# 福里哀級數

Г. П. 托尔斯托夫著

高等教育出版社

# 福 里 哀 級 數

Г. П. 托尔斯托夫著

龍 季 和 譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国家技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的托尔斯托夫（Г. П. Толстов）著"福里哀級數"（Ряды Фурье）1951年版譯出。原書是工程师的数理叢書之一，經苏联莫洛托夫动力学院采用为某些專業高等数学課程的参考書。

本書由北京工業学院龍季和翻譯，孙树本校訂。

本書原由商务印書館出版，自1957年4月起改由本社出版。


**福　里　哀　級　数**

Г. П. 托尔斯托夫著

龙季和譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

商务印书館上海厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·307　开本 850×1168 1/32　印張 10 8/16

字数 272,000　印数 4,701—8,200　定价(5)￥1.30

1955年12月商務初版(共印6,500册)

1957年4月新1版　1960年3月上海第5次印刷

# 目　　錄

# 序

本書的任務是:向讀者介紹福里哀三角級數的理論,給出關於一般的,和某些特殊的正交系理論的初步知識,以及指出這些理論是怎樣用來解決實際問題的。

本書假定讀者已經通曉在通常工學院數學大綱範圍內的數學解析課程。但是作者認為,為讀者方便起見,在某幾節裏(分見各處),提供一些微積分學裏的結果還是有好處的。

材料的編排是按照教學法來考慮的,因為作者有機會在工學院裏有好幾年連續擔任福里哀級數這門課程的講授。

至於材料的內容,作者有點違反傳統,在福里哀級數教程裏,一方面引入貝塞爾函數理論的初步,另一方面引入應用於數理物理問題的特徵函數方法的初步(包括常微分方程邊界問題的概念)。作者也違反了要末證明這個定理要末就根本不提這個定理的那種傳統辦法,而是在若干個別情況只有敍述却無證明。這樣做無非是想使本書不因嚴格和冗長的推理而負擔過重(這些推理有時會要求讀者過多的數學知識,超出了作者所應該要求的),同時能使讀者熟識理論的基本部份。

在第十一章(應用)裏,作者僅限於討論振動和熱傳導的問題,因為作者認為理論的說明,至少在初步,應該體現在一些現象上,儘可能簡單的和儘可能在某種程度為廣大讀者所熟知的。

作者在寫這本書時,曾經請益:

И. И. 普里瓦洛夫,福里哀級數,1934。

Д. 傑克遜,福里哀級數和正交多項式,1948。

В. И. 斯米爾諾夫,高等數學教程,卷二,1948。

Г. М. 菲赫金哥爾次，微積分學教程，卷三，1949。

Р. О. 枯枝曼，貝塞爾函數，1935。

Г. Н. 瓦特遜，貝塞爾函數的理論，第一部，1949。

С. Л. 索波列夫，數學物理方程，1947。

И. И. 普里瓦洛夫，積分方程，1935。

Р. 柯朗及 Д. 奚路伯，數學物理方法，卷一，1931，卷二，1945。

Х. С. 卡斯洛亞，熱傳導理論，1947。

在 Н. С. 柯施里亞科夫著，數理物理的基本方程（1936），及 А. Н. 克雷洛夫著，論數理物理某些微分方程（1933），這兩本書和上面提到的普里瓦洛夫，枯枝曼，卡斯洛亞等著的各書裏，有興趣的讀者可以找到更多的數學物理的問題，這些問題是可以運用本書所講過的辦法來解決的。

讀者要是希望在函數按特徵函數展開的理論方面得到更結實的知識，可以看 Б. М. 勒維湯所著，按特徵函數的展開（1950）這一書。

本書有幾節略去不讀是不會損害全書的完整性的，沒有它們，讀者也可以自如地掌握實際應用所必需的方法（它們是補充知識的性質，是拓大和加深基本知識的性質）。這幾節在目錄和正文裏都加上星號。

