应用型本科院校规划教材

主编 孔繁亮

高等数学

上册

Advanced Mathematics

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

哈爾濱工業大學出版社

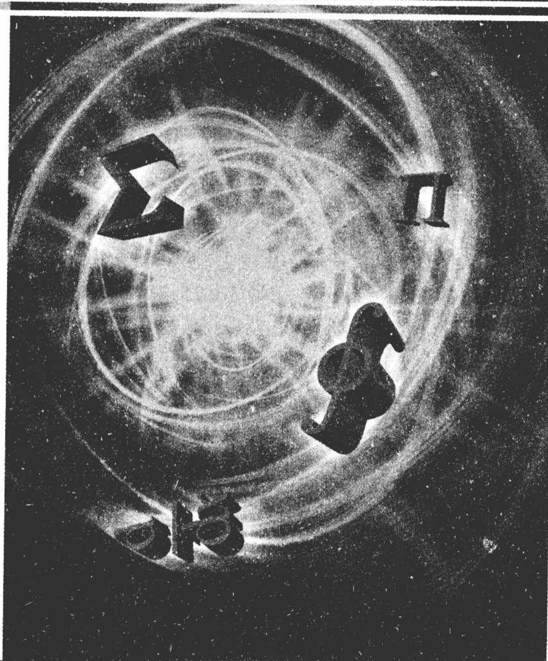
应用型本科院校规划教材

主　编　孔繁亮
副主编　朱　捷　张立彬

高等数学

上册

Advanced Mathematics



哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书是高等院校应用型本科教材，根据编者多年的教学实践，按照新形势教材改革精神，并结合国家教育部高等院校课程教学指导委员会提出的"高等数学课程教学基本要求"及应用性、职业型、开放式的应用型本科院校培养目标编写而成。上册内容为极限初步、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程与差分方程及上机计算(I)等五章。书末附有积分表、习题答案与提示，配备了学习指导书，并对全书的习题做了详细解答，同时也配备了多媒体教学课件，方便教学。本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，突出了应用性。

本书可供应用型本科院校各专业学生及工程类、经济管理类院校学生使用，也可供工程技术、科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/孔繁亮主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.8

应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-5603-2836-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①孔…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第158000号

策划编辑　赵文斌　杜　燕
责任编辑　尹　凡
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨太平洋彩印有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 16.25　字数 375 千字
版　　次　2010年8月第1版　2010年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2836-2
定　　价　60.00元(上、下册)

序

哈尔滨工业大学出版社策划的“应用型本科院校规划教材”即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的“应用型本科院校规划教材”，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用

讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

“应用型本科院校规划教材”的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

黑龙江省教育厅厅长

2010年元月于哈尔滨

前　　言

为了贯彻全国高等院校教育工作会议精神和落实国家教育部关于抓好教材建设的指示；为了更好地适应培养高等应用型技术人才的需要，促进和加强应用型本科院校“高等数学”的教学改革和教材建设，由黑龙江东方学院、哈尔滨理工大学、黑龙江科技学院、黑龙江大学、哈尔滨工业大学、黑龙江旅游学院等院校的部分教师参与编写了本教材。

在编写中，我们依据国家教育部课程教学委员会提出的“高等数学教学基本要求”，结合应用性、职业型、开放式的应用型本科院校的培养目标，努力体现以应用为目的，以掌握概念、强化应用为教学重点，以必需够用为度的原则，并根据我们的教改与科研实践，在内容上进行了适当地取舍。在保证科学性的基础上，注意处理基础与应用、经典与现代、理论与实践、手算与电算的关系。注意讲清概念，建立数学模型，适当削弱数理论证，注重两算（笔算与上机计算）能力以及分析问题、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，叙述通俗易懂，既便于教师教，又便于学生学。

本书 90 学时可讲完主要部分，加 * 号的部分可根据专业需要选用（或另加学时），或供学生自学。本书除可作为高等工科院校工程类、经济类、管理类等专业的高等数学教材使用外，也可可作为成人教育学院等其他院校作为教材，还可作为工程技术人员、企业管理人员的参考书。

