桂壮红皮书·高中总复习系列

→根据最新命题趋势编写

huotiqiaojie qiaolian

活题巧解巧练

第一轮

高考数学

★黄冈、海淀、南京、荆州二十多所全国重点中学联合推出★

（第一次修订）

桂壮红皮书系列丛书

GUIZHUANGHONGPISHU

从书主编／陈桂壮

北京大学出版社

桂壮红皮书·高考总复习系列

活题巧解巧练

高考数学

黄冈、海淀、南京、荆州等

二十多所全国重点中学联合推出

丛书主编　陈桂壮

本册主编　王　臻

编　　委　钱小梅　周猛进　顾准山　吕小平

杨恒清　彭亚洲　庄志红　刘　翔

马　轩　高　莹　王　臻

北京大学出版社

内 容 提 要

本书根据人教社新教材和高考新教材《考试说明》进行编写，直接瞄准2004年高考总复习。

全书从培养学生解题思维能力入手，专门传授“活题”巧解方法技巧，亦即“3＋X”高考试卷中那些理论联系实际、关注时代、关注社会的综合能力题的解题方法和技巧。这种类型的活题是目前高考试卷中的热点试题，也是学生在高考考试中失分比例最高的题目，师生在平常的备考复习中对此极为关注。本书正是立足于解决这类问题的教学备考资料。自2002年出版以来，受到全国师生的高度赞誉，并被评为2003年5月北京“空中课堂”最畅销教辅图书之一。本次出版根据2004年全国新教材高考考纲进行了全面的修订，适合2004年高考总复习第一轮使用。

在内容体例方面，以考点为专题，以学科内、跨学科综合问题为重点，分知识类别和试题题型进行解题思路分析和解题方法指导；“能力测试点”、“解题关键点”、“方法提炼”、“易错分析”、“拓展延伸”等栏目集中体现了这一思想。测试题部分，从“知能转化升级”、“综合探究应用”、“高考新题预测”等方面编写大量的“创新题”、“综合题”、“易错题”、“中档题”、“提高题”和“高考预测题”等培养学生的解题能力。试题新编、材料鲜活、典型规范，反映最新考试信息和考试要求。

图书在版编目(CIP)数据

活题巧解巧练．高考数学/王臻编．—北京：北京大学出版社，2002.6
ISBN 7－301－05627－3

Ⅰ．活… Ⅱ．王… Ⅲ．数学课—高考—解题—升学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第033127号

书　　名：活题巧解巧练(高考数学)
著作责任者：王　臻
责 任 编 辑：郑全科
标 准 书 号：ISBN 7－301－05627－3/G·0719
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.puk.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 51849702
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京科文恒信图书经销有限公司
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
890毫米×1194毫米　16开本　14印张　560千字
2002年6月第1版
2003年6月第2版　2003年6月第1次印刷
定　　价：17.80元

导读图示

亲爱的读者，这是一本专门传授学科内、跨学科综合能力题——“活题”解答技巧的教学备考资料，是挑战“3+X”考试高分的金钥匙。自2002年出版以来，受到全国师生的高度赞誉，并被评为2003年5月北京“空中课堂”最畅销教辅图书之一。本次出版，根据2004年全国新教材高考考纲进行了全面的修订，适合2004年高考总复习之用。**为了最大程度发挥本书的作用，提高你的学习效率，建议你在使用本书时先阅读下面图示。**

能力测试点	彻底透视新教材《考试说明》，全面覆盖考点内容，锁定新教材高考命题的重点、热点	
解题关键点	划分专题，总结类型，归纳解题方法	送你一把打开考场制胜之门的金钥匙
活题巧解	切入考试内容，精选典型活题，剖析方法技巧，警示解题误区	易错分析，思维诊断 知识延伸，举一反三
活题巧练	新编创新活题，分级能力测试，突出综合考查，全面最新题型，直接瞄准2004年新教材高考	“基础题”，“易错题”， “综合题”，“创新题”
高考新题预测	命题专家出招，完全高考题型，最新典型材料，体现2004年新教材高考命题趋势	侧重综合能力，等值高考训练，如临3+X高考实战
答案与导解	准确、详细、疑难思维点拨	

目　录

目　录

巧解巧练1　集合的概念

考点过关

能力测试点	解题关键点
1.集合的概念,集合中元素的三大特性,空集的意义 2.子集、真子集、全集、补集的概念及性质 3.理解属于、包含、相等关系的意义 4.能够掌握有关术语和符号,正确地表示集合	1.集合中元素的三大特性及集合相等关系的运用,明确元素特性.对元素起到的限制作用,需判断结果的完整 2.对集合符号,术语的理解,理清题目头绪 3.与集合有关的分类讨论问题,如:是否为空集

活题巧解

【例1】已知 $A=\{1,1+d,1+2d\}$,$B=\{1,r,r^2\}$,其中 $d\neq0$,$r\neq1$.若 $A=B$,试求集合 A.

【解析】两集合相等即为其中元素对应相等,而集合中的元素具有无序性.所求本题应有两种形式,又集合中的元素具有互异性,所以对求出的 r,d 必须要验证.

【答案】(1) $\begin{cases}1+d=r, & ①\\ 1+2d=r^2. & ②\end{cases}$

①代入②　$1+2d=(1+d)^2$,所以 $d=0$ 与条件 $d\neq0$ 矛盾.

