高职高专教育“十二五”规划教材

高等数学 上册

GAODENG SHUXUE

主 编 常瑞玲

北京工业大学出版社

高职高专教育“十二五”规划教材

高等数学

（上　册）

主　编：常瑞玲
副主编：李金嵘　侯秀安
郑兆顺
参　编：郭　新　何　青
纪保存　徐献卿

北京工业大学出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，结合多年高职高专高等数学教育研究成果及精品课一线教学实践经验，并认真研究、分析、总结国内的一些高等数学教材的基础上，精心编写而成。全书分上、下两册，上册共六章，内容分别是预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分。本教材所需课时约为140学时，标有“*”的内容可根据不同专业选学。本书可供高职高专院校师生使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上下册）/常瑞玲主编. —北京：北京工业大学出版社，2010. 8

ISBN 978-7-5639-2330-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①常… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第149860号

高等数学 （上下册）

主　　编：常瑞玲	**经销单位**：全国各地新华书店
责任编辑：刘庆保　刘鹏飞	**开　　本**：787 mm×1 092 mm　1/16
出版发行：北京工业大学出版社	**印　　张**：23
地　　址：北京市朝阳区平乐园100号	**字　　数**：604千字
邮政编码：100124	**版　　次**：2010年8月第1版
电　　话：010－67391106　010－67392308（传真）	**印　　次**：2010年8月第1次印刷
电子信箱：bgdcbsfxb@163. net	**标准书号**：ISBN 978-7-5639-2330-4
承印单位：徐水宏远印刷有限公司	**定　　价**：45. 00元（上下册）

序

常瑞玲老师编写的《高等数学（上下册）》，阅后给人耳目一新的感觉。其特色主要体现在如下几个方面：

该教材根据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，结合多年高职高专高等数学教育研究成果及精品课建设和一线教学实践经验，精心编写而成。

（1）立足高职，充分发挥高等数学技术教育功能和文化教育功能，突出了高等数学的教学本质。

（2）注重教学方法论的指导地位，把提高学生的一般科学素养、文化修养，以及形成和发展学生数学品质作为高等数学的教育目标。

（3）高等数学要为学习相关专业课程和后继课程服务，为培养学生的思维能力服务，为学生处理和解决相关实际问题服务，为学生的可持续发展服务。

（4）注重概念方法的教学，强化基本概念脱胎于实际过程和主要方法的理念，在适度注意数学的严密性、系统性的基础上，返璞归真，尽量使数学知识生活化、通俗化、简单化。

（5）注重培养学生用数学思想和方法分析解决问题的能力，特别是用数学的思想、概念、方法，消化吸收工程概念和工程原理的能力，把实际问题转化为数学模型的能力，求解数学模型的能力。

（6）该书在例题的处理上，层次分明、衔接得当、前后贯通，特别是穿插的“思考”问题，对打破学生的思维定势很有益处。

（7）每章后面，结合内容附有相关数学史话或数学实验，并适当介绍相关数学软件的使用，有利于发挥数学的两个教育功能以及培养学生用计算机及相应数学软件求解数学问题的能力。

看来，作者对《高等数学（上下册）》的编写下了工夫、做了努力，期望本书在使用过程中能日臻完美。

杨世明

全国数学科学方法论研究交流中心副主任

目　　录

第一章　预备知识

微积分是高等数学的核心，函数是微积分的研究对象，极限是微积分的研究工具．微积分是通过极限方法来研究函数的分析性质（连续性、可导性、可积性等）和分析运算（极限运算、微分运算、积分运算等），因此极限概念是微积分的重要概念，是微积分的精华，也是高等数学的灵魂．

第一节　函数的概念

函数是自然科学中普遍使用的数学概念之一，它是数学的基础概念，我们对函数概念已经有所认识，因为贯穿于中学代数的一条主线就是函数．近年来，在社会科学方面，由于有一些学科向定量化的方向发展，函数概念也已广泛地应用到这些学科之中，因此函数在应用上已超出了数学的范畴．高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程，本章一方面要复习中学已学过的函数概念和某些函数的性质，另一方面也对函数的有关知识作些必要的补充．

一、常用符号

高等数学的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的．一些专门符号在下文中将依次引入，另外还需要引入一些数理逻辑符号和常用的数学符号．数学语言的符号化是现代数学发展的必然趋势，它既能使定义、定理的叙述和定理的证明过程简洁，明确，易于理解、记忆，又能使高等数学的语言与现代数学的语言衔接贯通．