本书由孔繁亮教授任主编，朱捷、张立彬任副主编，参加本书编写的有孔繁亮、朱捷、张立彬、巨小维。黑龙江大学刘绍华教授和哈尔滨工业大学仲崇彬教授分别审阅了本书书稿，并提出了宝贵意见，在此表示感谢！

高等应用型本科院校的蓬勃发展，为我国高等教育的发展增添了新的活力。如何搞好这个层次的教材建设，是教学改革的一个当务之急。我们编写的这套教材，就是其中的一个探索。由于我们的水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请广大师生、社会各界读者不吝指正。

编　　者

2010 年 5 月

目　录

第 1 章

极限初步

高等数学也称变量数学，是以变化着的函数为主要研究对象的一门数学课程，它的基础部分是微积分，微积分是学习现代科学技术的主要工具之一. 而极限是贯穿"微积分"始终的一个重要概念，是微积分的理论基础，是微积分中分析问题与解决问题的基本方法. 因此本章介绍极限及其相关的基本知识，为微积分学习奠定基础.

1.1 映射与函数

1.1.1 映射与函数概念

1. 映射概念

定义 1.1 设 X,Y 是两个非空集合，若对集合 X 中的每一个元素 x，均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个映射，记为 f，即

$$f:X\to Y$$

将 x 的对应元素 y 记作 $f(x):x\to y=f(x)$. 并称 y 为映射 f 下 x 的象，x 称为映射 f 下 y 的原象（或称为逆象）. 集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 $D_f=X$，而 X 的所有元素的象 $f(x)$ 的集合

$$\{y \mid y\in Y,y=f(x),x\in X\}$$

称为映射的值域，记为 R_f（或 $f(X)$）.

例 1.1.1 设 X 是平面上所有三角形的全体，Y 是平面上所有圆的全体，因为每个三角形都有唯一确定的内切圆，若定义对应法则

$$f:X\to Y$$

$$x\mapsto y \quad (x\text{ 是三角形},y\text{ 是其内切圆})$$

则 f 显然是一个映射，其定义域与值域分别为 $D_f=X$ 和 $R_f=Y$.

例 1.1.2 设 $X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，$Y=\{a,b,c,d\}$，下面所规定的对应关系 f 显然也是一个映射

$$f(\alpha)=a,\quad f(\beta)=b,\quad f(\gamma)=d$$

f 的定义域与值域分别为 $D_f=X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，$R_f=\{a,b,d\}\subset Y$.

例 1.1.2 中,R_f 是 Y 的真子集.

概括起来,构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

(1) 集合 X,即定义域 $D_f = X$;

(2) 集合 Y,即限制值域的范围:$R_f \subset Y$;

(3) 对应法则 f,使每个 $x \in X$,有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

需要指出两点:

(1) 映射要求元素的象必须是唯一的.

例如,设 $X = \mathbf{R}^+$,$Y = \mathbf{R}$,对每一个 $x \in \mathbf{R}^+$,它的象 $y \in \mathbf{R}$ 且有 $y^2 = x$,这样的 f 不是映射. 因为对每一个 $x \in \mathbf{R}^+$,都有两个实数 $y_1 = \sqrt{x}$ 与 $y_2 = -\sqrt{x}$ 与之对应,即 f 不满足象的唯一性.

对于不满足象的唯一性要求的对应法则,一般只要对值域范围加以限制,就能使它成为映射。

例 1.1.3 设 $X = \mathbf{R}^+$,$Y = \mathbf{R}^+$,则对应关系

$$f: X \to Y$$
$$x \mapsto y(y^2 = x)$$

是一个映射.

(2) 映射并不要求逆象也具有唯一性.

例 1.1.4 设 $X = Y = \mathbf{R}$,$f: X \to Y$,$x \mapsto y(y = x^2)$.

虽然 Y 中与 $x = 2$ 和 $x = -2$ 对应的元素都是 $y = 4$,但这并不影响 f 成为一个映射.