(2) $\begin{cases}1+d=r^2, & ①\\ 1+2d=r. & ②\end{cases}$

②代入① $1+d=(1+2d)^2$,所以 $d=0$(舍)或 $d=-\frac{3}{4}$,所以 $d=-\frac{3}{4}$,所以 $A=B=\left\{1,\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right\}$.

【易错分析】对于两集合相等的问题,无限集应根据定义判断,而有限集,特别当元素个数较少时应直接分析元素对应相同,注意集合元素的无序性、互异性和确定性.

【例2】数集 A 满足条件:若 $a\in A$,$a\neq1,0$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$,证明:

(1)若 $a\in A$,$a\neq1,0$,则集合 A 中有且只有3个元素;

(2)若 $a\in A$,则集合 A 不可能为单元素集.

【解析】反复利用条件"若 $a\in A$,$a\neq1,0$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$",注意集合 A 中的任一元素均满足这个条件,单元素集合指集合中只有一个元素.

【答案】证明:(1)因为 $a\in A$,$a\neq1$,所以　$\frac{1}{1-a}\in A$.

因为　$\frac{1}{1-a}\in A$,$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{a-1}{a}\in A$.

因为　$\frac{a-1}{a}\in A$,所以　$\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=\frac{a}{a-a+1}=a\in A$.

所以　若 $a\in A$,$a\neq1,0$ 集合 A 中有且仅有 $\frac{1}{1-a}$,a,$\frac{a-1}{a}$ 三元素.

(2)反证法:假设 A 是单元素集,则必有 $a=\frac{a}{1-a}$,即 $a^2-a+1=0$,$\Delta=1-4\times1\times1=-3<0$.

所以　方程没有实根,假设不成立,A 不可能为单元集.

【方法提炼】(1)关键在于对条件的深入理解,注意角色的转换.(2)用直接法证明较困难,对于否定命题常用反证法证明较好.

【例3】集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}\right\}$,

$B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0\}$,若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

【解析】含有字母系数的不等式求解,必须对所含字母进行分类讨论,要以两根的大小为标准对字母进行分类.若 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,$B=\{x\mid c\leqslant x\leqslant d\}$,$A\subseteq B$ 则 $a\geqslant c$ 且 $d\geqslant b$.

【答案】因为　$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$,

所以　$\frac{(a+1)^2}{2}-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x\leqslant\frac{(a+1)^2}{2}+\frac{(a-1)^2}{2}$.

即 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$,所以 $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

因为 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$

$\Rightarrow(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant0$,

所以当 $2\leqslant3a+1$,$a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant3a+1\}$.

当 $2>3a+1$,$a<\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant2\}$.

因为 $A\subseteq B$,①$a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$\begin{cases}2a\geqslant2,\\ 3a+1\geqslant a^2+1,\end{cases}$　所以 $1\leqslant a\leqslant3$.

②$a<\frac{1}{3}$ 时,$\begin{cases}3a+1\leqslant2a,\\ a^2+1\leqslant2.\end{cases}$　所以 $a=-1$.

所以　实数 a 的取值范围为 $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant3$ 或 $a=-1\}$.

【方法提炼】含字母系数的不等式其关键在于字母的讨论.

【知能转化升级】

1.（基础题 4 分）设全集 U 和集合 M,N,P，且 $M=\complement_U N$，$N\supseteq\complement_U P$，则 M 与 P 的关系是（　　）

A. $M=\complement_U P$　　B. $M=P$

C. $M\supsetneqq P$　　D. $M\subsetneqq P$

2.（基础题 4 分）设集合 $A=\{x\mid x=5-4a+a^2,a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=4b^2+4b+2,b\in\mathbf{R}\}$．则下列关系正确的是（　　）

A. $A=B$　　B. $A\supseteq B$

C. $A\subsetneqq B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

3.（易错题 4 分）由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},(\sqrt{x})^2,-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含有（　　）

A. 2 个元素　　B. 3 个元素

C. 4 个元素　　D. 5 个元素

4.（易错题 4 分）下列选项中的 M 与 P 表示同一集合的是（　　）

A. $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+0.01=0\}$，$P=\{x\mid x^2=0\}$

B. $M=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，
　$P=\{(x,y)\mid x=y^2+1,y\in\mathbf{R}\}$

C. $M=\{y\mid y=t^2+2,t\in\mathbf{R}\}$，
　$P=\{t\mid t=(y-1)^2+2,y\in\mathbf{R}\}$

D. $M=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，
　$P=\{x\mid x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$

5.（易错题 4 分）已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid |x|<a\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $0\leqslant a\leqslant 1$　　B. $a\leqslant 1$

C. $-1\leqslant a\leqslant 3$　　D. $a<1$

6.（基础题 4 分）已知集合 $A=\left\{a\,\middle|\,\dfrac{x+a}{x^2-2}=1\text{ 有惟一实数解}\right\}$，则 $A=$________．

7.（易错题 4 分）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2+x+2=0\}$，若 A 中至多只有一个元素，则 a 的取值范围________．

8.（基础题 4 分）如果 $\{x\mid ax+1=0\}\subseteq\{x\mid x^2+x-2=0\}$，则 $a=$________．

9.（基础题 8 分）已知集合 $A=\{x\mid -2m+6<x<m^2-2\}$，$B=\{x\mid -m<x<m\}$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 m 的取值范围．