1. 蕴涵符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“若……则……”．符号“$\Leftrightarrow$”表示“充分必要”或“等价”．

说明：

（1）设 P 与 Q 表示两个陈述句，则“$\Rightarrow$”的符号连接起来就是

$$P\Rightarrow Q$$

它表示 P 蕴涵 Q，或若有 P 则有 Q．

用“$\Leftrightarrow$”的符号连接起来，就是

$$P\Leftrightarrow Q$$

它表示 P 与 Q 等价，或 P 蕴涵 $Q(P\Rightarrow Q)$ 且 Q 蕴涵 $P(Q\Rightarrow P)$．

例如，等腰直角三角形 $\Rightarrow$ 直角三角形；等腰直角三角形 $\Leftrightarrow$ 三角形有两个角都等于 $45°$．

（2）命题 $P\Rightarrow Q$ 与非 $Q\Rightarrow$ 非 P 是等价的．如果要证明命题 $P\Rightarrow Q$ 为真，那么证明命题非 $Q\Rightarrow$ 非 P 为真即可．

2. 量词符号

（1）全称量词的符号是“$\forall$”，表示“对任意的”或“对任一的”．

(2) 存在量词的符号是“∃”,表示“存在”或“能找到”.

例如,$A \subset B$,即集合A是集合B的子集,也就是,集合A的任意元素x都是集合B的元素,用符号表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

$A = B$ 用符号表示为

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B, \text{且 } \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

3. 某些常用数学符号

(1) 阶乘符号.

设n是自然数,符号“$n!$”,读作“n的阶乘”,表示不超过n的所有自然数的连乘积. 如:$3! = 3 \times 2 \times 1, 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. 为了运算上方便,规定$0! = 1$.

(2) 双阶乘符号.

设n是自然数,符号“$n!!$”,读作“n的双阶乘”,表示不超过n并与n有相同奇偶性的自然数的连乘积. 如:$6!! = 6 \times 4 \times 2, 7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1$.

说明:$n!!$不是$(n!)!$.

(3) 最大(小)数的符号.

符号 max 是英文 maximum 的缩写,读作“最大”. $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,表示$a_1, a_2, \cdots, a_n$这$n$个数中的最大者.

符号 min 是英文 minimun 的缩写,读作“最小”. $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,表示$a_1, a_2, \cdots, a_n$这$n$个数中的最小者.

如:$\max\{5,7,3,2\} = 7, \min\{5,7,3,2\} = 2$.

二、常量、变量与常用数集

在观察各种现象或过程的时候,经常会遇到两种不同的量:一种是在过程中保持不变,或取一个固定数值的量,这种量称为常量;另一种是在过程中会起变化,或可在一定的范围内取不同数值的量,这种量称为变量. 通常用a, b, c等表示常量,用x, y, z, t等表示变量. 如一架飞机在飞行过程中,乘客人数是一个常量,而飞机飞行的高度是一个变量.

讨论变量间的数量关系时,必须明确变量的取值范围,数集是表示变量取值范围的常用方法.

在本书中,变量总是在实数范围内讨论. 常用的数集除了有自然数集 **N**、正整数集 $\mathbf{N}_+$、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R** 外,还有各种类型的区间. 设$a, b \in \mathbf{R}$且$a < b$,则:

开区间$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$;

闭区间$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

左半开区间$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$;

右半开区间$[a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$;

无穷区间$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$;

同理,$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$;$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x\}$;$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$;$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\}$;

此外,为了讨论函数在一点邻近区间的某些性质,引入点的邻域概念.

定义 1.1 设$a, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$,数集$\{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \delta\}$,即实数轴上和$a$点的距离小于$\delta$的点的全体,称为点$a$的$\delta$邻域,记作$N(a, \delta)$. 如图 1 - 1(a) 所示,点$a$与数$\delta$分别称为这邻域的中心与半径. 有时用$N(a)$表示点$a$的一个泛指的邻域. 数集$\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$

称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $N(\hat{a},\delta)$,如图 1－1(b) 所示.