在編著本書時候，採用了 В. Я. 柯茲洛夫，Л. А. 突馬金，А. И. 普來斯蓁爾各位的意見，謹向他們表示感謝。

托爾斯托夫

1950年9月24日

# 第一章　福里哀三角級數

**§1．週期函數**　對於 $x$ 的一切值都確定的函數 $f(x)$，在下列情況下叫做週期函數：如果存在着常數 $T\neq 0$，不管 $x$ 是什麼，都有

$$f(x+T)=f(x)。\tag{1.1}$$

具有這樣性質的數 $T$，叫做函數 $f(x)$ 的週期。最熟知的週期函數是 $\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg} x$，⋯。在許多數學在物理和工程問題的應用中，都必須要和週期函數打交道的。

週期是 $T$ 的函數的和，差，積，商顯然也是具有同一週期的週期函數。

如果對於 $x$ 值的任一個區間 $[a, a+T]$ 作出週期函數 $y=f(x)$ 的圖形，那末將所作圖形按週期重複下去，就得到這函數的全部圖形(圖 1)。

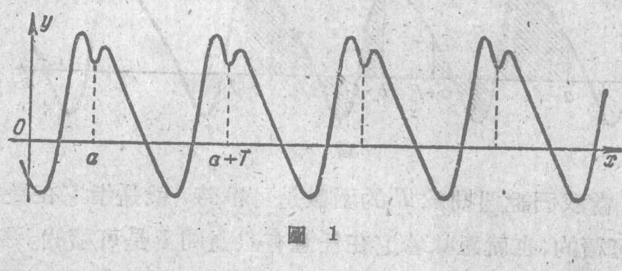


圖　1

如果 $T$ 是函數 $f(x)$ 的週期，那末 $2T$，$3T$，$4T$，⋯也都是週期，這從週期函數的圖形或從下面這一串等式

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=\cdots$$

可以立刻看出來，而這一串等式，則是重複引用條件 (1.1) 得來的。由這條件還可得到

$$f(x-T)=f[(x-T)+T]=f(x),$$

這就是說數 $-T$ 也是週期。因此 $-2T$, $-3T$, $-4T$, $\cdots$ 也都是週期。這樣一來，如果 $T$ 是週期，那末所有形如 $kT$ 的數，其中 $k$ 是正的或負的整數，也都是週期。今後我們規定 $T>0$。

對於週期是 $T$ 的任意函數 $f(x)$ 我們指出下面這個性質：

如果 $f(x)$ 在某個長度是 $T$ 的區間上可積，那末它在任何另一個同長的區間上也可積，而且積分的值不變，即對於任意的 $a$, $b$ 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx\text{。} \tag{1.2}$$

把積分解釋爲面積，這性質就不難推出。實際上，積分是由曲線 $y=f(x)$，兩端的縱坐標線，和 $Ox$ 軸四者所圍成的面積來表示的，$Ox$ 軸上方的面積冠以“+”號，$Ox$ 軸下方的面積冠以“−”號。在上述情形，由於 $f(x)$ 有週期性，(1.2) 中的兩個積分對應的面積是一樣的 (圖 2)。

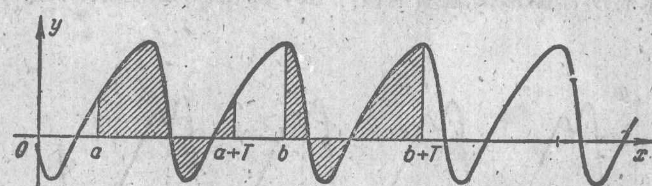


圖 2

今後，當我們說週期爲 $T$ 的函數是可積時，就是指它在長爲 $T$ 的區間上是可積的，也就意味着它在任意有限區間上是可積的，這不難由上面建立的性質推出。

§2. 諧量 最簡單，同時在應用上也是十分重要的週期函數是

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $A,\omega,\varphi$ 是常量。這個函數叫做具有振幅 $|A|$，頻率 $\omega$，初相 $\varphi$ 的諧量。這諧量的週期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。實際上，對於任意的 $x$，我們有

$$A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=A\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]=A\sin(\omega x+\varphi)。$$

