配复旦大学蒋尔雄　高坤敏　吴景琨编《线性代数》

线性代数习题解答

戈衍三　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

配复旦大学蒋尔雄　高坤敏　吴景琨编《线性代数》

线性代数　习题解答

戈衍三　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书是复旦大学蒋尔雄、高坤敏、吴景琨编《线性代数》的全部习题解答。可以作为学习《线性代数》课程的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题解答/戈衍三编著.—北京:北京理工大学出版社,2010.6

ISBN 978-7-5640-3182-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①戈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-解题 Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 081035 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址 / http:// www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地质印刷厂
开　　本 / 850 毫米×1168 毫米 1/32
印　　张 / 10.875
字　　数 / 264 千字
版　　次 / 2010 年 6 月第 1 版　2010 年 6 月第 1 次印刷
印　　数 / 1~4000 册　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 20.00 元　　责任印制 / 边心超

本书出版时之寄语

数学严格说不属自然科学领域，而是宇宙中关于形和数以及它们相结合演化关系的科学学问，又是人类思维准确认识事物不可缺少的一种重要方法和工具。在现代高等理工教育中，尤其是杰出人才的培养中，加强对学生现代的物理、数学、化学、生物等基本规律和知识的培养势在必行，数学中的现代代数（线性代数）就是其中不可缺的分支之一。掌握现代代数潜心作题，由作题总结认识规律和应用的技巧是掌握核心内容走向应用的有效办法。戈衍三老师运用他数学基础功底，认真作了著名教材《线性代数》的全部习题，将此习题集出版以助大学生学习线性代数是很有意义的事。承蒙北京理工大学出版社由支持教育理念出发加以出版，在此表示感谢！最后要说明的是，我们不是数学家，对数学浩瀚王国所知甚少，只由个人经验作此寄语，愿读者不吝指教！

北京理工大学教授

王　越　陶　然

2009 年 8 月 5 日

前　言

复旦大学蒋尔雄、高坤敏、吴景琨编《线性代数》，作为计算数学专业线性代数的教材，内容除线性代数的经典理论外，还有“数值代数”中常用的一些线性代数的基本概念、基本性质和基本理论。《线性代数》精选的习题符合精讲多练，加强三基*训练的要求。综合分析它确实是一本好的教材。对于学习线性代数的广大读者，经过刻苦自学钻研，若碰到疑难题目，迫切需要有一个明确回答。有些难题还可以促使我们学会综合分析的思维方法，增强克服困难的能力和信心。因此我对此书的全部习题作出了解答。可供高等院校师生和自学读者作为参考用书。

本书能够出版，首先要感谢原北京理工大学校长、中国科学院和中国工程院院士王越的热情鼓励和推荐，他在百忙中审阅了书稿，并提出了很多有益的建议。感谢中国科学院数学与系统科学研究院计算数学所专家的不倦教诲，耐心地解答我的疑问和难题。

限于水平，书中有不妥之处，敬请读者指正。

戈衍三

2009 年 6 月于北京

* “三基”——基本概念、基本理论和基本技能训练。

内 容 简 介

第一章 第 1 题 将军点兵算题是一个关于最小公倍数和集合的交集的综合应用题。同时也复习了同余的概念。

第 4 题 n 个元素的所有子集问题，是集合论的一个最基本的命题。

第 10 题 集合 R 和运算 ω 与集合 R^+ 和运算 ω' 是同构的。

第二章 第 1 题 从例题 $f(n)=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ 的方法，类推出

$$f(n)=1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

$$f(n)=1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2}{12}(2n^2+2n-1)$$

$$\begin{aligned}f(n)&=1^8+2^8+\cdots\cdots+n^8\\&=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n\end{aligned}$$