10.（易错题 10 分）设 a,b 是整数，集合 $A=\{(x,y)\mid(x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in A$，但点 $(1,0)\notin A$，$(3,2)\notin A$，求 a,b 的值．

2004年高考新题预测

11.（创新题 10 分）设 $S=\{x\mid x=m+n\sqrt{2},m,n\in\mathbf{Z}\}$，

(1) 若 $a\in\mathbf{Z}$，则 a 是否是集合 S 的元素；

(2) 对 S 中的任意两个元素 x_1,x_2，x_1+x_2，x_1x_2 是否属于 S？

(3) 对于给定的整数 n，试求满足 $0<m+n\sqrt{2}<1$ 的 S 中的元素个数．

巧解巧练2 集合的运算

考点过关

能力测试点	解题关键点
1.理解交集、并集、补集的概念及运算法则,并能进行运算 2.能够运用集合语言与集合思想解决问题	1.关于集合的运算,一般应把各参与运算的集合化到最简形式,再进行运算 2.含参数的集合问题,多根据集合元素的互异性来处理,有时需要进行讨论 3.集合问题多与函数、方程、不等式有关,要注意各类知识融会贯通

活题巧解

【例1】已知 a 为实数,集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,求 a 使得 $A\cap C=\varnothing$ 且 $A\cap B\neq\varnothing$.

【解析】交集的概念,对元素特别少的集合,应对具体元素具体分析,仍需注意集合中元素的特性进行验证.

【答案】$B=\{x|(x-2)(x-3)=0\}=\{2,3\}$.

$C=\{x|(x+4)(x-2)=0\}=\{2,-4\}$.

因为 $A\cap C=\varnothing$,所以 $2\notin A$, $-4\notin A$.

因为 $A\cap B\neq\varnothing$,所以 $2\in A$ 或 $3\in A$,

又因为 $2\notin A$,所以 $3\in A$.

$x=3$ 代入 A, $3^2-3a+a^2-19=0$,

所以 $a=5$ 或 -2.

若 $a=5$, $A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$ 与 $2\notin A$ 矛盾,

所以 $a=5$(舍去).

若 $a=-2$, $A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{-5,3\}$满足题设,

所以 $a=-2$.

【方法提炼】B,C 两个集合显易化简用列举法表示,化简后对具体元素进行分析,求出 $a=5$,-2 后仍需代入观察另一元素是否满足条件.

【例2】设 $A=\{(x,y)|\dfrac{y-4}{x-2}=-\dfrac{1}{2}\}$,

$B=\{(x,y)|x\cdot\cos^2\theta+y=6,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,求 θ 的值的集合.

【解析】集合的运算先明确是什么样的集合,可将解析几何、三角函数的内容引入,明确集合与集合之间的关系.

【答案】A,B 均为点集,不能化简,只能在坐标系中表示它们的图形,集合 A 的图形是除去点(2,4)的直线 $y-4=-\dfrac{1}{2}(x-2)$,$(x\neq2)$,集合 B 的图形是斜率为 $k=-\cos^2\theta$ 且过定点(0,6)的直线 m.

因为 $A\cap B=\varnothing$,所以 $-\cos^2\theta=-\dfrac{1}{2}$或 m 过点(2,4).

所以 $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$\pm1$,

因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 θ 的值是集合为:$\{0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\pi\}$.

【方法提炼】学习集合的最基本的能力是准确理解集合所描述的内容,掌握相关术语、性质,熟练运用各种符号.

【例3】 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$, $C=\{x|x^2+2x-8=0\}$.若 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$,且 $A\cap B\neq\varnothing$,求 a 有值与集合 A.

【解析】将 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 转化为 $A\cap B\neq\varnothing$.

【答案】因为 $B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}=\{2,3\}$,

$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$,

$A\cap C=\varnothing$, 所以 $-4\notin A$, $2\notin A$,

又 $A\cap B\neq\varnothing$,而 B 中有元素2,3,所以 $3\in A$.

所以 $9-3a+a^2-19=0$,所以 $a=5$ 或 -2.

当 $a=-2$,此时 $A=\{-5,-3\}$满足条件.

【方法提炼】(1)空集与非空集合之间的关系是解本题的关键.

(2)集合的运算求出 a 值后必须代回检验是否满足题目的条件,不满足则必须舍去.

【知能转化升级】

1.(基础题 4 分)已知集合 $A=\{x\mid x^2-\sqrt{m}x+1=0\}$.若 $A\cap\mathbf{R}=\varnothing$,则 m 的取值范围是(　　)

A. $m<4$　　B. $m>4$　　C. $0<m<4$　　D. $0\leqslant m<4$

2.(基础题 4 分)设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$,$N=\{x\mid x-k\leqslant 0\}$,若 $M\cap N\neq\varnothing$,则 k 的取值范围是:(　　)

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $[-1,2]$

3.(易错题 4 分)设 $U=\mathbf{Z}$,$M=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap(\complement_U P)=$(　　)

A. $\{x\mid x=3k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{x\mid x=6k\pm2,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{x\mid x=4k$ 或 $4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$

4.(基础题 4 分)设 S,T 是两个非空集合,且 $S\not\subseteq T$,$T\not\subseteq S$,记 $X=S\cap T$,那么 $S\cup X$ 是(　　)

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. X

5.(易错题 4 分)集合 $A=\{1,3,x\}$,$B=\{x^2,1\}$,且 $A\cup B=\{1,3,x\}$,则满足条件的实数 x 的个数(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6.(易错题 4 分)已知集合 $M=\{x\mid y^2=x+1\}$,$P=\{x\mid y^2=-2(x-3)\}$.那么 $M\cap P=$(　　)

A. $\{(x,y)\mid x=\frac{5}{3},y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\}$

B. $\{x\mid -1<x<3\}$

C. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

D. $\{x\mid x\leqslant 3\}$

7.(易错题 4 分)已知集合 $M=\{m\mid \frac{m-4}{2}\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{n\mid \frac{n+3}{2}\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap N=$ ______.