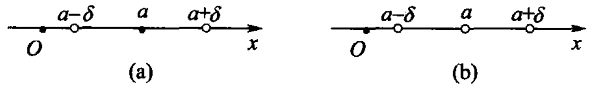

图 1-1

显然, $N(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$, $N(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

三、函数的概念

定义 1.2　设 x 和 y 是两个变量,D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,任意 $x\in D$,变量 y 按照某个对应关系(如 f) 有唯一确定的实数与之对应(记作 $f(x)$),则称 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域,数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

函数的定义域,对于具有实际意义的函数来说,要按题意来确定;对于抽象地用公式表达的函数,函数的定义域是使公式有意义的自变量的一切取值.

例 1　某城市一年内各月毛线的零售量(单位:百千克) 如表 1-1 所示.

表 1-1　各月毛线零售量表

月份 t/ 月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s/ 百千克	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

表 1-1 表示了某城市毛线零售量 s 随月份 t 变化的函数关系. 它的定义域 $D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

例 2　某河道的一个断面图形如图 1-2 所示. 其深度 y 与岸边一点 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系如图 1－2 中曲线所示. 它的定义域 $D=[0,b]$.

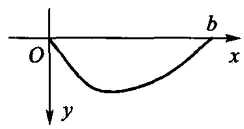

图 1-2

例 3　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

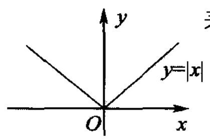

图 1-3

表明 y 是 x 的函数,它的图像如图 1－3 所示. 定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$.

例 4　函数

$$y=\begin{cases}x-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

也表明 y 是 x 的函数,它的图像如图 1－4 所示. 定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$.

例 5　确定函数 $y=\dfrac{\lg(1+x)}{x}$ 的定义域.

解:该函数的定义域 D 为满足不等式组

$$\begin{cases}1+x>0,\\ x\neq 0\end{cases}$$

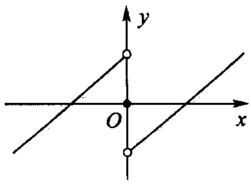

图 1-4

的 x 的集合,即 $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

四、函数的表示方法

表示函数时,要把函数的定义域和对应关系表述清楚. 一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法. 常用的方法有:表格法、图示法和公式法(解析法).

(1) 以表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示法,如例 1 和“数学用表”中的函数都是用表格表示的.

(2) 用图形表示函数的方法称为函数的图示表示法,例 2 的函数就是用图示法表示的.

(3) 用数学式表示函数的方法称为函数的公式表示法,也称为解析法. 例 3、例 4、例 5 的函数都是用公式法表示的. 在高等数学中讨论的函数一般都用公式法表示.

例 3、例 4、例 5 的函数虽然都是用公式表示的,但它们又代表了不同的情形. 例 5 中的函数,定义域中任何一个 x 相对应的 y 都用同一个解析式表示;而例 3、例 4 中的函数,定义域中某些不同部分的 x,相对应的 y 的表达式不同. 如果一个函数在定义域的不同区间上(个别的区间也可退化为一点),对应关系分别用不同的解析式表示,则称这个函数为分段函数. 例 3,例 4 的函数都是分段函数,不过例 3 中的分段函数(又叫绝对值函数)可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$,即对应关系可化为一个式子.

必须注意:① 分段函数是用几个式子合起来表示一个函数,而不是表示几个函数,在科技、工程等实际中经常用到分段函数;② 在求分段函数的函数值时,应先确定自变量取值范围,再按相应的式子计算. 如例 4 中的函数,计算 $f(2)$,$f(0)$,$f(-2)$. 因为 $2\in(0,+\infty)$,$0\in\{0\}$,$-2\in(-\infty,0)$,所以 $f(2)=1$,$f(0)=0$,$f(-2)=-1$.

下面再给出几个常见的分段函数.

a. 取整函数.

$$y=[x]$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,即若 $n\leqslant x<n+1$,则 $[x]=n$(n 为整数). 因此其数学表达式可写为

$$[x]=\begin{cases}\cdots, & \cdots,\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots, & \cdots\end{cases}$$

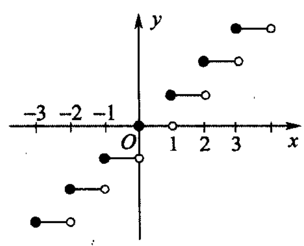

图 1-5

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为一切整数,如图 1-5 所示.

b. 符号函数.

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$,如图 1-6 所示. 有时可以运用它将某些分段函

数写的简洁一些.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0,\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0\end{cases}$$

可以记为 $f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot \operatorname{sgn} x$.

