



中学数学 解题思路与技巧

ZHONGXUE SHUXUE

JIETI SILU YU JIQIAO

福建科学技术出版社

中学数学解题思路与技巧

何履端 滕用铨 赖祖正 陈美利

福建科学技术出版社

一九八七·福州

责任编辑：宁筱彤

中学数学解题思路与技巧

何履端 滕用铨 赖祖正 陈美利

福建科学技术出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

三明市印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 12印张 264千字

1987年8月第1版

1987年8月第1次印刷

印数：1—110,500

书号：7211·70 定价：1.80元

出版说明

优异的成绩，不仅来自勤奋，而且来自于科学的学习方法。为了帮助广大读者摆脱茫茫题海，开拓思路，掌握解题技巧，提高学习效率，考取优异的成绩，我们邀请了一批具有丰富教学经验的教师编写了这套丛书。这套丛书共7本，即《中学语文解题思路与技巧》、《中学数学解题思路与技巧》、《中学政治解题思路与技巧》、《中学物理解题思路与技巧》、《中学化学解题思路与技巧》、《中学地理解题思路与技巧》、《中学历史解题思路与技巧》。各书内容均包括：题型特点、不同题型的解题思路与技巧、解题的经验分析等。这套丛书适合广大中学生、参加成人高考的青年学习使用；同时，亦可作为中学教师、师范大专院校教师的教学参考书。

一九八六年十月

目 录

概 述	(1)
第一章 求证题	(2)
一、求证题的特点	(2)
1. 求证题的含义	(2)
2. 求证题的题型	(3)
3. 解求证题的方法分类	(3)
二、解求证题的方法与技巧	(4)
1. 由因来导果 顺推“综合法”	(4)
2. 由果来索因 逆推“分析法”	(10)
3. 反面优正面 宜用反证法	(15)
4. 符合唯一性 可用同一法	(20)
5. 用穷举证法 不重又不漏	(24)
6. 数学归纳法 无限化有限	(27)
7. 证明恒等式 应化繁为简	(33)
8. 引辅助元素 为搭桥铺路	(40)
9. 着眼于概念 入手于定义	(50)
10. 巧设曲线系 退一能进二	(56)
11. 因需要凑合 能有的放矢	(62)
12. 巧搭配变形 有利于推导	(65)
13. 以消元变形 使条件集中	(71)
三、解求证题的经验与教训	(79)
1. 证法的思路通性	(79)
2. 典型的解题错误分析	(88)
第二章 求解题	(94)

一、求解题的特点	(94)
1. 求解题的含义	(94)
2. 求解题的题型	(95)
3. 解求解题的方法分类	(96)
二、解求解题的思路与技巧	(97)
1. 剖析式子结构 指引化简求值	(97)
2. 欲解化简求值 可引辅助元素	(107)
3. 两弦定理联边角 解三角形有方向	(121)
4. 寻规律变量代换 解方程化繁为简	(130)
5. 借用判别式 求根现奇迹	(140)
6. 巧用韦达定理 解题简捷合理	(149)
7. 紧扣复数相等 可以化“虚”为“实”	(154)
8. 转化等差等比 “已知”求解“未知”	(164)
9. 区别排列与组合 选用乘法或加法	(171)
10. 以最短定距离 用平移求夹角	(181)
11. 折叠不忘展平 空间联想平面	(198)
12. 脱颖于定义概念 立足于图形性质	(209)
13. 借参数之“东风” 找轨迹之“原形”	(217)
三、解求解题的策略	(231)
1. 直接与曲接	(232)
2. 正面与反面	(232)
3. 外形与内部	(233)
4. 图形与数式	(235)
5. 前进与后退	(236)
6. 分区与统一	(237)
7. 孤立与联系	(238)
第三章 客观题	(241)
一、客观题的特点	(241)
1. 客观题的含义与优点	(241)

2. 客观题的题型	(242)
3. 选择题的结构与类型	(242)
4. 填空题的结构与类型	(247)
5. 是非题的结构与类型	(249)
二、解选择题的方法与技巧	(249)
1. 顾名思义 准确判断	(249)
2. 直接推理 对照选项	(251)
3. 直接计算 对号入座	(253)
4. 逐个筛选 去伪存真	(256)
5. 先来猜测 后给验证	(259)
6. 以特殊值 验各选项	(262)
7. 观察图形 直观明了	(265)
8. 剖析因果 得出结论	(266)
三、解填空题的方法与技巧	(274)
1. 用定义确定法解填空题	(274)
2. 用直接推理法解填空题	(275)
3. 用直接计算法解填空题	(276)
4. 用淘汰法解填空题	(277)
5. 用猜想验证法解填空题	(278)
6. 用特殊值法解填空题	(278)
7. 用图示法解填空题	(279)
8. 用剖析法解填空题	(279)
四、解是非题的方法与技巧	(283)
第四章 综合题	(285)
一、综合题的特点	(285)
1. 综合题的含义	(285)
2. 综合题的类型	(285)
二、解综合题的思路与技巧	(285)
1. 拆“综合”为“基本” 化“复杂”为“单一”	(285)

