中学数学解题思路与技巧

ZHONGXUE SHUXUE

JIETI SILU YU JIQIAO

福建科学技术出版社

中学数学解题思路与技巧

何履端　滕用铨　赖祖正　陈美利

福建科学技术出版社

一九八七·福州

责任编辑：宁筱彤

中学数学解题思路与技巧

何履端　滕用铨　赖祖正　陈美利

*

福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
三明市印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 12印张 264千字
1987年8月第1版
1987年8月第1次印刷
印数：1—110,500
书号：7211·70　　定价：1.80元

出版说明

优异的成绩，不仅来自勤奋，而且来自于科学的学习方法。为了帮助广大读者摆脱茫茫题海，开拓思路，掌握解题技巧，提高学习效率，考取优异的成绩，我们邀请了一批具有丰富教学经验的教师编写了这套丛书。这套丛书共7本，即《中学语文解题思路与技巧》、《中学数学解题思路与技巧》、《中学政治解题思路与技巧》、《中学物理解题思路与技巧》、《中学化学解题思路与技巧》、《中学地理解题思路与技巧》、《中学历史解题思路与技巧》。各书内容均包括：题型特点、不同题型的解题思路与技巧、解题的经验分析等。这套丛书适合广大中学生、参加成人高考的青年学习使用；同时，亦可作为中学教师、师范大专院校教师的教学参考书。

一九八六年十月

目　录

概　述

学习数学，关键之一是学会解题。怎样提高解题效率？是每个读者都会感兴趣的课题。我们认为：探索解题思路，掌握解题技巧，对提高解题效率是十分有益的。

对于千变万化的数学题，就其解题目标特点来区分，可以概括为两大类：求证题和求解题；就其知识的涉及面多寡来区分，可以概括为另外两大类：单一题和综合题；就其题型的特点来说，又有传统题和客观题之区别。这本小册子，就是按求证题、求解题、客观题和综合题四种，来探索其解题思路与技巧的。

所谓解题，就是揭开“条件”与“结论”之间的内在联系，或是探索从“已知”可以导出怎么样的“未知”？其解题过程大体说来总是四个程序，我们称它为解数学题的一般程序，它就是：

（1）**审——审题**：明确题意，分清条件结论；

（2）**想——思考**：思索解法，设计解题方案；

（3）**解——解法**：叙述解法，力求表达合理；

（4）**查——检查**：全面检查，及时补缺补漏。

第 一 章

求 证 题

一、求证题的特点

1．求证题的含义

在茫茫的数学题海中，有这样一类题目，它的条件和结论都是已经知道的，要求我们去揭示条件和结论之间是否具有因果关系，这样的数学题目，统称为求证题。例如：

命题1：等腰三角形的底角相等。

命题2：已知空间四边形ABCD中，$AB\perp CD$，$AD\perp BC$求证：$BD\perp AC$。

命题3：若$a+b+c=0$，求证：

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

命题4：在$\triangle ABC$中，若$p+q=1$，求证：

$$p\cdot\sin^2A+q\cdot\sin^2B>pq\cdot\sin^2C.$$

命题5：过双曲线上任一点P的切线与双曲线两渐近线交于A、B两点，求证：点P是线段AB的中点。

上述这一类题目，它们的条件和结论都是明确的，也就是说，可以区分出已知的是什么，要求证明的又是什么。例如命题1中，已知的是“某等腰三角形的两个底角”，要求证

明的是“这两个底角相等”．这一类命题都归属于求证题，或者称它为数学证明题。

2．求证题的题型

按照题目结论的性质来区分，数学求证题有如下四大类型：

（1）求证数量之间具有某种的关系，例如，求证恒等式、条件等式、不等式、以及几何图形的等量关系式等诸方面的题目．

（2）求证图形之间具有某种的关系，例如，求证有关平行、垂直、全等、相似、共点、共面、共圆等诸方面的题目。

（3）求证某种数量具有某种特性，例如，求证有关数的性质、函数的特性、方程根的性质等诸方面的题目。

（4）求证某图形具有某种的特性，例如，求证某图形具有对称性、周期性、或通过某定点等诸方面的题目。

3．解求证题的方法分类

揭示题目条件和结论之间具有某种因果关系的过程，称为证明，或解求证题。

解求证题的方法是多种多样的，证法的分类，随着区分标准之不同，分类情况也就各异．常见的证法分类，有下列几种情况：

（1）按证明的推理格式来区分，有演绎法和归纳法两大类．当题目是一个特殊场合的判断时，我们就要从一般的原理原则方面去寻求论据，加以证明．这种由一般到特殊的证明方法叫做演绎法．反之，当题目是一个一般性原理原则的判断时，我们就要从特殊场合方面去寻求论据，加以证明．