定义 1.2 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射,若在映射 f 下象的逆象也具有唯一性,即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的象 y_1 与 y_2 也满足 $y_1 \neq y_2$,则称 f 为单射,如果映射 f 满足 $R_f = Y$,则称 f 为满射;如果映射 f 既为单射,又是满射,则称 f 为双射(又称一一映射).

例 1.1.2 与例 1.1.3 中的映射是单射,例 1.1.1 与例 1.1.3 中的映射是满射,从而例 1.1.3 中的映射是双射.

设 $f: X \to Y$ 是单射,则由定义 1.2,对任意一个 $y \in R_f \subset Y$,它的逆象 $x \in X$(即满足 $f(x) = y$ 的 x)是唯一确定的,由定义 1.1,对应关系

$$g: R_f \to X$$
$$y \mapsto x(f(x) = y)$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射,称为 f 的逆映射,记为 f^{-1},其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$,值域为 $R_{f^{-1}} = X$.

显然,只要逆映射 f^{-1} 存在,它就一定是 R_f 到 X 上的双射.

现设有如下两个映射

$$g: X \to U_1$$
$$x \mapsto u(u = g(x))$$

和

$$f: U_2 \to Y$$
$$u \mapsto y(y = f(u))$$

如果$R_g \subset U_2 = D_f$，那就可以构造出一个新的对应关系

$$f \circ g: X \to Y$$
$$x \mapsto y(y = f(g(x)))$$

由定义1.1可知，这还是一个映射，我们将之称为f和g的复合映射.

容易看出，复合映射$f \circ g$的构成，实质上是引入了中间变量u，因此关键在于$R_g \subset D_f$是否成立. 如果这一条件得不到满足，就不能构成复合映射.

例1.1.5　设$X = Y = U_1 = U_2 = \mathbf{R}$，映射$g$与$f$为

$$g: X \to U_1$$
$$x \mapsto u(u = \mathrm{e}^x)$$

和

$$f: U_2 \to Y$$
$$u \mapsto y\left(y = \frac{2u}{1 + u^2}\right)$$

显然$R_g = (0, +\infty) \subset D_f$，因此可以构成复合映射

$$f \circ g: X \to Y$$
$$x \mapsto y\left(y = f(g(x)) = \frac{2\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\right)$$

例1.1.6　设映射g与f为

$$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto u\left(u = \frac{1 - x^2}{2}\right)$$

和

$$f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$
$$u \mapsto y(y = \ln u)$$

显然$R_g = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \not\subset D_f$，因此不能构成复合映射.

但若将映射g的定义域缩小，就有可能构成复合映射. 如令

$$g^*: X = (-1, 1) \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto u\left(u = \frac{1 - x^2}{2}\right)$$

和

$$f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$
$$u \mapsto y(y = \lg u)$$

则$R_{g^*} = \left(0, \frac{1}{2}\right] \subset D_f$，此时就构成复合映射

$$f \circ g^*: X = (-1, 1) \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto y\left(y = f(g(x)) = \lg\left(\frac{1 - x^2}{2}\right)\right)$$

一般地，若$R_g \subset D_f$不成立，但$R_g \cap D_f \neq \varnothing$，且在映射$g$下$R_g \cap D_f$的原像象$X_0 \subset$

X,则将 g 限制在 X_0 上得到 g^*,这时 $R_{g^*} \subset D_f$,于是可以确定一个由 X_0 到 Y 的复合映射 $f \circ g^*$. 在后面定义复合函数时,我们也采用与此一致的表述.

要注意,映射 f 和 g 的复合是有顺序的,$f \circ g$ 有意义并不意味着 $g \circ f$ 也有意义,即使都有意义,即 $R_g \subset D_f$ 与 $R_f \subset D_g$ 都满足,复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也不一定相同.

