

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $\cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

数学教学

思维导向的研究

SHUXUE JIAOXUE
SIWEI DAOXIANG DE YANJIU

杨孝斌 著



四川大学出版社

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2}$$

数学教学

思维导向的研究

SHUXUE JIAOXUE
SIWEI DAOXIANG DE YANJIU

ISBN 978-7-5614-4924-0



9 787561 449240 >

定价: 22.00元

数学教学

思维导向的研究

SHUXUE JIAOXUE
SIWEI DAOXIANG DE YANJIU

杨孝斌 著



四川大学出版社

责任编辑:傅 奕
责任校对:唐一丹
封面设计:墨创文化
责任印制:李 平

图书在版编目(CIP)数据

数学教学思维导向的研究 / 杨孝斌著. —成都:
四川大学出版社, 2010. 7
ISBN 978-7-5614-4924-0

I. ①数… II. ①杨… III. ①数学课—教学研究—中
小学 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 136861 号

书名 数学教学思维导向的研究

著 者	杨孝斌
出 版	四川大学出版社
地 址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发 行	四川大学出版社
书 号	ISBN 978-7-5614-4924-0
印 刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	148 mm×210 mm
印 张	7.25
字 数	220 千字
版 次	2010 年 8 月第 1 版
印 次	2010 年 8 月第 1 次印刷
定 价	22.00 元

版权所有◆侵权必究

◆读者邮购本书,请与本社发行科
联系。电 话:85408408/85401670/
85408023 邮 政 编 码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前 言

数学是思维的科学，数学对于人的思维能力的形成和科学的思维态度的养成具有不可替代的作用。数学教师应教会学生学会学习、学会思考，学生的数学思维能力的发展主要是靠教师的启发和引导。

数学教学思维导向的研究，既有着深厚的认识论、教学论、方法论和心理学理论基础，又有着坚实的数学教学实践基础。它源于对人的认识形成和思维发展的认识与思考，源于对教育学心理学理论的认识与思考，源于对人的数学能力形成过程的认识与思考，源于对数学的本质和数学教与学的本质的认识与思考，源于对数学教学的现实考察与思考。

数学教学思维导向的基本内涵是：数学教师在数学教学中，以数学知识为载体，通过对学生的数学思维活动的启发和引导，发展学生的数学思维能力和一般思维能力，养成科学思维的习惯，形成初步的数学研究能力和科学研究能力。思维导向意义下的数学教学，具有情境设计的指向性、教学过程的探究性、教学语言的启发性和教学内容的思想性等基本特征。

数学教学思维导向要求教师对学生进行启发，主要是从思维方式、思想方法等方面进行引领和导向。其基本方式是，通过教师对数学教学内容进行教学法加工和方法论重建，利用数学教学的启发性提示语对学生的数学思维活动进行启发和引导。

在数学教学思维导向过程中，数学教师应坚持问题驱动、分层提示、方法渗透、回顾反思等思维导向原则，并通过展现数学知识的发

展历程、揭示数学概念的数学本质、暴露数学活动的思维过程、构建数学知识的结构框图等思维导向策略，实现对学生的数学思维过程和数学探究活动的启发和引导，引领学生重走数学的发现之路，经历数学家在提出数学问题、发现数学结论中的数学思维和科学思维的“关键性步子”。

目 录

第 1 章 数学教学思维导向研究缘起	(1)
1.1 选题缘由	(1)
1.1.1 什么是具有教育价值的知识	(1)
1.1.2 数学教学是数学思维活动的教学	(3)
1.1.3 数学教学思维导向的由来	(6)
1.2 相关研究	(9)
1.2.1 思维与教学的研究	(9)
1.2.2 数学教学与数学学习的研究	(12)
1.3 研究内容与方法	(22)
1.3.1 研究内容	(22)
1.3.2 研究方法	(22)
本章总结：数学教学思维导向研究源于对理论与实践的 思考	(23)
第 2 章 数学教学思维导向研究的理论基础	(24)
2.1 数学教学思维导向研究的认识论基础	(24)
2.1.1 认识的根本任务	(25)
2.1.2 认识的发生学原理	(26)
2.1.3 人的认识的主观能动性	(27)
2.1.4 认识发展的过程观	(29)
2.2 数学教学思维导向研究的心理学基础	(31)
2.2.1 智力发展的阶段理论	(31)