8.(易错题 4 分)集合 $\{x\mid x^2+4x+m+1=0\}$ 的所有元素之和为: ______.

9.(基础题 8 分)已知全集 $I=\{a\mid a<10$ 且 a 为正整数$\}$,$A\cap B=\{2\}$,$\complement_I A\cap\complement_I B=\{1,9\}$,$\complement_I A\cap B=\{4,6,8\}$,求集合 A,B.

10.(易错题 10 分)已知集合 $P=\{1,x,y\}$,$Q=\{x,x^2,xy\}$,若 $P=Q$,求实数 x,y 的值.

2004年高考新题预测

11.(创新题 10 分)设 $M=\{x\mid x=a^2-b^2,a,b\in\mathbf{Z}\}$,求证:(1)奇数 $2k+1$ 属于 M;

(2)偶数 $4k-2(k\in\mathbf{Z})$ 不属于 M;

(3)属于 M 的两个整数,其积仍属于 M.

巧解巧练3 简 易 逻 辑

能力测试点	解题关键点
1.理解掌握四种命题的关系,能利用四种命题的关系解决有关问题,会用反证法证明有关问题 2.会用充要条件判断命题	1.逻辑中的"或、且、非"要结合真值表,结合集合的并集、交集、补集来理解 2.灵活运用"互为逆否命题的两命题的真假相同"来解决问题 3.反证法在数学领域的广泛运用,反证法思想的渗入 4.充要条件与集合包含关系的联系,将集合知识与逻辑知识联系起来

活 题 巧 解

【例1】设 α,β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个根,试分析 $a>2$ 且 $b>1$ 是两根 α,β 均大于1的什么条件?

【解析】证明是什么条件必须从充分性、必要性两方面入手,要求对条件分析全面.

【答案】证明:令 p:"$a>2$ 且 $b>1$",q:"$\alpha>1$ 且 $\beta>1$",

易知:$\alpha+\beta=a,\alpha\beta=b$.

(1)充分性:若 $a>2$ 且 $b>1$,

即:$\begin{cases}\alpha+\beta>2,\\ \alpha\beta>1.\end{cases}$ 不能推出 $\begin{cases}\alpha>1,\\ \beta>1.\end{cases}$

可举反例:若 $\begin{cases}\alpha+\beta=6\frac{1}{2},\\ \alpha\beta=3.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=6,\\ \beta=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 所以 p 推不出 q.

(2)必要性:若 $\alpha>1$ 且 $\beta>1$.

所以 $\alpha+\beta>1+1=2,\alpha\beta>1$.

所以 $q\Rightarrow p$,所以 p 是 q 的必要不充分条件.

【方法提炼】从正面很难推导的情况下,可用反面的策略,只需举一反例便可证明其无法成立.

【例2】已知下列三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$,至少有一个实数根,求实数 a 的取值范围.

【解析】由于"至少有一个方程有实根"情况十分复杂,所以可以用"正难则反"的解题策略求解.

【答案】假设三个方程均无实数根,则有:(三方程的 Δ 均小于0)

$$\begin{cases}(4a)^2-4\times(-4a+3)<0, & ①\\ (a-1)^2-4a^2<0, & ②\\ 4a^2-4\times(-2a)<0. & ③\end{cases}$$

由①得:$4a^2+4a-3<0$,所以 $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$.

由②得:$-3a^2-2a+1<0$,所以 $a>\frac{1}{3}$ 或 $a<-1$.

由③得:$a^2+2a<0$,所以 $-2<a<0$.

所以 $M=\{a\mid -\frac{3}{2}<a<-1\}$.

所以 三方程至少有一方程有实数根的实数 a 的取值范围应为 $\complement_R M$.

所以 $\complement_R M=\{a\mid a\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant-1\}$.

【方法提炼】先求结论的反面 M 再求其补集 $\complement_R M$.这种思想方法很重要,用起来简洁明了,而用直接法求解此题则较困难.

【例3】已知 p:"$|1-\frac{x-1}{3}|\leqslant2$",$q$:"$x^2-2x+1-m^2\leqslant0$"($m>0$),若非 p 是非 q 的必要不充分条件,求实数 m 的取值范围.

【解析】1.遇到不等式应将其首先化简,求其解集的最简形式.

2.由非 p 与非 q 之间的关系可推得 p 与 q 之间的关系,原命题与逆否命题同真假.

【答案】p:"$-2\leqslant1-\frac{x-1}{3}\leqslant2$",所以 $-3\leqslant x-1\leqslant9$.

所以 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant10\}$.

q:"$(x-1)^2\leqslant m^2$",所以 $1-m\leqslant x\leqslant1+m$.

所以 $B=\{x\mid 1-m\leqslant x\leqslant1+m\}$.

因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,所以 $\neg q\Rightarrow\neg p$,

因为原命题与逆否命题同真假,

所以 $p\Rightarrow q$,p 是 q 的充分不必要条件.