映射又称为算子,根据集合 X,Y 的不同,映射又有不同的名称. 例如,从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函,非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换,从实数集 X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. **函数的概念**

定义 1.3 设非空数集 $D \subset \mathbf{R}$,则称映射 $f:D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常记为

$$y = f(x) \quad x \in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f = D$. 数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值,函数值的集合 R_f 或 $f(X)$ 称为函数 f 的值域. 即

$$R_f = f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

f 是一个对应关系,对每一个 $x \in D_f$,都有唯一的实数 $y = f(x) \in \mathbf{R}$ 与之对应. 由映射的定义可知,定义域和对应关系是构成函数的两个要素.

函数的表示方法有三种:列表法、图示法、解析法(公式法). 将解析法和图示法相结合来研究函数,可以将抽象问题具体化. 同时,一些几何问题也可以通过解析法来做理论研究.

例 1.1.7 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = [0, +\infty)$,图形如图 1.1.1 所示.

例 1.1.8 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$,如图 1.1.2 所示.

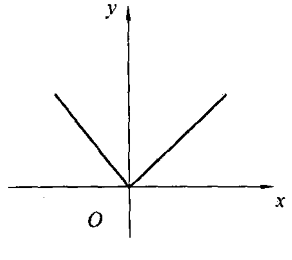


图 1.1.1

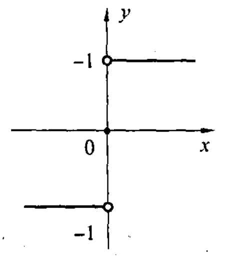


图 1.1.2

不难看出,例 1.1.7 、例 1.1.8 具有这样的特征:对于自变量的不同取值,函数不能用一个式子表示,而需要用两个或两个以上的式子表示,通常称之为分段函数. 分段函数是

用几个式子合起来表示的是一个函数. 在自然科学、工程技术和经济管理领域涉及的许多函数多属于分段函数的形式.

关于函数的基本特征,如单调性、有界性、奇偶性、周期性等在中学里已经介绍过,这里不再重复.

1.1.2　反函数与复合函数

定义 1.4　设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,称 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上,常以 x 表示自变量,y 表示函数,于是反函数又记为 $y=f^{-1}(x)$.

注意,① $y=f(x)$ 的定义域为 $y=f^{-1}(x)$ 的值域,$y=f(x)$ 的值域为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域;② $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,如图 1.1.3 所示;③ 单调函数 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 具有相同的单调性.

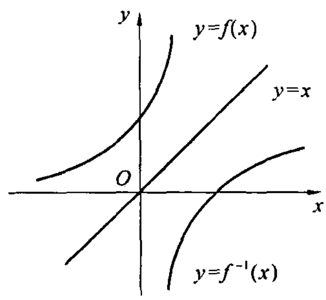


图 1.1.3

例 1.1.9　求 $y=2+\log_3(x+3)$ 的反函数.

解　由 $y=2+\log_3(x+3)$,得

$$\log_3(x+3)=y-2$$

解得 $x=3^{y-2}-3$,故所求反函数为

$$y=3^{x-2}-3$$

复合函数是复合映射的一种特例. 按照通常函数的记号,复合函数的概念表述如下:

定义 1.5　设有函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$,若 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$,则称定义在

$$\{x\mid x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

上的函数 $y=(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数,其中 u 为中间变量.

若 $R_g\cap D_f=\varnothing$,则 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 两者不能进行复合运算. 例如,$f(u)=\arccos u$,$u=g(x)=2+x^2$,由于 $R_g\cap D_f=[2,+\infty)\cap[-1,1]=\varnothing$,因此这两个函数不能进行复合运算.

利用复合函数的概念,可以把一个复杂函数分解成若干个简单的函数,也可以利用几个简单函数复合成一个较复杂的函数. 例如,$y=\cos\ln x$ 可以看做是由 $y=\cos u$,$u=\ln x$ 复合而成的;$y=\sqrt{u}$,$u=\sin x$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\sin x}$.

另外,还可以将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数. 例如,$y=\sqrt{u}$,$u=\ln v$,$v=2x+3$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\ln(2x+3)}$,$x\in[-1,+\infty)$.