但是一般的

$f(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$ 的表达式

根据著名数学家波利亚用递归方法推得。这个方法首先是帕斯卡提出的，是二项式的重要应用。这就是重要的递归模型。

第 11 题，12 题，18 题 对多项式作辗转相除法确定 Sturm 序列，求多项式的实根的个数。

第三章 第 14 题，18 题 利用范德尔蒙行列式性质解题。

第四章 第 13 题，14 题，15 题 是用初等变换求逆阵。

第 16 题 用加边法求逆阵。

第五章 第 2 题 利用分块矩阵进行块运算和加边法。把矩阵 A 分解为下三角阵 L 和上三角阵 U 的乘积，其中 L 的对角线元素都为 1。

第 5 题 高斯消去法得到的三角分解 $A=LU$ 中递推公式 u_{ki}，l_{ik}，$a_{ki}^{(s)}$ 的推导。

第七章 第 5 题 在直角坐标系 x，y，z 下，弹性力学中的应力矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix}$$

而在直角坐标系 x'，y'，z' 下的应力矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}\sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'}\\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'}\\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'}\end{pmatrix}$$

并且已知有 $B=T^{-1}AT$，这里 T 是坐标轴 x'，y'，z' 在 x，y，z 轴的方向余弦组成的可逆矩阵，证明

$$J_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

$$J_2=\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2+\sigma_x\sigma_z-\tau_{xz}^2+\sigma_y\sigma_z-\tau_{yz}^2$$

$$J_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\,\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}-\sigma_x\,\tau_{yz}^2-\sigma_y\,\tau_{xz}^2-\sigma_z\,\tau_{xy}^2$$

是直角坐标下的不变量。

本题通过二种方法证明。证明 1：由相似变换，矩阵 A 的特征值是不变量直接推得。证明 2：通过直接计算，逐项分类，排队，整理，得到同样的结论。这样可以加深对题目的理解和掌握。

第 10 题 用圆盘定理估计矩阵 A 的特征值的分布范围。

第 12 题 圆盘定理的推广。

第 13 题 确定矩阵的谱半径。

第 14 题 证明 Jacobi 矩阵是不可约的。

第八章 第12题 求一个酉矩阵，使矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

酉相似于上三角阵。

第九章 第6题 设A是实对称正定矩阵，证明

$$(AX,\ Y)\leqslant(AX,\ X)^{\frac{1}{2}}(AY,\ Y)^{\frac{1}{2}}$$

根据特征值，特征向量

$$X=\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\cdots+\alpha_nz_n$$

$$Y=\beta_1z_1+\beta_2z_2+\cdots+\beta_nz_n$$

$$AX=\alpha_1\lambda_1z_1+\alpha_2\lambda_2z_2+\cdots+\alpha_n\lambda_nz_n$$

$$AY=\beta_1\lambda_1z_1+\beta_2\lambda_2z_2+\cdots+\beta_n\lambda_nz_n$$

分别作乘法表

$$(AX,\ X)(AY,\ Y),$$

$$(AX,\ Y)^2$$

主对角线上元素全部消去。一般项化为

$$\alpha_i^2\beta_j^2\lambda_j\lambda_iX_i^2X_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2\lambda_i\lambda_jX_i^2X_j^2-2\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j\lambda_i\lambda_jX_i^2X_j^2=$$

$$\lambda_i\lambda_jX_i^2X_j^2\ (\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)^2\geqslant0$$

第十章 第4题 证明1：通过求行列式因子，不变因子，确定初等因子组求出Jordan标准形。证明2：通过求四级根向量，找到相似变换矩阵T的实践，巩固了对Jordan标准形理论的理解。

第15题 进一步强化求j级根向量，找相似变换矩阵T的方法。这是全书要求的最中心环节，也是三基训练的必然要求。

第十一章 第4题 对于n维向量空间的任何一种内积$(x,\ y)$令

$$\|x\|=\sqrt{(x,\ x)}$$

证明$\|x\|$是一种范数。

要验证它满足范数的三个条件：

(1) $X=0$，则 $\|X\|=0$

(2) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = \alpha\sqrt{(x, x)} = \alpha\|x\|$