所以 $A\subsetneqq B$,所以 $1-m\leqslant-2$ 且 $1+m\geqslant10$ 且 $m>0$,

所以 $m\geqslant9$.

【拓展延伸】若一个命题的条件和结论所描述的对象形成一个集合,则可用集合间的包含关系来判定充分条件、必要条件:

①若 $P\subseteq Q$,则 p 是 q 的充分条件;

②若 $P\supseteq Q$,则 p 是 q 的必要条件;

③若 $P\subset Q$,则 p 是 q 的充分不必要条件;

④若 $P\supset Q$,则 p 是 q 的必要不充分条件;

⑤若 $P=Q$,则 p 是 q 的充要条件.

【知能转化升级】

1.(基础题 4 分)已知命题 q 是 p 的逆命题,而 r 是 p 的逆否命题,则 q 是 r 的(　　)

A. 逆命题　　B. 否命题

C. 逆否命题　　D. 以上均不对

2.(基础题 4 分)设 A,B,C 是三个集合,为使 $A\subsetneqq(B\cap C)$,条件 $A\subsetneqq B$ 是(　　)

A. 必要条件

B. 充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3.(易错题 4 分)三个数 a,b,c 不全为 0 的充要条件是(　　)

A. a,b,c 都不是 0

B. a,b,c 至多有一个是 0

C. a,b,c 中只有一个是 0

D. a,b,c 中至少有一个不是 0

4.(易错题 4 分)设 $a\neq 0$,"$x\in\{a,-a\}$"是"$|x|=a$"的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5.(基础题 4 分)"$x\notin A$ 且 $x\notin B$"是"$x\notin A\cap B$"的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6.(易错题 4 分)已知命题"非空集合 M 中的元素都是集合 P 中的元素"是假命题,那么下列命题中真命题的个数为(　　)

①M 中的元素都不是 P 的元素　②M 中有不属于 P 的元素

③M 中有属于 P 的元素　④M 中的元素不都是 P 的元素

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

7.(易错题 4 分)已知真命题"$a\geqslant b\Rightarrow c>d$"和"$a<b\Rightarrow e\leqslant f$"则"$c\leqslant d$"是"$e\leqslant f$"的 充分 条件.

8.(基础题 4 分)$(a-1)(b+2)=0$ 的 充分不必要 条件是 $a=1$.

9.(基础题 8 分)已知 p 是 q 的充要条件,r 是 s 的充分条件,q 是 s 的必要条件,r 是 q 的必要条件,那么　$q\Rightarrow r$　$r\Rightarrow s$

(1)r 是 p 的什么条件?

(2)p 是 s 的什么条件?

10.(综合题 10 分)已知条件 $p:A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+ax+1\leqslant 0\}$,条件 $q:B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$.若 p 是 q 的充分但不必要条件,求实数 a 的取值范围.

2004年高考新题预测

11.(创新题 10 分)已知关于 x 的一元二次方程:①$mx^2-4x+4=0$,②$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0(m\in\mathbf{Z})$.求方程①,②的根都是整数的充要条件.

巧解巧练4 映射 函数 反函数

考点过关

能力测试点	解题关键点
1.映射的定义,象与原象的概念 2.函数概念,函数的三种表示方法,会求函数的解析式 3.理解反函数的意义,会求一些基本的反函数,掌握互为反函数的图象间的关系	1.理解映射的概念 $f:A\to B$①A,B 为非空集合,②A 中无剩余元素,且单值对应 2.求函数解析式一般用换元法、待定系数法等 3.反函数的定义域、值域分别为原函数的值域与定义域,分段函数的反函数应分别对应求出各段的反函数,再合成

活题巧解

【例1】判断下面的对应是否是从集合 A 到集合 B 的映射?是否是一一映射? $A=[1,2]$,$B=[a,b]$$(a<b)$,$x\in A$,

$f:x\to y=(b-a)x+2a-b$.

【解析】运用映射及一一映射的定义来判断,映射 A 中的任一元素在 B 中都有对应元素,象均在 B 中.

【答案】任取 $x\in A$.在 f 下:$x\to y=(b-a)x+2a-b$.

因为 $y=(b-a)x-2(b-a)+b=(b-a)(x-2)+b\leqslant b$,

$y=(b-a)x-(b-a)+a=(b-a)(x-1)+a\geqslant a$,

所以 对任一 $x\in[1,2]$,$y=(b-a)x+2a-b\in[a,b]$.

所以 f 是映射.

任取 $y\in[a,b]$时,$x=\dfrac{y+b-2a}{b-a}=1+\dfrac{y-a}{b-a}\in A$,

且 $x_1\neq x_2$,$x_1,x_2\in A$ 时总有 $y_1\neq y_2$.

所以 f 是 A 到 B 上的一一映射.

【方法提炼】映射及一一映射的概念在于理解和灵活运用,对应 f 的式子加以变形,确定其范围.

【例2】求满足下列条件的函数 $f(x)$的解析式:

(1)$f(2x+1)=x^2-3x+1$.

(2)$3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$,且 $f(x)$为一次函数.

(3)$3f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lg x$.

【解析】(1)利用换元法;(2)因为 $f(x)$为一次函数可用待定系数法;(3)根据已知方程将 x 换为$\dfrac{1}{x}$得到新方程,解方程组.