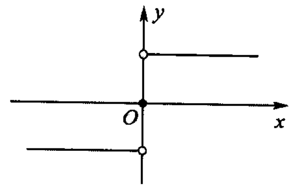

图 1-6

又如, $|x|=x\cdot \operatorname{sgn} x$. 这里 $\operatorname{sgn} x$ 起了符号的作用,因此称之为符号函数.

习　题　1－1

1. 指出下题中的函数哪些是同一个函数:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ 与 $y(x)=x-1$;　(2) $f(x)=\lg x^3$ 与 $g(x)=3\lg x$;

(3) $f(x)=\lg x^{10}$ 与 $g(x)=10\lg x$;　(4) $f(x)=(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x)=\sin x$.

2. 求函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$;　(2) $y=\sqrt{3x-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;　(4) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$;

(5) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2;\end{cases}$　(6) $f(\lg x)$,其中 $f(u)$ 的定义域为 $(0,1)$.

3. 确定函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sin x+\cos x$;　(2) $f(x)=a^x-a^{-x}\quad(a>0)$;

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$;　(4) $f(x)=x^3+4$.

4. 求函数的反函数:

(1) $f(x)=x^2\quad(0\leqslant x\leqslant+\infty)$;　(2) $f(x)=2^x+1$.

5. 设 $f(x)=2x^2+2x-4$,求 $f(1)$, $f(x^2)$, $f(a)+f(b)$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0\end{cases}$$

求 $f(\Delta x)-f(0)$(Δx 表示一个数).

8. 已知 $f(x)$ 是二次多项式,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$, $f(0)=0$,求 $f(x)$ 的表达式.

9. 已知 $f(\sin x)=\cos 2x+1$,求 $f(\cos x)$.

10. 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\cos 5x$;　(2) $y=\sin x^8$;

(3) $y = (2-3x)^{\frac{1}{2}}$;　　(4) $y = A\sin^2(\omega x + \varphi)$,其中 A,ω,φ 为常数;

(5) $y = e^{\sin 3x}$.

11. 在半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱,试将圆柱的体积 V 表示为其高 h 的函数.

12. 设火车从甲站出发,以 $0.5\text{km}\cdot\text{min}^{-2}$ 的匀加速度前进,经过 2min 后开始匀速行驶,再经过7min后以 $0.5\text{km}\cdot\text{min}^{-2}$ 的加速度匀减速停在乙站,试将火车在这段时间内所行驶的路程 s 表示为时间 t 的函数,并作出其图形.

第二节　函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,函数有以下性质。

一、有界性

设区间 $I\subset D$,如果函数 $f(x)$ 在 I 上的值域 A 有上界(或有下界、有界),则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界(或有下界、有界),否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无上界(或无下界、无界).

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界和无上界,有下界和无下界,有界和无界,用逻辑符号列表对比如下:

表 1-2　函数有界性的符号表示

有　界　性	符 号 表 示
函数 $f(x)$ 在 I 上有上界	$\exists A\in\mathbf{R},\forall x\in I\Rightarrow f(x)\leqslant A$(或 $<A$)
函数 $f(x)$ 在 I 上无上界	$\forall A\in\mathbf{R},\exists x\in I\Rightarrow f(x)>A$
函数 $f(x)$ 在 I 上有下界	$\exists B\in\mathbf{R},\forall x\in I\Rightarrow f(x)\geqslant B$(或 $>B$)
函数 $f(x)$ 在 I 上无下界	$\forall B\in\mathbf{R},\exists x\in I\Rightarrow f(x)<B$
函数 $f(x)$ 在 I 上有界	$\exists M>0,\forall x\in I\Rightarrow \lvert f(x)\rvert\leqslant M$
函数 $f(x)$ 在 I 上无界	$\forall M>0,\exists x\in I\Rightarrow \lvert f(x)\rvert> M$

显然,函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界 $\Leftrightarrow$ 存在闭区间 $[-M,M]$ $(M>0)$,使

$$\{f(x)\mid x\in I\}\subset[-M,M]$$

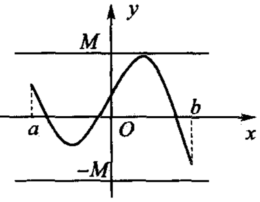

图 1－7

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界的几何意义是:存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$,函数 $y=f(x)$ 的图像位于以这两条直线为边界的带形区域之内,如图 1-7 所示.