2. 采取分而治之 便于各个击破	(306)
3. 通过等价变换 实现化难为易	(320)
4. 引用“他山之石” 巧攻“本地之玉”	(336)
5. 从“特殊”得启示 解“一般”有方向	(346)
6. 利用形数结合 易得解题捷径	(359)
三、怎样提高解综合题的效率	(375)
1. 要加强解题的知识因素	(375)
2. 要提高解题的能力因素	(376)
3. 要丰富解题的经验因素	(376)

概 述

学习数学，关键之一是学会解题。怎样提高解题效率？是每个读者都会感兴趣的课题。我们认为：探索解题思路，掌握解题技巧，对提高解题效率是十分有益的。

对于千变万化的数学题，就其解题目标特点来区分，可以概括为两大类：求证题和求解题；就其知识的涉及面多寡来区分，可以概括为另外两大类：单一题和综合题；就其题型的特点来说，又有传统题和客观题之区别。这本小册子，就是按求证题、求解题、客观题和综合题四种，来探索其解题思路与技巧的。

所谓解题，就是揭开“条件”与“结论”之间的内在联系，或是探索从“已知”可以导出怎么样的“未知”？其解题过程大体说来总是四个程序，我们称它为解数学题的一般程序，它就是：

- (1) 审——审题：明确题意，分清条件结论；
- (2) 想——思考：思索解法，设计解题方案；
- (3) 解——解法：叙述解法，力求表达合理；
- (4) 查——检查：全面检查，及时补缺补漏。

求 证 题

一、求证题的特点

1. 求证题的含义

在茫茫的数学题海中，有这样一类题目，它的条件和结论都是已经知道的，要求我们去揭示条件和结论之间是否具有因果关系，这样的数学题目，统称为求证题。例如：

命题 1：等腰三角形的底角相等。

命题 2：已知空间四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp CD$ ， $AD \perp BC$ 求证： $BD \perp AC$ 。

命题 3：若 $a+b+c=0$ ，求证：

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9.$$

命题 4：在 $\triangle ABC$ 中，若 $p+q=1$ ，求证：

$$p \cdot \sin^2 A + q \cdot \sin^2 B > pq \cdot \sin^2 C.$$

命题 5：过双曲线上任一点 P 的切线与双曲线两渐近线交于 A 、 B 两点，求证：点 P 是线段 AB 的中点。

上述这一类题目，它们的条件和结论都是明确的，也就是说，可以区分出已知的是什麼，要求证明的又是什么。例如命题 1 中，已知的是“某等腰三角形的两个底角”，要求证

明的是“这两个底角相等”。这一类命题都归属于求证题，或者称它为数学证明题。

2. 求证题的题型

按照题目结论的性质来区分，数学求证题有如下四大类型：

(1) 求证数量之间具有某种的关系，例如，求证恒等式、条件等式、不等式、以及几何图形的等量关系式等诸方面的题目。

(2) 求证图形之间具有某种的关系，例如，求证有关平行、垂直、全等、相似、共点、共面、共圆等诸方面的题目。

(3) 求证某种数量具有某种特性，例如，求证有关数的性质、函数的特性、方程根的性质等诸方面的题目。

(4) 求证某图形具有某种的特性，例如，求证某图形具有对称性、周期性、或通过某定点等诸方面的题目。

3. 解求证题的方法分类

揭示题目条件和结论之间具有某种因果关系的过程，称为证明，或解求证题。

解求证题的方法是多种多样的，证法的分类，随着区分标准之不同，分类情况也就各异。常见的证法分类，有下列几种情况：

(1) 按证明的推理格式来区分，有演绎法和归纳法两大类。当题目是一个特殊场合的判断时，我们就要从一般的原理原则方面去寻求论据，加以证明。这种由一般到特殊的证明方法叫做演绎法。反之，当题目是一个一般性原理原则的判断时，我们就要从特殊场合方面去寻求论据，加以证明。

这种由特殊到一般的证明方法叫做归纳法。

(2) 按证明的入手方向来区分, 有直接证法和间接证法两大类。凡直接从原命题入手进行证明的方法, 叫直接证法。由证明与原命题等价的命题入手, 从而间接地达到求证目的, 这种证明方法叫做间接证法 (如反证法、同一法)。

(3) 按证明的思维顺逆来区分, 有综合法与分析法两大类。无论是直接或间接证法, 都可能用到综合法或分析法。

(4) 按证明中使用的媒介工具来区分, 又有三角证法、解析法、代数证法、辅助元素法、形数结合法、变量代换法……等等。

(5) 按证明中使用的知识技巧来区分, 有待定系数法、配方法、判别式法……等等。

二、解求证题的方法与技巧

1. 由因来导果 顺推“综合法”