【答案】(1)令 $2x+1=t$,则 $x=\dfrac{t-1}{2}$,代入,得

$f(t)=\left(\dfrac{t-1}{2}\right)^2-\dfrac{3(t-1)}{2}+1=\dfrac{1}{4}t^2-2t+\dfrac{11}{4}$,

所以 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-2x+\dfrac{11}{4}$.

(2)令 $f(x)=ax+b$,代入,得

$3[a(x+1)+b]-2[a(x-1)+b]=2x+17$,

解得 $a=2$,$b=7$,所以 $f(x)=2x+7$.

(3)$\begin{cases}3f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lg x, & ①\\ 3f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\lg\dfrac{1}{x}. & ②\end{cases}$

①×3-②×2,得 $5f(x)=3\lg x-2\lg\dfrac{1}{x}=5\lg x$,

所以 $f(x)=\lg x(x>0)$.

【方法提炼】求函数解析式的主要方法:(1)换元法,适用于已知 $f[g(x)]$的表达式,可令 $g(x)=t$.(2)待定系数法,需已知解析式的结构,方可设待定系数.(3)若给出 $f(x)$与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$或 $f(x)$与 $f(-x)$可用$\dfrac{1}{x}$或$(-x)$换 x 得到新关系式联列方程组.

【例3】$y=f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$,$y=g(x)$的图象与 $y=f^{-1}(x+1)$的图象关于直线 $y=x$ 对称,求 $g(3)$的值.

【解析】$y=g(x)$与 $y=f^{-1}(x+1)$图象关于直线 $y=x$ 对称,即互为反函数,求 $g(3)$必先求出 $f^{-1}(x+1)$,而先求 $f^{-1}(x)$.

【答案】因为 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\neq1,y\neq2)$,$xy-y=2x+3$,

得 $x=\dfrac{y+3}{y-2}$,所以 $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}(x\neq2)$.

所以 $f^{-1}(x+1)=\dfrac{x+4}{x-1}$,所以$\dfrac{x+4}{x-1}=3$,

解得 $x=\dfrac{7}{2}$,所以 $g(3)=\dfrac{7}{2}$.

【方法提炼】原函数的 x 即反函数的 y,所以求 $g(3)$的值,即求 $f^{-1}(x+1)$中 x 为多少时,$f^{-1}(x+1)=3$.可不必再去求其反函数 $g(x)$.反函数的定义域与值域分别为原函数的值域与定义域,因此反函数的定义域不能直接由其解析式确定,而应为原函数的值域.

【知能转化升级】

1.（基础题 4 分）下列四组函数中表示同一个函数的是（　　）

A. $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}, g(x)=\sqrt{x^2-1}$

C. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=a^{\log_a|x|}$

D. $f(x)=\sqrt[3]{x^3}, g(x)=x$

2.（易错题 4 分）已知 (x,y) 在映射 f 下的象是 $(x+y, x-y)$，则象 $(1,2)$ 在 f 下的原象为（　　）

A. $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

3.（易错题 4 分）$f(x)=1-2x, g[f(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$，则 $g\left(\frac{1}{2}\right)=$（　　）

A. 1　　B. 3　　C. 15　　D. 30

4.（基础题 4 分）已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x+1)=$（　　）

A. $(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}$

B. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$

C. $(x+1)^2+2$

D. $(x+1)^2+1$

5.（易错题 4 分）已知函数 $f(x)$ 的图象过 $(0,1)$，则 $f(4-x)$ 的反函数图象过点（　　）

A. $(1,4)$　　B. $(4,1)$

C. $(3,0)$　　D. $(0,3)$

6.（易错题 4 分）已知函数 $f(x+1)$ 的图象过点 $(3,2)$，则与 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,-2)$ 对称的图象过定点（　　）

A. $(-6,-2)$　　B. $(-2,-6)$

C. $(-2,-4)$　　D. $(-4,-2)$

7.（易错题 4 分）若函数 $f(x)=ax^2-(a+2)x-1$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上存在反函数，则其反函数为 $f^{-1}(x)=$______.

8.（基础题 4 分）已知 $f(x+1)=\begin{cases}\sin x & (x\geqslant 0),\\ \lg(-x) & (x<0),\end{cases}$

则 $f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot f(-9)=$__1__.

9.（易错题 8 分）已知 $f(x)=\begin{cases}3x+1 & (x\geqslant 0),\\ x^2 & (x<0);\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & (x\leqslant 0),\\ 2 & (x>0).\end{cases}$

求：$y=f[g(x)]$.

10.（基础题 10 分）求函数的反函数：

$y=\begin{cases}x^2+2x & (x\geqslant 0),\\ -x^2+2x & (x<0).\end{cases}$

2004年高考新题预测

11.（创新题 10 分）定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，若 $x\in(0,3)$ 时 $f(x)=2^x$，求 $x\in(-6,-3)$ 时的解析式.

巧解巧练5　函数的定义域和值域

考点过关

能力测试点	解题关键点
1. 求函数的定义域 2. 求所给函数的值域，特别是用分类讨论的思想求含参数的函数的值域 3. 求函数在所给区间上的函数值的取值范围和极值 4. 由函数的定义域与值域之间的关系求参数的取值范围	1. 求函数的定义域一般有三种类型： a. 自然型：使得解析式有意义的自变量的取值范围，常转化为解不等式组的形式 b. 复合型：即由 $f(x)$ 的定义域去求 $f[g(x)]$ 的定义域，常用换元法 c. 实际型：即应用题中应符合实际情况 2. 求值域的常用方法：配方法、逆求法、换元法、基本不等式法、单调性法、图象法等

活题巧解

【例1】求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x-5}}{|x|-6}$；(2) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

【解析】将使函数有意义的条件组成不等式组，然后解不等式组即得.

