寫法。用這種寫法，圖 4, ν 所表示的諸量 $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 便是

$$2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x。$$

我們最好用下面的方法，也在 (2.2) 裏顯明地寫出週期 T 。

設 $T=2l$ 。則由等式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 有

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l},$$

因此,週期 $T=2l$ 的諸量可以寫成

$$a \cos \frac{\pi x}{l} + b \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2.3)$$

§ 3. 三角多項式和三角級數 命 $T=2l$, 考察頻率為 $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$,

週期為 $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2l}{k}$ 的諸量

$$a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3.1)$$

因為 $T=2l=kT_k$, 立刻知道 $T=2l$ 是所有諸量 (3.1) 的週期 (因為週期乘上一個整數,還是週期,參看 § 1)。因此,所有形如

$$s_n(x) = A + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right)$$

的和式,其中 A =常數,由於它是週期為 $2l$ 的函數的和式,也是具有同一週期的函數 (加上一個常數顯然不影響週期性,而且常數可以看成週期為任何數的函數)。函數 $s_n(x)$ 叫做 n 階三角多項式 (週期是 $2l$)。

三角多項式雖然是由一些諸量所構成,但是這種函數比起簡單的諸量一般地是要複雜得多。我們可以給常數 $A, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ 一些數值,使函數 $y=s_n(x)$ 的圖形根本不像簡單諸量那種又平滑又對稱的圖形。圖 5 表示三角多項式

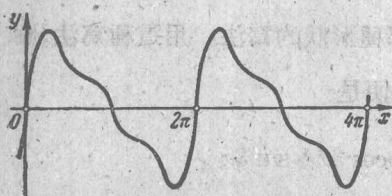


圖 5

$$y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 3x$$

的圖形。無窮三角級數的和式

$$A + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right)$$

(如果收斂)也表示週期是 $2l$ 的函

數。這種三角級數和式所表的函數的性質更是多種多樣了。於是問題就來了：是不是所有具有週期 $T=2l$ 的給定函數，都可能表達成三角級數的和呢？

我們將會見到，對於很廣泛的一類函數，這種表示的確是可能的。

設 $f(x)$ 屬於這類函數。就是說， $f(x)$ 可以展成諧量的和式，亦即結構極簡單的函數的和式。函數 $y=f(x)$ 的圖形，可由諧量的圖形“相加”而得到。如果把每個諧量看成簡諧振動，而把 $f(x)$ 作為複合振動的標記，那末後者就分解為一些個別的諧振動的和。

但是不要以為三角級數只可用到振動現象上面去。根本不是這樣的。三角級數的概念，在研究許多別樣性質的現象時，還是很有用的。

如果

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right), \quad (3.2)$$

那末，命 $\frac{\pi x}{l} = t$ ，或 $x = \frac{tl}{\pi}$ ，並以 $\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$ ，便可得

$$\varphi(t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (3.3)$$

這級數的各個諧量有共同的週期 2π 。因此，如果對於週期是 $2l$ 的函數，展式 (3.2) 成立，那末對於週期是 2π 的函數 $\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$ ，展式 (3.3) 成立。反過來的結論，顯然也是正確的。這是說，如果對於週期是 2π 的函數 $\varphi(t)$ ，展式 (3.3) 成立，那末對於週期是 $2l$ 的函數 $f(x) = \varphi\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ ，展式 (3.2) 也成立。

這樣一來，只要對於具有“標準”週期 2π 的函數，會解決展成三角級數的問題就夠了。這時的級數看起來是簡單些。因此我們只要建立關於形如 (3.3) 的級數的理論，並將最終結果翻譯成一般級數 (3.2) 的言辭。

§ 4. 術語的明確說明。可積性。函數項級數 讓我們來明確說

明一些微積分學裏的術語，並回憶一下那裏面的一些知識。我們說 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上是可積時，是指積分(即使是旁義的)

$$\int_a^b f(x) dx \quad (4.1)$$

在初等意義下存在而言。因此，我們的可積函數 $f(x)$ ，或許是連續的，或許是在區間 $[a, b]$ 上有有限個間斷點，而在間斷點的近傍，函數可能是有界的，也可能是無界的。

函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上叫做絕對可積的，如果函數 $|f(x)|$ 在這區間上是可積的。在積分學教程裏證明過：如果積分

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

存在，那末積分 (4.1) 一定是存在的。反過來不一定對。又如果 $f(x)$ 是絕對可積的，而 $\varphi(x)$ 是有界可積函數，那末乘積 $f(x)\varphi(x)$ 是絕對可積的。

我們提出下面的重要命題：

設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，在有限個點 $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b$) 處沒有導數，且 $f'(x)$ 在區間 $[a, b]$ 可積。那末

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx. \quad (4.2)$$

在積分學的教程裏，通常是就 $f'(x)$ 處處存在的情況來證明這個公式的。因此我們要按現在所考慮的情況來進行證明。

對於足夠小的 $h > 0$ ，有

$$f(x_1 - h) - f(a) = \int_a^{x_1 - h} f'(x) dx,$$

$$f(x_{k+1} - h) - f(x_k + h) = \int_{x_k + h}^{x_{k+1} - h} f'(x) dx \quad (k=1, 2, \dots, m-1),$$

$$f(b) - f(x_m + h) = \int_{x_m + h}^b f'(x) dx,$$

這是因為在每一個區間 $[a, x_1 - h]$, $[x_1 + h, x_2 - h]$, $\dots$, $[x_{m-1} + h,$