如果 $f(x)$ 在定义域 D 上有界,则称 $f(x)$ 为有界函数. 例如函数 $\sin x$ 是有界函数. 函数 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,但它在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

二、单调性

设区间 $I\subset D$,如果对 $\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ 或\quad f(x_1)\geqslant f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间I上单调增加(或单调减少),此时I称为函数$f(x)$的单调增(或减)区间(有时简称为增(或减)区间).

如果将上述不等式改为

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{或} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间I上严格增加(或严格减少).

严格增加和严格减少统称为严格单调.严格增加、严格减少、单调增加、单调减少统称为单调.增区间和减区间统称为单调区间.在区间I上单调(严格)增加或单调(严格)减少的函数统称为区间I上的单调函数.从几何直观上看,区间I上单调增加(减少)的函数,其图像自左向右是上升(下降)的.在定义区间上单调(严格)增加或单调(严格)减少的函数统称为单调函数.

三、奇偶性

如果对$\forall x\in D$,都有$f(-x)=-f(x)$,则称函数$f(x)$为奇函数;如果对$\forall x\in D$,都有$f(x)=f(-x)$,则称函数$f(x)$为偶函数.

显然,奇函数和偶函数的定义域是关于原点对称的.奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于y轴对称.

四、周期性

对$\forall x\in D$,如果存在一个不为零的常数T,有$x\pm T\in D$,且$f(x+T)=f(x)$,则称函数$f(x)$为周期函数,T称为$f(x)$的周期.当周期函数存在最小正周期时,其周期通常指它的最小正周期.

显然,周期函数若以$T(T>0)$为周期,则在每个长度为T的区间$[nT,(n+1)T]$($n\in\mathbf{Z}$)上函数的图像是相同的.

例 1　讨论函数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$的特性.

解:设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$.

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$, $|f(x)|=\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|<\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$;

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$;

(3) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$, $x_1<x_2$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0$$

因此函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上是有界的、单调增加的奇函数,并由单调性得到$f(x)$不具有周期性.

第三节　反函数与复合函数

一、反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为D,值域为A,则对$\forall x\in D$,按照对应关系f,对应唯一一个$y\in A$.

反之,对 $\forall y\in A$,能否对应唯一一个 $x\in D$,使 $y=f(x)$ 成立呢?这就是我们要讨论的问题.

若对 $\forall x_1,x_2\in D$,且 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$($\Leftrightarrow$ 当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时,有 $x_1=x_2$),则称函数 $y=f(x)$ 是 D 与 A 间的一一对应.

一一对应与非一一对应列表对比如表 1-3 所示.

表 1-3　函数对应关系及其符号表示

函数对应关系	符号表示
$y=f(x)$ 是 D 与 A 间的一一对应	$\forall x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
$y=f(x)$ 是 D 与 A 间的非一一对应	$\exists x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

一般来说,函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 与其值域 A 间是非一一对应的. 但也存在这样的函数 $y=f(x)$,它在定义域的某个子集 I 与其对应的值域 $f(I)$ 间是一一对应的.

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D,I\subset D$. 当 $x\in I$ 时,$y\in f(I)$. 如果 $y=f(x)$ 是 I 与 $f(I)$ 间的一一对应,于是,对 $\forall y\in f(I)$,对应唯一一个 $x\in I$,使 $f(x)=y$,即在 $f(I)$ 上定义了一个函数,则称此函数是函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(I)$$

如函数 $y=x^2$ 的定义域是 $D=\mathbf{R}$,值域是 $A=[0,+\infty)$,它在整个定义域上没有反函数. 但当 $x\in I=[0,+\infty)\subset D$ 或 $x\in I=(-\infty,0]\subset D$ 时,$y=x^2(y\in f(I)=[0,+\infty))$ 分别有反函数 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$,它们的定义域都是 $f(I)=[0,+\infty)$,而值域分别是 $I=[0,+\infty)$ 和 $I=(-\infty,0]$.

显然,如果 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,则 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数,即它们互为反函数. 并且,如果函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域 A 和定义域 D. 于是有

$$f^{-1}[f(x)]\equiv x,\quad x\in D$$
$$f[f^{-1}(y)]\equiv y,\quad y\in A$$

如函数 $y=x^3$ 在它的定义域 $\mathbf{R}$ 上存在反函数 $x=\sqrt[3]{y}$,$x=\sqrt[3]{y}$ 的定义域是 $y=x^3$ 的值域 $\mathbf{R}$,而其值域是 $y=x^3$ 的定义域 $\mathbf{R}$.