"振幅"，"頻率"，"初相"這些名稱的來源，是和下面關於簡單振動，卽諧振動的力學問題聯系着的。

設質量爲 $m$ 的質點 $M$，受力 $F$ 的作用，沿直線運動，力與點 $M$ 到定點 $O$ 的距離 $s$ 成正比，方向朝着 $O$（圖 3）。和通常一樣，規定：在 $O$ 的右邊，$s>0$；在 $O$ 的左邊，$s<0$，卽和尋常一樣地給直線一個正向，這樣我們便得 $F=-ks$，其中 $k$ 是比例係數，$k>0$。於是

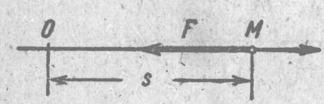

圖 3

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-ks$$

或

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0,$$

其中 $\omega^2=\frac{k}{m}$，卽 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$。

函數 $s=A\sin(\omega t+\varphi)$，其中 $A$ 和 $\varphi$ 是常數，是所得微分方程的解（不難驗證）（運動開始時，卽 $t=0$ 時，若已知點 $M$ 的位置和速率，這些常數便可算出）。我們便得到了諧量。這樣一來，$s$ 便是時間 $t$ 的週期函數，以 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 爲週期。這表示，在上述的力作用下，點 $M$ 作振動。

振幅 $|A|$ 是點 $M$ 離 $O$ 的最大距離。數量 $\frac{1}{T}$ 是單位時間中的振動次數。由此得到"頻率"的名稱。數量 $\varphi$——初相——指出點 $M$ 在開始運動時的位置，因爲當 $t=0$ 時，我們有 $s_0=A\sin\varphi$。

再回到諧量 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 來。它的圖形是什麼樣子的呢？我們可以規定 $\omega>0$，因為要不是這樣，負號可以提到 sin 號的外面。在最簡單的情形，$A=1$，$\omega=1$，$\varphi=0$，我們得到函數 $y=\sin x$，即通常的正弦函數（圖 4，$a$）。當 $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，得到餘弦函數 $y=\cos x$，它的圖形可以將正弦函數 $y=\sin x$ 向左移動 $\frac{\pi}{2}$ 而得到。

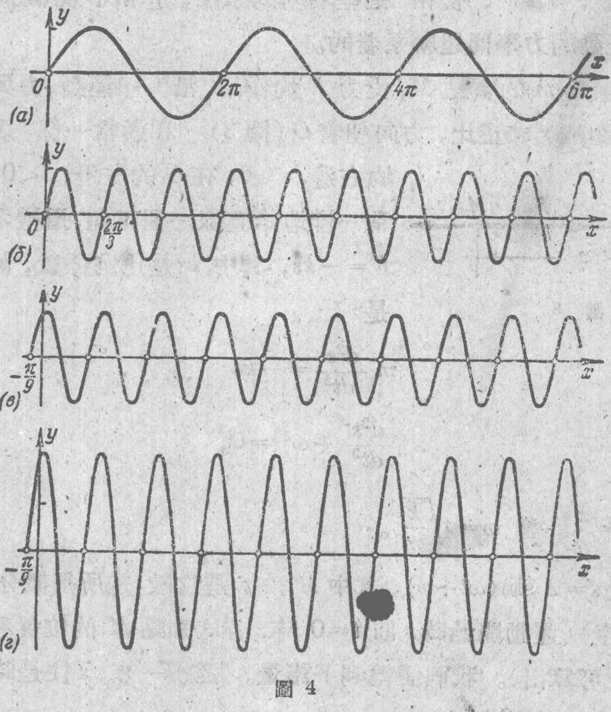


圖 4

考察諧量 $y=\sin\omega x$，並設 $\omega x=z$，便有 $y=\sin z$。我們便得到通常的正弦函數，不過 $x=\frac{z}{\omega}$。因此諧量 $y=\sin\omega x$ 的圖形可以將通常正弦函數的圖形，在橫標方向變形而得到。當 $\omega>1$ 時，變形成為均勻地壓縮 $\omega$ 倍；而 $\omega<1$ 時，伸展 $\frac{1}{\omega}$ 倍。圖 4，б 表示週期為 $T=\frac{2\pi}{3}$ 的諧