(3) 我们要验证

$$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$$

由此推出只要

$$|(X, Y)| \leqslant \|X\| \|Y\|$$

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$$

两边分别作乘法表，两边主对角线的项对应相等，全部消去

$$2x_1x_2y_1y_2 \leqslant x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2 \qquad 0 \leqslant (x_1y_2-x_2y_1)^2$$

$$2x_1x_3y_1y_3 \leqslant x_3^2y_1^2+x_1^2y_3^2 \qquad 0 \leqslant (x_3y_1-x_1y_3)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$2x_{n-1}x_ny_{n-1}y_n \leqslant x_n^2y_{n-1}^2+x_{n-1}^2y_n^2$$

$$0 \leqslant (x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n)^2$$

Cauchy-Schwarg 不等式得到了证明。

第 8 题 将行列式 $|A+\varepsilon B-\lambda I|$ 根据二进制的一一对应规则分解为 2^3 个行列式，如果是 n 阶行列式，就要分解成 2^n 个行列式。这样计算，既有条理、有秩序，又不会混乱、遗漏和重复。

第十二章 第 5 题，6 题，7 题，9 题，10 题 根据广义逆定义必须满足 Penrose 方程，即方程组（p_1）～（p_4）来做题。

主要符号表

R	实数集
C	复数集
R^n	实 n 维向量空间
C^n	复 n 维向量空间
K	实数集 R 和复数集 C 泛称为数域 K
K^n	数域 K 上的 n 维线性空间
$A=(a_{ij})_{m\times n}$	m 行 n 列的矩阵
$r(A)$	矩阵 A 的秩
rank	秩
trA	矩阵 A 的迹
trace	迹
$\widetilde{A}$	方阵 A 的伴随阵
A^{T}、A^T	矩阵（或向量）A 的转置
transpose	转置
A^{H}、A^H	矩阵（或向量）A 的共轭转置
Hermitian	埃尔米特
$\|A\|$	矩阵 A 的行列式
$\det A$	矩阵 A 的行列式
determinant	行列式
A_{ij}	n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式
$\det A\begin{pmatrix} i_1、i_2\cdots i_k \\ j_1、j_2\cdots j_k \end{pmatrix}$	A 的子阵 $A\begin{pmatrix} i_1、i_2\cdots i_k \\ j_1、j_2\cdots j_k \end{pmatrix}$ 的行列式
$\mathring{A}=(A \mid \eta)$	线性方程组 $A\xi=\eta$，A 的增广矩阵

$\lambda(A)$	矩阵 A 的谱
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
J	矩阵的 Jordan 标准形
$W^{\perp}$	子空间 W 的正交补
$\dim W$	线性空间 W 的维数
维数	dimensional
I_{pq}	对换阵
$M_p(\alpha)$	倍乘阵
$M_{pq}(\alpha)$	倍加阵
V_{λ_0}	由对应于特征值 λ_0 的特征向量生成的特征子空间
$[\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_1^{(t)}]$	由向量 $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(t)}$ 所张成的子空间
$K^{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵全体构成的集合
I_n	n 阶单位阵
$O_{m\times n}$	$m\times n$ 零矩阵
A^+	A 的 Moore-Penrase 广义逆，或加号逆
$\mathrm{Sgn}\sigma$	符号数
$\Vert A\Vert$	$n\times n$ 方阵的范数
$\Vert A\Vert_1$, $\Vert A\Vert_2$, $\Vert A\Vert_\infty$	矩阵 A 的 l_p 范数（$p=1, 2, \infty$）
$W_1\oplus W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的直和

目　录

第一章　基本概念与和号Σ

习　题

1. 中国古算中有一个叫做将军点兵的算题，叫所有士兵三、三排队余下2名，五、五排队余下3名，七、七排队余下2名。问士兵总共有几名？满足上述要求的士兵数称为这个问题的解，试将这个问题的解的集合表示出来。

解　设士兵总共有x名。

依题意列方程式，即求解一次同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (\bmod 3) \\ x \equiv 3 & (\bmod 5) \\ x \equiv 2 & (\bmod 7) \end{cases}$$

显然，我们可分别解三个一次同余方程：

$M_1 = \{x \mid x \equiv 2 \bmod 3\} = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29,\cdots\}$

$M_2 = \{x \mid x \equiv 3 \bmod 5\} = \{3,8,13,18,23,28,33,38,\cdots\}$

$M_3 = \{x \mid x \equiv 2 \bmod 7\} = \{2,9,16,23,30,37,44,\cdots\}$

而后求三个集合M_1, M_2, M_3的公共的解。数3,5,7的最小公倍数，记为$[3,5,7]=105$。

所以　$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = 23 + 105m \qquad (m = 0,1,2,3,\cdots)$