不加证明地给出反函数存在的充分条件:严格单调函数必存在反函数.

函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$,y 是自变量. 但习惯上是用 x 表示自变量,因此将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调,改写为 $y=f^{-1}(x)$. 例如函数 $y=3x-2$ 的反函数是 $x=\dfrac{y+2}{3}$,要改写为 $y=\dfrac{x+2}{3}$. 一般所说的反函数都是指改写后的函数.

但要注意:函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像,在坐标平面上是同一点集. 当把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调后,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像就不同了,而是关于直线 $y=x$ 对称.

二、复合函数

先看一个例子. 设 $y=u^2$,$u=\sin x$,则任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $u=\sin x\in[-1,1]$;又由 $y=u^2$,有 $y=\sin^2x\in[0,1]$,即通过中间媒介 u,y 是 x 的函数,称 $y=\sin^2 x$ 是 $y=u^2$,$u=\sin x$ 的复合函数. 必须注意,并不是任意两个函数都可以复合. 如,$y=\arcsin u$,$u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合,因为对任何实数 x,都没有按给定的对应关系与之对应的 y 值,而函数的定

义域不能是空集.

定义 1.4　设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U,而 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X,$D = \left\{x \in X \middle| \varphi(x) \in U\right\} \neq \varphi$,则对任意的 $x \in D$,通过 $u = \varphi(x)$,变量 y 有确定的值 $f(u)$ 与之对应,得到一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,该函数称为 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 的复合函数,记作 $y = f[\varphi(x)]$,D 是它的定义域,u 称为中间变量.

如,做自由落体运动的物体,其动能 $E = \frac{1}{2}mv^2$,速度 $v = gt$,它们的复合函数$E = \frac{1}{2}mg^2t^2$.

复合函数还可以有多个中间变量.复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成,而更多的是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的.函数的复合和函数的四则运算是由简单函数构造复杂函数的重要方法.反之,许多复杂函数又可以分解成简单函数的复合或四则运算的结果.以后我们常用这种分解的方法简化对函数的讨论.因此,能够熟练地分析复杂函数的构造并化成简单函数的复合或四则运算是非常重要的.

例 1　设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \geq 0, \\ 2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

求 $f[f(3)]$.

解:$f[f(3)] = f[1 - 3] = f(-2) = 2 - (-2) = 4$.

例 2　设函数 $f(x) = x^3$,$\varphi(x) = \sin\sqrt{x}$,求 $f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$.

解:根据 $f(x)$,$\varphi(x)$ 的表达式,

$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^3 = \sin^3\sqrt{x};\quad \varphi[f(x)] = \sin\sqrt{f(x)} = \sin(x^{\frac{3}{2}})$$

例 3　已知 $y = \ln u$,$u = 4 - v^2$,$v = \cos x$,将 y 表示成 x 的函数.

解:$y = \ln(4 - v^2) = \ln(4 - \cos^2 x)$

例 4　分别指出函数 $y = \sin 5x$,$y = e^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由哪些简单函数复合而成的.

解:$y = \sin 5x$ 是由 $y = \sin u$,$u = 5x$ 复合而成的;

$y = e^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由 $y = e^u$,$u = \cos v$,$v = \frac{1}{x} = x^{-1}$ 复合而成的.

第四节　初 等 函 数

一、基本初等函数及其图像

1.幂函数

幂函数 $y = x^\alpha$ 的定义域及其性质与 α 的取值有关,但 $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,$x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 内都有意义.为了便于比较,只讨论 $x \geq 0$ 的情形,而 $x < 0$ 时的情形可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha > 0$ 时,函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$,在 $(0, +\infty)$ 内单调增加且无界;当

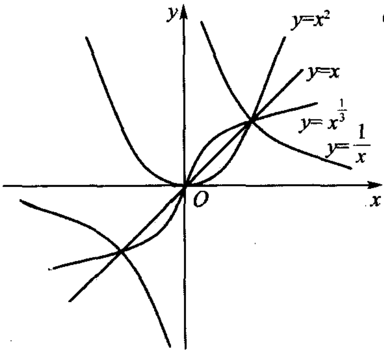

图 1-8

$\alpha<0$ 时,图像不过原点,但仍过点(1,1),在$(0,+\infty)$内单调减少且无界,曲线以坐标轴为渐近线. 图 1 - 8 中画出了 $\alpha=\pm1,\alpha=2,\alpha=\frac{1}{3}$ 的情形.