2.2.2 最近发展区理论	(32)
2.2.3 多元智能理论与智力三元论	(34)
2.2.4 元认知理论	(35)
2.3 数学教学思维导向研究的教学论基础	(37)
2.3.1 启发式教学	(37)
2.3.2 思维训练理论	(39)
2.3.3 发现教学理论	(41)
2.3.4 “非指导性教学”理论	(42)
2.4 数学教学思维导向研究的数学方法论基础	(44)
2.4.1 波利亚的“发现法”	(44)
2.4.2 弗赖登塔尔的“再创造”	(45)
2.4.3 “问题解决”的理论	(47)
2.4.4 数学教学的二重原理	(48)
本章总结: 数学教学思维导向的研究有着深厚的理论基础	(50)
第3章 从案例中探索数学教学的思维导向	(51)
3.1 数学教学基本环节的思维导向分析	(53)
3.1.1 数学课题引入的思维导向分析	(53)
3.1.2 数学知识讲解的思维导向分析	(59)
3.1.3 数学探究活动的思维导向分析	(62)
3.1.4 数学教学小结的思维导向分析	(67)
3.2 数学教学基本课型的思维导向分析	(71)
3.2.1 数学概念教学的思维导向分析	(71)
3.2.2 数学命题教学的思维导向分析	(77)
3.2.3 数学解题教学的思维导向分析	(83)
3.2.4 数学思想方法教学的思维导向分析	(90)
本章总结: 从案例中探索出数学教学思维导向的部分内涵	(98)

第4章 数学教学思维导向的内涵解析	(100)
4.1 数学教学思维导向概述	(102)
4.1.1 数学教学思维导向的含义	(102)
4.1.2 数学教学思维导向的基本特征	(104)
4.1.3 数学教学思维导向下的数学学习	(114)
4.2 数学教学思维导向的具体表现	(116)
4.2.1 基于归纳的概括	(117)
4.2.2 源于直观的抽象	(121)
4.2.3 始于猜想的发现	(124)
4.2.4 寓于理解的生成	(126)
4.3 数学教学思维导向对教师的要求	(130)
4.3.1 树立思维导向的教学理念	(131)
4.3.2 具备良好的数学素养	(132)
4.3.3 掌握一定的教育学、心理学理论	(133)
4.3.4 发展出有效的思维导向策略	(134)
4.3.5 对教学内容进行教学法加工和方法论重建	(134)
本章总结: 数学教学思维导向是教师对学生的启发和引导	(136)
第5章 数学教学的思维导向原则	(138)
5.1 问题驱动原则	(138)
5.1.1 预设具有启发性的问题	(140)
5.1.2 利用启发性提示语驱动思维	(141)
5.1.3 把新知识的教学当作解题教学来教	(144)
5.2 分层提示原则	(146)
5.2.1 给学生的思考留出时间	(146)
5.2.2 由远及近地启发	(147)
5.2.3 由易到难地推进	(149)
5.3 方法渗透原则	(151)
5.3.1 重视数学大观点、大方法的教学	(151)