这种由特殊到一般的证明方法叫做归纳法。

（2）按证明的入手方向来区分，有直接证法和间接证法两大类。凡直接从原命题入手进行证明的方法，叫直接证法。由证明与原命题等价的命题入手，从而间接地达到求证目的，这种证明方法叫做间接证法（如反证法、同一法）。

（3）按证明的思维顺逆来区分，有综合法与分析法两大类。无论是直接或间接证法，都可能用到综合法或分析法。

（4）按证明中使用的媒介工具来区分，又有三角证法、解析法、代数证法、辅助元素法、形数结合法、变量代换法……等等。

（5）按证明中使用的知识技巧来区分，有待定系数法、配方法、判别式法……等等。

二、解求证题的方法与技巧

1．由因来导果　顺推"综合法"

所谓证题过程，就是寻求已知条件和求证结论的内在联系的过程。因此，多数证明题是从题目的已知条件出发，进行一系列逻辑推理，逐步靠向未知，最后达到待证的结论。这种由因导果的证题方法，称为综合法，是一种顺推证法。

在较简单的问题中，只要一步推理，就能解决问题。在较复杂的问题中，通常需要若干步推理，才能导至结论。

例1.1　若$a>0$，$b>0$，$a\neq b$，在a、b之间插入n个正数x_1，x_2，…，x_n，使其成等比数列。

求证：$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}$。

分析：本题结论左边的 x_i 与 a、b 之间的关系尚未表示出来，因此结论的'需知'是不明朗的。但，从已知条件来看，只要设公比为 q，则有 $b=aq^{n+1}$，这样 $x_k(k=1, 2, \cdots n)$均可通过 a、b 来表示。因此，应考虑用综合法。

证明：设 a，x_1，x_2，$\cdots x_n$，b 成等比数列，其公比为 q，则 $x_1=aq$，$x_2=aq^2$，$\cdots x_n=aq^n$（x_1，x_2，$\cdots$ x_n 为正数）。

$$\therefore \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{aq \cdot aq^2 \cdots aq^n}$$
$$= \sqrt[n]{a^n \cdot q^{1+2+\cdots+n}}$$
$$= \sqrt[n]{a^n \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$
$$= a \cdot q^{\frac{n+1}{2}}.$$

又 $b=aq^{n+1}$，$q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$，代入上式得

$$aq^{\frac{n+1}{2}} = a\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{2}}$$
$$= \sqrt{ab}.$$

$\because \quad a>0, b>0, a \neq b$

$\therefore \quad \sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$

即 $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}<\frac{a+b}{2}$.

评注：证题的关键是由 $aq^{n+1}=b$，得$q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 这样，可使$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$能用含 a、b 的式子$\sqrt{ab}$来表示。

例1.2 已知 $5\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$

求证：$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha$。

分析：本题条件中的角 β 与 $2\alpha+\beta$ 可通过结论中的角 $\alpha+\beta$ 与 α 的整式表示 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，$2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$ 但，反过来，结论中的角只能通过条件中的角的半角表示 $\alpha+\beta=\frac{(2\alpha+\beta)+\beta}{2}$，$\alpha=\frac{(2\alpha+\beta)-\beta}{2}$。显然，前者比后者容易入手，因此，本题适合用综合法证明。

证明：　$\because 2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$

已知条件可变换成

$$5\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha-5\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$$

因此　$4\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha=6\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$

两边同除 $4\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha$，得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

评注：附有条件等式证明过程中，应贯穿着二条红线，一是角的变化，二是三角函数的变化。

例1.3 若M、N分别是▱ABCD的AB、CD边的中点，CM、AN分别交BD于E、F，求证：BE = EF = FD。

分析：在▱ABCD中，M、N是对边中点，根据平行四边形性质可得许多结果，选择AM$\underline{\parallel}$CN可导出AN ∥ CM，由此进一步推导，就能由因导果。

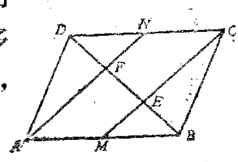

图 1—1

证明：　ABCD是平行四边形，

∴　AB$\underline{\parallel}$CD，

又　AM = MB，CN = ND，

$\therefore$ AM$\underline{\parallel}$CN，AMCN是平行四边形。

故由ME∥AF，NF∥CE，M、N分别为AB、CD的中点，得

$$BE=EF,\ EF=FD,$$

$\therefore$ $BE=EF=FD$。

评注：判断AMCN是平行四边形是沟通已知条件与结论的桥梁。

例1.4 EF为平面α、β的交线，$AB\perp\alpha$于B，$AC\perp\beta$于C，$CD\perp\alpha$于D，求证：$BD\perp EF$。