量 $y=\sin 3x$。

又考察諧量 $y=\sin(\omega x+\varphi)$，並設 $\omega x+\varphi=\omega z$。諧量 $y=\sin\omega z$ 的圖形是我們已經知道了的。但是 $x=z-\frac{\varphi}{\omega}$。因此，諧量 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的圖形，可以由諧量 $y=\sin\omega x$ 的圖形，沿橫軸移動 $-\frac{\varphi}{\omega}$ 而得到。圖 4，$\theta$ 表示週期爲 $T=\frac{2\pi}{3}$，初相爲 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 的諧量 $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$。

最後，諧量 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的圖形，可以由諧量 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的圖形，將所有縱標乘 $A$ 而得到。圖 4，$\iota$ 表示諧量 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$。

總結上述：所有諧量 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的圖形，都可以由通常正弦函數的圖形，沿坐標軸作均勻壓縮（或伸展）和沿 $Ox$ 軸移動而得到。

利用已知的三角公式，我們可以寫出

$$A\sin(\omega x+\varphi)=A(\cos\omega x\sin\varphi+\sin\omega x\cos\varphi)。$$

設

$$a=A\sin\varphi,\qquad b=A\cos\varphi, \tag{2.1}$$

則所有諧量可以表成

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x \tag{2.2}$$

的形狀。

反之，所有形如 (2.2) 的函數都是諧量。要證明這一點，我們只要從方程 (2.1) 求出 $A$ 和 $\varphi$：

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \sin\varphi=\frac{a}{A}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{b}{A}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

由此不難把 $\varphi$ 求出來。

今後對於諧量，都採用像 (2.2) 那種形狀的寫法。用這種寫法，圖 4，$\iota$ 所表示的諧量 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ 便是

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x。$$

我們最好用下面的方法，也在 (2.2) 裏顯明地寫出週期 $T$。

設 $T=2l$。則由等式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 有

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{l},$$

因此,週期 $T=2l$ 的諧量可以寫成

$$a\cos\frac{\pi x}{l}+b\sin\frac{\pi x}{l}。\qquad (2.3)$$

**§3. 三角多項式和三角級數** 命 $T=2l$, 考察頻率爲 $\omega_k=\frac{\pi k}{l}$, 週期爲 $T_k=\frac{2\pi}{\omega_k}=\frac{2l}{k}$ 的諧量

$$a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots)。\qquad (3.1)$$

因爲 $T=2l=kT_k$, 立刻知道 $T=2l$ 是所有諧量 (3.1) 的週期 (因爲週期乘上一個整數,還是週期,參看 §1)。因此,所有形如

$$s_n(x)=A+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right)$$

的和式,其中 $A=$常數,由於它是週期爲 $2l$ 的函數的和式,也是具有同一週期的函數(加上一個常數顯然不影響週期性,而且常數可以看成週期爲任何數的函數)。函數 $s_n(x)$ 叫做 $n$ 階三角多項式(週期是 $2l$)。

三角多項式雖然是由一些諧量所構成,但是這種函數比起簡單的諧量一般地是要複雜得多。我們可以給常數 $A,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_n$ 一些數值,使函數 $y=s_n(x)$ 的圖形根本不像簡單諧量那種又平滑又對稱的圖形。圖 5 表示三角多項式

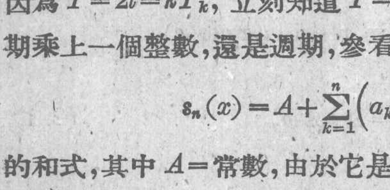

圖 5

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 3x$$

的圖形。無窮三角級數的和式

$$A+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right)$$

(如果收斂) 也表示週期是 $2l$ 的函

數。這種三角級數和式所表的函數的性質更是多種多樣了。於是問題就來了:是不是所有具有週期 $T=2l$ 的給定函數,都可能表達成三角級數的和呢?