2. 指数函数

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 其定义域为 **R**,由于无论 x 取何值,总有 $a^x>0$ 且 $a^0=1$,所以它的图像全部在 x 轴上方,且通过点(0,1). 也就是说它的值域是$(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 x 轴负半轴为渐近线;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 轴正半轴为渐近线. 如图 1 - 9 所示.

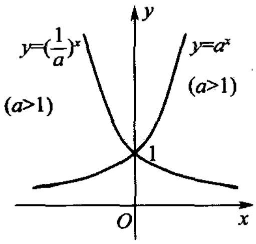

图 1 - 9

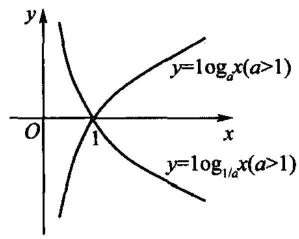

图 1 - 10

3. 对数函数

对数函数定义域为$(0,+\infty)$,图像全部在 y 轴右方,值域是 **R**. 无论 a 取何值,曲线都通过点(1,0).

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 y 轴负半轴为渐近线;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 y 轴正半轴为渐近线. 如图 1 - 10 所示.

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 互为反函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

4. 三角函数

三角函数包括下面 6 个函数:

(1) 正弦函数 $y=\sin x$. 其定义域为 **R**,值域为$[-1,1]$,奇函数,以 2π 为周期,有界. 如图 1 - 11 所示.

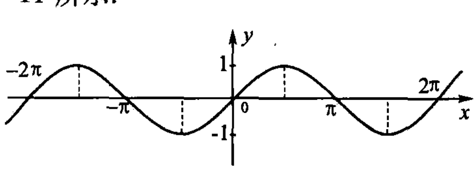

图 1 - 11

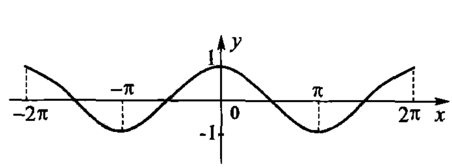

图 1 - 12

(2) 余弦函数 $y=\cos x$. 其定义域为 **R**,值域为$[-1,1]$,偶函数,以 2π 为周期,有界. 如图 1 - 12 所示.

(3) 正切函数 $y=\tan x$. 其定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,值域为 **R**,奇函数,以 π 为周期,在每一个周期内单调增加,以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1 - 13 所示.

(4) 余切函数 $y=\cot x$. 其定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $\mathbf{R}$,奇函数,以 π 为周期,在每一个周期内单调减少,以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1 - 14 所示.

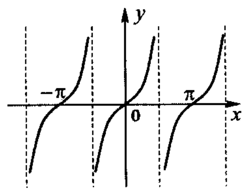

图 1 - 13

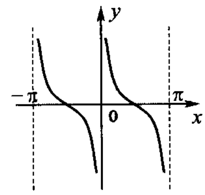

图 1 - 14

(5) 正割函数 $y=\sec x$. 其定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,偶函数,以 2π 为周期,在区间 $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$ 内单调增加,在区间 $\left(2k\pi-\pi,2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$ 内单调减少,以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1 - 15 所示.

(6) 余割函数 $y=\csc x$. 其定义域为 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,奇函数,以 2π 为周期,在区间 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$ 和 $\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调增加,在区间 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$ 和 $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调减少,以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线. 如图 1 - 16 所示.

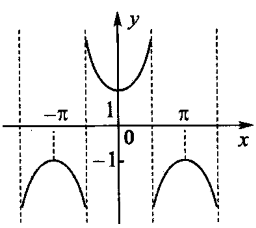

图 1 - 15

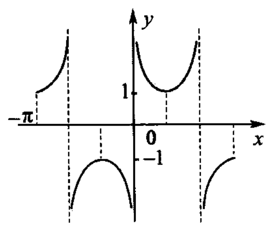

图 1 - 16

5. 反三角函数

常用的反三角函数有 4 个:

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$. 是正弦函数 $y=\sin x$ 在单调区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的反函数,因此其为作反正弦函数,其定义域是 $[-1,1]$,值域是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,奇函数,单调增加,有界. 如图 1 - 17 所示.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在单调区间 $[0,\pi]$ 上的反函数,因此称作反余弦函数,其定义域是 $[-1,1]$,值域是 $[0,\pi]$,单调减少,有界. 如图 1 - 18 所示.