5.3.2 渗透科学研究的一般方法	(153)
5.4 回顾反思原则	(154)
5.4.1 启发学生反思数学思维过程	(155)
5.4.2 引导学生总结数学解题方法	(157)
本章总结: 数学教学思维导向的基本原则	(158)
第6章 数学教学的思维导向策略	(159)
6.1 展现数学知识的发现历程	(160)
6.1.1 三角学发展简史	(161)
6.1.2 三角学的历史对三角函数教学的启示	(165)
6.2 揭示数学概念的数学本质	(167)
6.2.1 三角函数的函数本质	(168)
6.2.2 三角函数定义的“三角比”本质	(170)
6.3 暴露数学活动的思维过程	(172)
6.3.1 探究新的定义方式	(172)
6.3.2 重新表述问题	(175)
6.3.3 教师正确示范或故意出错	(178)
6.4 构建数学知识的结构框图	(180)
本章总结: 数学教学思维导向的基本策略	(182)
第7章 数学教学思维导向的实践与反思	(183)
7.1 数学教学思维导向的准实验研究	(183)
7.1.1 对“曲线与方程”的认识	(183)
7.1.2 对“曲线与方程”教学的认识	(184)
7.1.3 “曲线与方程”教学的思维导向设计	(186)
7.1.4 “曲线与方程”思维导向教学的实验	(197)
7.2 数学教学思维导向的实践反思	(197)
7.2.1 前后测说明	(197)
7.2.2 教学实验的效果分析	(201)
7.2.3 “曲线与方程”思维导向教学实践反思	(206)

本章总结：“曲线与方程”思维导向设计的教学效果较好	
.....	(207)
第 8 章 结束语	(208)
8.1 研究的主要结论与创新之处	(208)
8.1.1 研究的主要结论	(208)
8.1.2 研究的创新之处	(209)
8.2 进一步的研究	(209)
参考文献	(211)
后记	(219)

第1章 数学教学思维导向研究缘起

“重要的不是获得知识，而是发展思维能力。教育无非是一切已学过的东西都忘掉后所剩下的东西。”

——（德）冯·劳厄

1.1 选题缘由

1.1.1 什么是具有教育价值的知识

教育过程是一种传递知识并促进学生认知发展的过程，这是所有教育研究者都认可的事实。然而，在教育过程中，到底应该传递哪些知识给学生？学生又主要是通过哪些知识来发展他们的思维力和认识力的？这些问题一直是困扰教育研究者的核心问题。美国学者索尔蒂斯把这些问题概括起来，将研究视点引向了“什么知识最有价值”这一问题上^①，突出了这一教育研究的核心问题。

在教育过程中，对“什么是具有教育价值的知识”这一问题的不同回答，将会产生以不同的价值标准来选择的课程知识体系，导致完全不同的教育结果。那到底什么是具有教育价值的知识呢？当学生把所学知识都忘掉以后剩下来的能配称为教育的东西到底是什么呢？用怀特海的话说，就是“完全渗透入你的身心的原理，一种智力活动的

^① 周浩波. 教育哲学 [M]. 北京：人民教育出版社，2000：120.

习惯,一种充满学问和想象力的生活方式”;用爱因斯坦的话说,就是“独立思考和判断的总体能力”,所以德国物理学家冯·劳厄说:“重要的不是获得知识,而是发展思维能力。”教育的最根本任务就是要养成人进行智力活动的习惯和独立思考的能力。因此,有关学科思维方法、科学探究方法的知识就是最具有教育价值的知识。教育就是要以具体知识为载体,发展人的思维能力和科学研究能力。

把“什么是具有教育价值的知识”这一问题落实到数学教育上,自然提出了“什么是具有教育价值的数学知识”的问题。对这一问题的回答需要考虑“数学教育的价值取向”,因为不同的数学教育价值取向提出了不同的数学知识的教育价值判断标准,最终产生不同的数学课程知识体系和数学教学活动。

纵观数学教育的发展历史,始终存在着两种基本的价值取向,其一是注重数学的实用性;其二是注重数学的思维训练功能。^①我国的数学教育,受古代数学重视实用性的特点的影响,一直以来注重数学的实用性,而对数学的思维训练功能重视不够。尤其是20世纪80年代以来,在种种压力的影响下,这种实用主义的数学教育似乎已经发展成为一种极端的功利主义,成为“以考定教、唯分是举”的教育。这样的数学教育,对学生的数学能力的形成和数学思维的发展极为不利。从更高的层面看,对社会的发展与科学的进步更是极不可取的。

教育是发展和完善人的活动,数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展过程中具有独特的不可替代的作用,在形成人对世界的认识观和方法论方面起着重要作用。^②数学教育应教会学生学会学习、学会思考,数学教育的职责是帮助每个学生最大限度地发现和发展他们的能力。因此,数学教学不仅仅是基本数学知识与基本数学技能的教学,更应该是基本数学思想方法和基本数学活动经验的教学。数学教育要引导学生认识数学的科学价值与文化价值,培养学生提出问

① 黄翔. 数学教育的价值 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 2.