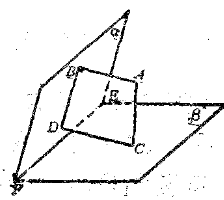

图1—2

分析：不难看到，BD是AC在平面α内的射影，而BD和EF都在平面α内，因此可根据三垂线定理的逆定理，由因导果论之。

证明：$\because$ $AB\perp\alpha$，$CD\perp\alpha$，

$\therefore$ BD是AC在平面α内的射影。

$\because$ $AC\perp\beta$，

$\therefore$ $AC\perp EF$。

根据三垂线定理的逆定理，可得

$$BD\perp EF.$$

评注：发现BD是AC在平面α的射影，是本题证明的关键。

例1.5 抛物线$y^2=4ax(a>0)$过焦点的弦P_1Q_1，P_2Q_2，P_3Q_3与x轴的倾斜角分别为α_1，α_2，α_3（均为锐角）。

（1）以S_1，S_2，S_3分别表示$\triangle OP_1Q_1$，$\triangle OP_2Q_2$，$\triangle OP_3Q_3$面积，证明：$S_1=\dfrac{2a^2}{\sin\alpha_1}$，$S_2=\dfrac{2a^2}{\sin\alpha_2}$，$S_3=$

$$=\frac{2a^2}{\sin\alpha_3}.$$

（2）若$\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$，求证：

$$S_2=\frac{S_1\cdot S_3}{\sqrt{S_1^2-4a^4}+\sqrt{S_3^2-4a^4}}$$

分析：$\triangle P_1Q_1O$可看成以弦P_1Q_1为底边，以O到P_1Q_1的距离d为高的三角形。则$S_1=\frac{1}{2}P_1Q_1\cdot d$，因此，本题证明应从计算弦长及原点到弦的距离入手。

证明：（1）抛物线焦点为(a，0)，弦P_1Q_1的倾斜角为α_1，可设P_1Q_1的方程为

$$y=\mathrm{tg}\alpha_1\cdot(x-a),$$

代入抛物线　$y^2=4ax$，有

$$x^2-(2a+4a\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha_1)x+a^2=0.$$

由此　$|P_1Q_1|=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_1}\cdot|x_2-x_1|$

$$=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_1}\cdot\sqrt{(2a+4a\mathrm{ctg}^2\alpha_1)^2-4\cdot a^2}$$

$$=4a\cdot\frac{1}{\cos\alpha_1}\cdot\frac{1}{\sin\alpha_1}\cdot\mathrm{ctg}\alpha_1$$

$$=\frac{4a}{\sin^2\alpha_1}.$$

原点O与弦距离 $d_1=\frac{|0-\mathrm{tg}\alpha_1\cdot a|}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_1}}=a\cdot\sin\alpha_1$

$$\therefore\quad S_1=\frac{1}{2}|P_1Q_1|\cdot d_1=\frac{2a^2}{\sin\alpha_1}.$$

同理　$S_2=\frac{2a^2}{\sin\alpha_2}$，$S_3=\frac{2a^2}{\sin\alpha_3}$。

（2）　将（1）的结果代入等式右边，有

$$右边=\frac{4a^4\cdot\frac{1}{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_3}}{2a^2\left[\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\alpha_3}{\sin\alpha_3}\right]}$$

$$=\frac{2a^2}{\sin\alpha_3\cdot\cos\alpha_1+\cos\alpha_3\cdot\sin\alpha_1}$$

$$=\frac{2a^2}{\sin(\alpha_1+\alpha_3)}\qquad(\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2)$$

$$=\frac{2a^2}{\sin\alpha_2}$$

$=S_2$ （左边）

∴等式成立。

评注：一般地，设弦两端点为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，弦的方程为 $y=kx+b$，则弦长

$$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+k^2(x_2-x_1)^2}$$
$$=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2-x_1|。$$

而$|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1\cdot x_2}$ 又可利用韦达定理计算，这样，就避开了具体求出端点坐标的不必要的繁杂计算。

从上面几个例题，我们看到，综合法由因导果，步步推求已知事项的必要条件。从思路上讲，比较顺当，而且叙述比较简便。因此，证题时往往首先考虑用综合法。其次，综合法的应用十分广泛，所有各种题型都可适用，它是一种最基础最常用的证明方法。下面几道证明题都可以用综合法来证。

（1） 已知：$\frac{a}{c}=\sin\theta$，$\frac{b}{c}=\cos\theta$，$a^a=(c+b)^{c-b}$