我們將會見到,對於很廣泛的一類函數,這種表示的確是可能的。

設 $f(x)$ 屬於這類函數。就是說,$f(x)$ 可以展成諧量的和式,亦即結構極簡單的函數的和式。函數 $y=f(x)$ 的圖形,可由諧量的圖形"相加"而得到。如果把每個諧量看成簡諧振動,而把 $f(x)$ 作爲複合振動的標記,那末後者就分解爲一些個別的諧振動的和。

但是不要以爲三角級數只可用到振動現象上面去。根本不是這樣的。三角級數的概念,在研究許多別樣性質的現象時,還是很有用的。

如果

$$f(x)=A+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right), \tag{3.2}$$

那末,命 $\frac{\pi x}{l}=t$, 或 $x=\frac{tl}{\pi}$, 並以 $\varphi(t)=f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$, 便可得

$$\varphi(t)=A+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)。 \tag{3.3}$$

這級數的各個諧量有共同的週期 $2\pi$。因此,如果對於週期是 $2l$ 的函數,展式 (3.2) 成立,那末對於週期是 $2\pi$ 的函數 $\varphi(t)=f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$,展式 (3.3) 成立。反過來的結論,顯然也是正確的。這是說,如果對於週期是 $2\pi$ 的函數 $\varphi(t)$,展式 (3.3) 成立,那末對於週期是 $2l$ 的函數 $f(x)=\varphi\left(\frac{\pi x}{l}\right)$,展式 (3.2) 也成立。

這樣一來,只要對於具有"標準"週期 $2\pi$ 的函數,會解決展成三角級數的問題就夠了。這時的級數看起來是簡單些。因此我們只要建立關於形如(3.3)的級數的理論,並將最終結果翻譯成一般級數 (3.2) 的言辭。

**§4. 術語的明確說明。可積性。函數項級數** 讓我們來明確說

明一些微積分學裏的術語，並回憶一下那裏面的一些知識。我們說 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上是可積時，是指積分（卽使是旁義的）

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.1}$$

在初等意義下存在而言。因此，我們的可積函數 $f(x)$，或許是連續的，或許是在區間 $[a, b]$ 上有有限個間斷點，而在間斷點的近傍，函數可能是有界的，也可能是無界的。

函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上叫做絕對可積的，如果函數 $|f(x)|$ 在這區間上是可積的。在積分學教程裏證明過：如果積分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

存在，那末積分 (4.1) 一定是存在的。反過來不一定對。又如果 $f(x)$ 是絕對可積的，而 $\varphi(x)$ 是有界可積函數，那末乘積 $f(x)\varphi(x)$ 是絕對可積的。

我們提出下面的重要命題：

設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，在有限個點 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ $(a<x_1<x_2<<\cdots<x_m<b)$ 處沒有導數，且 $f'(x)$ 在區間 $[a, b]$ 可積。那末

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx\text{。} \tag{4.2}$$

在積分學的教程裏，通常是就 $f'(x)$ 處處存在的情況來證明這個公式的。因此我們要按現在所考慮的情況來進行證明。

對於足夠小的 $h>0$，有

$$f(x_1-h)-f(a)=\int_a^{x_1-h} f'(x)\,dx,$$

$$f(x_{k+1}-h)-f(x_k+h)=\int_{x_k+h}^{x_{k+1}-h} f'(x)\,dx \quad (k=1, 2, \cdots, m-1),$$

$$f(b)-f(x_m+h)=\int_{x_m+h}^{b} f'(x)\,dx,$$

這是因爲在每一個區間 $[a, x_1-h]$，$[x_1+h, x_2-h]$，$\cdots$，$[x_{m-1}+h,$