② 涂荣豹. 数学教学认识论 [M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2006: 17.

题、分析问题、解决问题的能力，促使全体学生学会数学地思维，发展他们的数学思维能力和一般科学研究能力。

以上关于数学教育价值取向的分析，实际上已经回答了“什么是具有教育价值的数学知识”的问题。要在数学教学中教“有教育价值的数学知识”，就是要求在数学教学中，结合具体数学知识的教学，渗透数学思想方法和科学研究一般方法，促进学生数学地理解与数学地思维，提高学生的问题意识与探究能力，最终发展学生的数学思维能力和科学研究能力。

1.1.2 数学教学是数学思维活动的教学

(1) 数学是思维的科学

数学是思维的科学。数学从它诞生那天起，就与思维结下了不解之缘。数学的存在和发展都要依靠思维，都要通过思维来表现。反过来，数学又是思维的工具，精湛的思维艺术常常要借助数学显示美感和力量。^① 数学能够启迪、培养、发展人的思维。虽然也有其他学科或其他方式可以培养人的思维，但在深度、广度、系统性等方面，是无法与数学相比的。^②

(2) 数学教学要发展学生的思维能力

数学作为全世界学生共同学习的科目，作为培养学生智力、发展学生能力的主要知识载体，对于学生思维能力的形成和科学的思维态度的养成具有不可替代的作用。前苏联数学教育家斯托利亚尔在列举数学教育目的时把发展学生的数学思维放在第一位，他在《数学教育学》一书中指出：数学教学是数学思维活动的教学，而不仅仅是数学知识（数学思维活动的结果）的教学。^③

① 徐利治，王前. 数学与思维 [M]. 大连：大连理工大学出版社，2008：1.

② 单增. 数学是思维的科学 [J]. 数学通报，2001（6）：0-2.

③ （苏）斯托利亚尔. 数学教育学 [M]. 丁尔陞，等译. 北京：人民教育出版社，1984.

在谈到在数学中培养学生的创新能力时,史宁中教授指出,“创新能力依赖于三方面:知识的掌握、思维的训练、经验的积累,三方面同等重要。关于‘知识的掌握’,我国的中小学数学教育是没有问题的;关于‘经验的积累’,大概还差得很多;关于‘思维的训练’,我们做得也不够,只能打五十分”^①。

因此,数学教学不仅要教给学生数学的概念、公式、定理等具体的数学知识,更应教给学生数学的思维方式、数学的思想方法和科学研究的一般方法,在发展数学能力的同时发展学生的问题意识和解决问题的能力。

(3) 思维能力的发展主要靠启发和引导

思维主要是靠启迪,而不是靠传授。越是讲得一清二楚,学习者就越不需要思维。数学教学的过程,应是学生在教师的引导下,通过自己的数学思维活动来学习数学家思维活动的成果,并发展自己的数学思维能力的过程。

要培养具有创新能力的学生,首先要有创造性的老师。创造性的老师应具备以下几个特征:用热情感染学生;用问题激发学生;用思维引领学生;用方法启迪学生。数学教师在教学中应让学生主动思维、自主活动,而不是代替学生思维。用特级教师陶维林的话说就是:“数学老师应向体育老师学习,应教会学生跑步的要领,而不是每次上课都‘亲自跑五圈’。”

要使数学教学过程成为数学思维活动的教学,就需要数学教师对学生数学思维活动的引领和导向。数学教师应通过问题驱动、分层提示等教学策略,充分暴露数学家和教师自己的数学思维过程,把知识的产生与形成过程展现给学生,为学生的数学思维活动创造良好的条件。因此,教师在数学教学中需要用自己的亲身经验,结合学生的实际情况,创设恰当的问题情境,设计合适的启发性提示语,引导学生的思维向着生成数学知识、思想、方法和意义的方向发展。

^① 史宁中.《数学课程标准》的若干思考 [J]. 数学通报, 2007 (5): 1-5.