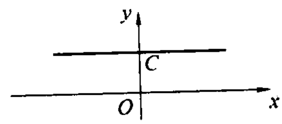
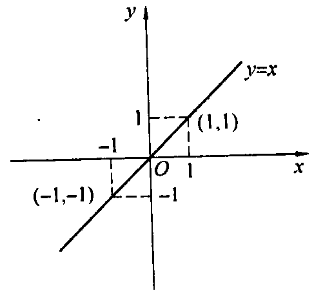
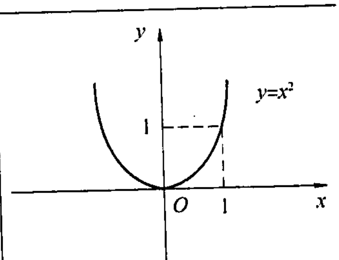
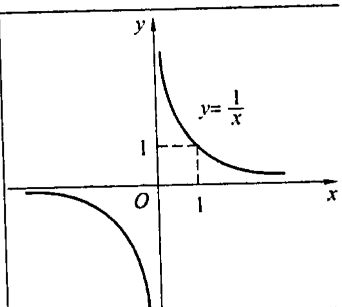
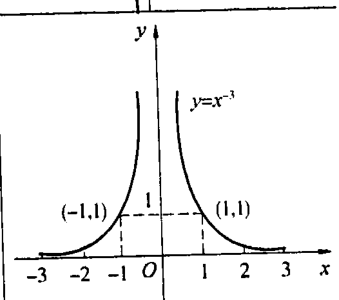
1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数

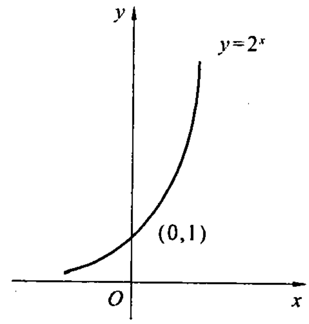
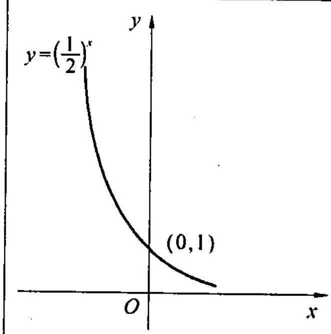
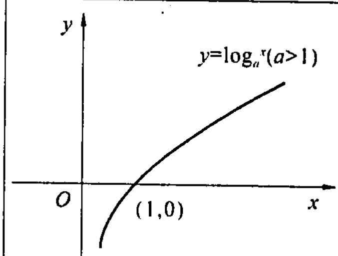
常用的函数都是由常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数构

成的，我们将这六类函数称为基本初等函数. 由于这些函数中学已详细介绍，这里通过表 1. 1 作简要复习.

表 1.1

类　别	函　数	定义域与值域	性　质	图　象
常量函数	$y=C$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$y=C$	偶函数	
幂函数	$y=x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	奇函数 单调增加	
	$y=x^2$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[0,+\infty)$	偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内，单调减少； 在 $(0,+\infty)$ 内，单调增加.	
	$y=\frac{1}{x}$	定义域： $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 值域： $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	奇函数 在 $(-\infty,0)$ 内，单调减少； 在 $(0,+\infty)$ 内，单调减少.	
	$y=\frac{1}{x^2}$	定义域： $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 值域：$(0,+\infty)$	偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内，单调增加； 在 $(0,+\infty)$ 内，单调减少.	

续表 1.1

类　别	函　数	定义域与值域	性　质	图　象
指数函数	$y = a^x$ $a > 1$	定义域:$(-\infty, +\infty)$ 值域:$(0, +\infty)$	单调增加	
	$y = a^x$ $0 < a < 1$	定义域:$(-\infty, +\infty)$ 值域:$(0, +\infty)$	单调减少	
对数函数	$y = \log_a x$ $a > 1$	定义域:$(0, +\infty)$ 值域:$(-\infty, +\infty)$	单调增加	
	$y = \log_a x$ $0 < a < 1$	定义域:$(0, +\infty)$ 值域:$(-\infty, +\infty)$	单调减少