答：士兵总共有$23+105m$名。

2. 若$A \subseteq B$，证明$A \cap B = A$。

证明　只要证明

$$A \cap B \supseteq A$$

$$A \cap B \subseteq A$$

一方面,任取 $a \in A$

因为

$$A \subseteq B$$

所以

$$a \in B$$

推出

$$a \in A \cap B$$

因此得到

$$A \cap B \supseteq A$$

另一方面,根据交集、子集的定义

$$A \cap B \subseteq A$$

$\therefore$ $$A \cap B = A$$

证完。

完全按照第 2 题的格式,证明课本 · 3 · 的例 1。

例 1　如果 $A \subseteq B$,那么 $A \cup B = B$。

证明　只要证明

$$A \cup B \subseteq B$$

$$A \cup B \supseteq B$$

一方面,任取 $a \in A \cup B$

或者 $a \in B$

或者 $a \in A$, 因为 $A \subseteq B$

所以 $a \in B$

两种情况都是 $a \in B$

因此得到

$$A \cup B \subseteq B$$

另一方面,根据并集、子集的定义

$$A \cup B \supseteq B$$

$\therefore$ $$A \cup B = B$$

证完。

3. 若A,B,C是三个集,证明

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

证明　(1)若元素$a\in A\cup B\longrightarrow a\in A\cup(B\cup C)$

$$a\in C\longrightarrow a\in A\cup(B\cup C)$$

故
$$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$$

反之,若元素

$$a\in A\longrightarrow a\in(A\cup B)\cup C$$

$$a\in B\cup C\longrightarrow a\in(A\cup B)\cup C$$

故
$$(A\cup B)\cup C\supseteq A\cup(B\cup C)。$$

由此证明了

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

(2) 若元素　$a\in A\cap B\longrightarrow a\in A\cap(B\cup C)$

$$a\in A\cap C\longrightarrow a\in A\cap(B\cup C)$$

故$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$

若元素$a\in A$,且$a\in B\cup C\longrightarrow a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\supseteq A\cap(B\cup C)$$

由此证明了

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(3) 从集合论考虑,左端为A元素与B与C公共元之和,右端为$A\cup B$与$A\cup C$的公共元,这样经过分解,配对得

$$\begin{cases}A\\A\end{cases}\quad\begin{cases}A\\C\end{cases}\quad\begin{cases}B\\A\end{cases}\quad\begin{cases}B\\C\end{cases}$$

因为
$$A\cap B\subseteq A,\ A\cap C\subseteq A$$

所以
$$右端点集=A\cup(B\cap C)=左端$$

证完。

4. 证明n个元素的集合的所有子集所成的集合共有2^n-1

个元素,如果把空集也作为它的元素,则有 2^n 个。

证明 枚举法设集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,

空集{0}

一个元素集{1},{2},{3},…,{n},共 n 个。

二元集{1,2},… C_n^2 个。

三元集{1,2,3},… C_n^3 个。

四元集{1,2,3,4},… C_n^4 个。

…

$n-1$ 元集$\{1,2,3,\cdots,n-1\}$,… C_n^{n-1} 个。

n 元集$\{1,2,\cdots,n\}$ C_n^n 个。

则 $$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$$

5. 证明

$$[0,1]=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{i},i\right]$$

$$(0,1)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i},1\right)$$

证明

$i=1,2,\cdots,n,\cdots \qquad i\geqslant 1 \qquad \min\limits_{i=1,2,\cdots}\{i\}=1$

$-\frac{1}{i}<0 \qquad \operatorname{Sup}\limits_{i=1,2,\cdots}\left\{-\frac{1}{i}\right\}=0$

第一式保留 0 点,每一项集包含 0 点,全部集的交集也包含 0 点。

第二式不包含 0 点和 1 点。因为每一项集都不包含这两点。

$$[0,1]=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{i},i\right]$$

$$(0,1)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i},1\right)$$

6. 设 M 是[0,1](即满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的 x 全体所成的集,称为