【答案】(1)要使函数有意义，必须满足：

$\begin{cases}x-5\geqslant 0,\\ |x|-6\neq 0,\end{cases}$ 即：$\begin{cases}x\geqslant 5,\\ x\neq\pm 6,\end{cases}$

所以　原函数的定义域为 $[5,6)\cup(6,+\infty)$.

(2)由题意得：$\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0\end{cases}$ 即

$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

借助数轴，求两个不等式的交集，得函数的定义域为：

$\left[-5,-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},5\right]$.

【方法提炼】求具体函数的定义域往往归结为解不等式组的问题，注意一定要细心、全面，写出全部的约束条件，求交集时可借助数轴.

【例2】(1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $f(2x+1)$ 的定义域.(2)已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

【解析】(1)把 $2x+1$ 看成一个整体，用整体法解题即可；(2)等价转化为 $mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 恒成立.

【答案】(1)由题设得 $0\leqslant 2x+1\leqslant 1$，　即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$，所以 $f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

(2)因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 恒成立，当 $m=0$ 时，显然成立；当 $m\neq 0$ 时，必须 $\begin{cases}m>0\\ \Delta\leqslant 0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}m>0,\\ 36m^2-4m(m+8)\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow 0<m\leqslant 1,$

综上所述：$0\leqslant m\leqslant 1$.

【拓展延伸】(1)之变题：已知 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(2x)$ 的定义域．此时要注意 $[0,1]$ 是 $f(2x+1)$ 中 x 的取值范围，应先由 $x\in[0,1]$ 解得 $2x+1\in[1,3]$，由整体法得对于函数 $f(2x)$，有 $2x\in[1,3]$，解得 $x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$，　所以 $f(2x)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

【易错分析】(2)题中要注意 $mx^2-6mx+m+8$，当 $m=0$ 时，不是二次式，故不能用“Δ”，所以一定要对“$m=0$”与“$m\neq 0$”分类讨论.

【例3】求下列函数的值域：

(1) $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$；(2) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$　$x\in[1,4]$.

【解析】(1)先观察再求解；(2)用单调性求解.

【答案】(1)解法一(化为真分式)：$\dfrac{2+1+2^x}{1+2^x}$

$f(y)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=\dfrac{2}{1+2^x}-1$，因为 $1+2^x>1$，所以 $0<\dfrac{2}{1+2^x}<2$，所以　$-1<\dfrac{2}{1+2^x}-1<1$，故所求值域为 $(-1,1)$.

解法二(利用反表示法)：　$y+y\cdot 2^x=1-2^x$　$(y+1)\cdot 2^x=1-y$

令 $y=f(x)$，易得 $2^x=\dfrac{1-y}{1+y}>0$，所以 $y\in(-1,1)$.

解法三(利用三角换元，这种方法要求要有一定的联想思维能力)：令 $\sqrt{2^x}=\tan\dfrac{\theta}{2}(0<\theta<\pi)$，所以 $y=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\cos\theta$，

因为 $0<\theta<\pi$，所以 $-1<y<1$.

(2)本题不难利用单调性的定义得出该函数在 $[1,2]$ 上单调递减，在 $[2,4]$ 上单调递增，故 $f(2)=2+\dfrac{4}{2}=4$ 为最小值，$f(1)=1+4=5$，$f(4)=4+1=5$，所以 $f(1)=f(4)=5$ 为最大值.

所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的值域为 $[4,5]$.

【方法提炼】(1)求函数的值域方法较多，解题时要善于根据所给函数的特点选择适当的方法求解，比如：分式函数一般可用化为真分式法、判别式法、不等式法、单调性法等；二次函数一般可用配方法、图象法等；无理函数一般用换元法等.

(2)题切忌直接将 $x=1$ 与 $x=4$ 代入求值域.

【知能转化升级】

1.(基础题4分)函数 $y=\frac{x}{\sqrt{(x+2)(x-2)}}$ 的定义域是(　　)

A. $(-2,2)$

B. $(2,+\infty)$

C. $(-2,0)\cup(0,2)$

D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

2.(基础题4分)若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$,则函数 $f(x^2)$ 的定义域为(　　)

A. $[0,\sqrt{2}]$　　B. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

C. $[0,4]$　　D. $[-4,4]$

3.(基础题4分)函数 $y=\lg(3-2x-x^2)$ 的值域是(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $[0,4]$

C. $(-\infty,\lg 4]$　　D. $[\lg 4,+\infty)$

4.(基础题4分)下列各函数中,值域不为 $[1,+\infty)$ 的是(　　)

A. $y=\sqrt{x^2+2x+2}$　　B. $y=2|x|+1$

C. $y=\sqrt{x^2-x+1}$　　D. $y=\sqrt{x^2+|x|+1}$

5.(中档题4分)函数 $y=2-\sqrt{4x-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域为(　　)

A. $[-2,2]$　　B. $[1,2]$

C. $[0,2]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

6.(提高题4分) $y=\log_a x$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上恒有 $|y|>1$,则 a 的范围是(　　)

A. $\frac{1}{2}<a<2$ 且 $a\neq 1$　　B. $0<a<\frac{1}{2}$ 或 $1<a<2$

C. $a>2$ 或 $0<a<\frac{1}{2}$　　D. $1<a<2$

7.(中档题3分)若函数 $y=x^2-4ax+a^2-2a+2$ 在 $[0,2]$ 上的最小值为2,则 $a=$ 0 ______.