(4) 思维导向是数学教学的有效方式

数学教学是“以数学育人”的教育活动，数学教学的根本目标是实现“数学的教育意义”，即：通过让学生经历数学活动的探究过程，激发学生学习数学知识和科学知识的兴趣和热情，领会数学的思想方法，感悟科学研究的一般方法，发展学生的数学思维能力和科学研究能力，最终发展学生的认识力（包括思维力、判断力、洞察力、鉴赏力、辨析力、预见力、想象力等能力）。这一根本目标的实现，有赖于两类基本的数学探究活动的开展：1）以学生自主活动为主的探究——寻找思维线索的数学探究；2）教师引导下的学生主动探究——教师暗示线索的数学探究。

教育在人的发展上具有主导作用，主要体现在教师的主导作用上。所谓教师的主导地位，即是指“教师是学生学习的主要向导”^①。因此，基于现实的可能和实际的需要，教师应成为学生数学探究活动的助手和向导，教师引导下的学生主动探究应是数学教学的主要形式，数学教学思维导向将成为在数学教学中发展学生数学思维能力的有效方式。

教师对学生数学活动的引导，主要是从思维方式、思想方法等方面进行的。本书把这种引导称之为“数学教学的思维导向”，其基本方式是在对数学教学内容进行教学法加工和方法论重建的基础上，数学教师利用数学教学的启发性提示语对学生的数学思维活动进行恰当而有效的暗示、启发和引导。

所谓导向，作名词讲是“引导的方向”之意，作动词讲意为“使事物向某个方向发展”。本书的思维导向，是对思维活动的暗示、启发和引导。数学教学思维导向即是指数学教师在数学教学中，以数学知识为载体，采用恰当的教学方法和策略，对学生的思维活动（主要是数学思维活动）进行引领和导向。其目的是帮助学生形成良好的数学知识结构，发展学生的数学问题意识、数学思维能力和一般思维能

^① 此观点是南京师范大学涂荣豹教授在研课过程中提出来的。

力,养成科学思维的习惯,形成初步的科学研究能力。

1.1.3 数学教学思维导向的由来

(1) 文献选读引发的思考

关于思维导向一词的由来,一方面借用了加里培林的“智力活动导向结构”的概念,另一方面受到杜威的“思维与教学”理论的启示。

前苏联数学教育家Л.М.弗利德曼的《中小学数学教学心理学原理》一书中介绍了由前苏联教育家Л.Я.加里培林^①提出的“智力活动导向结构”的概念。加里培林认为“在每一个智力活动中都有导向的、执行的、检查的三个部分。在形成概念时,与活动的导向作用关系密切”;“教学过程中,有范例模仿、类型匹配、特征分析等三种不同类型的导向”。^②在对“智力活动导向结构”的理解和相关论著的阅读过程中,笔者开始思考本书。

在思考数学教学思维导向等问题的同时,笔者与导师和学友们学习了美国教育思想家杜威的《思维与教学》一书。杜威在该书的序言中就明确指出:“现在学校苦于课程的繁多,每一课目又各有它的繁复的原则和教材;教师苦于工作的加重,团体教学以外,又添上了个别的指导。如果找不到一种统一性的线索、简单化的元素,那么,这一切结果也徒陷于纷乱。本书所代表的信念是:这统一的元素,就在于所谓科学的思维态度的养成。有人以为这种思维态度和儿童的教学并不相干,而本书所代表的信念又是:儿童期的天真的好奇,丰满的想象,以及试验的探索的爱好,便近于——很近于——科学的思维的态度。”^③在这本书接下来的部分,杜威详细分析了“思维”“反省的

① 原书译为加里别林,在其他文章和专著中一般译为“加里培林”,本书采用后者。

② (苏)弗利德曼 Л.М. 中小学数学教学心理学原理 [M]. 陈心五,译. 北京:北京师范大学出版社,1987:68.

③ (美)约翰·杜威. 思维与教学 [M]. 孟宪承,俞庆棠,译. 上海:商务印书馆,1936:序.