8.(中档题3分)函数 $y=\frac{x+2}{2ax-1}$ 的值域为 $\{y|y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq 2\}$,则它的定义域为 ______.

9.(基础题10分)函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$ 的定义域和值域都是 $[1,b]$ $(b>1)$,求 b 的值.

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

$f(1)=1$　$f(b)=b$

$\frac{1}{2}b^2-b+\frac{3}{2}=b$

10.(中档题10分)用长为 l 的铁丝弯成上部为半圆,下部为矩形的框架,若矩形的底边边长为 $2x$,框架围成的面积为 y,求 y 关于 x 的函数解析式,并求定义域.

2004年高考新题预测

11.(提高题10分)已知函数 $f(x)=a^x-2\sqrt{4-a^x}-1$ $(a>0,a\neq 1)$,

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域、值域;

(2)求实数 a 的取值范围,使得函数 $f(x)$ 满足:当定义域为 $(2,+\infty)$ 时,$f(x)\geqslant 0$ 恒成立.

巧解巧练6　函数的奇偶性

考点过关

能力测试点	解题关键点
1.判断一些简单函数的奇偶性 2.奇函数与偶函数的图象特征 3.利用函数的奇偶性解决有关问题	1.判断函数的奇偶性首先要看定义域是否关于原点对称 2.研究函数奇偶性的方法主要有定义法与图象法

活题巧解

【例1】判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$;

(2)$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$;

(3)$f(x)=x\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

【解析】先求定义域再利用奇偶性定义进行判断.

【答案】(1)由 $x+\sqrt{x^2-1}>0$ 解得 $x\geqslant1$,

即函数的定义域为$[1,+\infty)$,

故 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(2)由 $1-x^2\geqslant0$ 得 $-1\leqslant x\leqslant1$,而当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,

$|x+2|=x+2$,所以 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+2-2}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,此时 $x\neq0$,

所以 $f(-x)=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数.

(3)$f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid-1<x<1\}$,而 $f(-x)=-x\lg\dfrac{1+x}{1-x}=x\lg\dfrac{1-x}{1+x}$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

【方法提炼】(1)判断函数的奇偶性时,首先应判定函数的定义域是否关于原点对称.

(2)奇偶函数的定义式是判断奇偶函数的依据,有时需将原式进行变形,化为等价形式:

$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0$,

$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0$.

(3)利用函数图象也可判断函数的奇偶性.

【例2】已知 $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$,(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性;(2)证明 $f(x)>0$ 恒成立.

【解析】(1)用奇偶性定义进行判断;(2)先证明 $x>0$ 时 $f(x)>0$,再用偶函数性质证明.

【答案】(1)令 $2^x-1\neq0$,得定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

$f(-x)=-x\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)=-x\left(\dfrac{2^x}{1-2^x}+\dfrac{1}{2}\right)=-x\cdot\dfrac{2\cdot2^x+1-2^x}{2(1-2^x)}=x\cdot\dfrac{2^x-1+2}{2(2^x-1)}=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2)当 $x>0$ 时,显然有 $f(x)>0$;

当 $x<0$ 时,$-x>0$,所以 $f(x)=f(-x)>0$;

所以　当 $x\neq0$ 时,$f(x)>0$ 恒成立.

【拓展延伸】变题1:已知 $g(x)$ 为奇函数,且 $f(x)=g(x)\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$,判断 $f(x)$ 的奇偶性.

本题只要考察 $h(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}$ 的奇偶性即可.因为奇偶性函数有如下性质:在公共定义域内,奇函数×奇函数=偶函数,奇函数×偶函数=奇函数,偶函数×偶函数=偶函数.

变题2:已知函数 $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+a\right)$ 是偶函数,试求 a 的值.

由 $f(x)=f(-x)$ 恒成立得 $2ax-x$ 恒为0,所以 $a=\dfrac{1}{2}$.亦可用赋值法求解.

【例3】已知 $f(x)$ 是定义在$(-1,1)$上的偶函数且在$[0,1)$上为增函数,若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$,试确定 a 的取值范围.

【解析】用函数的单调性求解.

【答案】因为 $f(x)$ 是$(-1,1)$上的偶函数,且在$[0,1)$上为增函数,由 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$ 得 $f(a-2)<f(4-a^2)$,即 $f(|a-2|)<f(|4-a^2|)$,

所以$\begin{cases}|a-2|<1,\\|4-a^2|<1,\\|a-2|<|4-a^2|,\end{cases}$

解得:$\sqrt3<a<2$ 或 $2<a<\sqrt5$.

【易错分析】(1)本题定义域为$(-1,1)$,而已知的增区间为$[0,1)$,故巧妙地运用偶函数的性质将 $f(x)$ 转化为 $f(|x|)$,从而使区间统一化,当然,本题也可就 $x\in(-1,0)$ 与 $x\in[0,1)$ 分类讨论解之.

(2)在寻求关于 a 的不等式时,千万要紧扣函数的定义域,这是解题中容易忽视的地方.