所谓证题过程, 就是寻求已知条件和求证结论的内在联系的过程。因此, 多数证明题是从题目的已知条件出发, 进行一系列逻辑推理, 逐步靠向未知, 最后达到待证的结论。这种由因导果的证题方法, 称为综合法, 是一种顺推证法。

在较简单的问题中, 只要一步推理, 就能解决问题。在较复杂的问题中, 通常需要若干步推理, 才能导出结论。

例1.1 若 $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, 在 a 、 b 之间插入 n 个正数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使其成等比数列。

$$\text{求证: } \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} < \frac{a+b}{2}.$$

分析：本题结论左边的 x_i 与 a 、 b 之间的关系尚未表示出来，因此结论的‘需知’是不明朗的。但，从已知条件来看，只要设公比为 q ，则有 $b = aq^{n+1}$ ，这样 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ 均可通过 a 、 b 来表示。因此，应考虑用综合法。

证明：设 $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ 成等比数列，其公比为 q ，则 $x_1 = aq, x_2 = aq^2, \dots, x_n = aq^n$ ($x_1, x_2, \dots, x_n$ 为正数)。

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} &= \sqrt[n]{aq \cdot aq^2 \cdots aq^n} \\ &= \sqrt[n]{a^n \cdot q^{1+2+\cdots+n}} \\ &= \sqrt[n]{a^n \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= a \cdot q^{\frac{n+1}{2}}.\end{aligned}$$

又 $b = aq^{n+1}$ ， $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ ，代入上式得

$$\begin{aligned}aq^{\frac{n+1}{2}} &= a \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{2}} \\ &= \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

$$\because a > 0, b > 0, a \neq b$$

$$\therefore \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

$$\text{即 } \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} < \frac{a+b}{2}.$$

评注：证题的关键是由 $aq^{n+1} = b$ ，得 $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 这样，可使 $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ 能用含 a 、 b 的式子 $\sqrt{ab}$ 来表示。

例1.2 已知 $5\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$

求证: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

分析: 本题条件中的角 β 与 $2\alpha + \beta$ 可通过结论中的角 $\alpha + \beta$ 与 α 的整式表示 $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$, $2\alpha + \beta = (\alpha + \beta) + \alpha$ 但, 反过来, 结论中的角只能通过条件中的角的半角表示 $\alpha + \beta = \frac{(2\alpha + \beta) + \beta}{2}$, $\alpha = \frac{(2\alpha + \beta) - \beta}{2}$. 显然, 前者比后者容易入手, 因此, 本题适合用综合法证明.

证明: $\because 2\alpha + \beta = (\alpha + \beta) + \alpha$, $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$

已知条件可变换成

$$\begin{aligned} 5\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha - 5\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha \\ = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

因此 $4\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha = 6\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha$

两边同除 $4\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha$, 得

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

评注: 附有条件等式证明过程中, 应贯穿着二条红线, 一是角的变化, 二是三角函数的变化.

例1.3 若M、N分别是 $\square ABCD$ 的AB、CD边的中点, CM、AN分别交BD于E、F, 求证: $BE = EF = FD$.

分析: 在 $\square ABCD$ 中, M、N是对边中点, 根据平行四边形性质可得许多结果, 选择 $AM \parallel CN$ 可导出 $AN \parallel CM$, 由此进一步推导, 就能由因导果.

证明: $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$,

又 $AM = MB$, $CN = ND$,

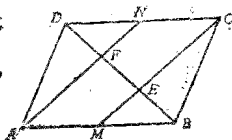


图 1—1

$\therefore AM \parallel CN$, $AMCN$ 是平行四边形.

故由 $ME \parallel AF$, $NF \parallel CE$, M 、 N 分别为 AB 、 CD 的中点, 得

$$BE = EF, EF = FD,$$

$$\therefore BE = EF = FD.$$

评注: 判断 $AMCN$ 是平行四边形是沟通已知条件与结论的桥梁.

例 1.4 EF 为平面 α 、 β 的交线, $AB \perp \alpha$ 于 B , $AC \perp \beta$ 于 C , $CD \perp \alpha$ 于 D , 求证: $BD \perp EF$.

分析: 不难看出, BD 是 AC 在平面 α 内的射影, 而 BD 和 EF 都在平面 α 内, 因此可根据三垂线定理的逆定理, 由因导果论之.

证明: $\because AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$,

$\therefore BD$ 是 AC 在平面 α 内的射影.

$\because AC \perp \beta$,

$\therefore AC \perp EF$.

根据三垂线定理的逆定理, 可得

$$BD \perp EF.$$

评注: 发现 BD 是 AC 在平面 α 的射影, 是本题证明的关键.

例 1.5 抛物线 $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) 过焦点的弦 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 与 x 轴的倾斜角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (均为锐角).

(1) 以 S_1, S_2, S_3 分别表示 $\triangle OP_1Q_1, \triangle OP_2Q_2, \triangle OP_3Q_3$ 面积, 证明: $S_1 = \frac{2a^2}{\sin \alpha_1}, S_2 = \frac{2a^2}{\sin \alpha_2}, S_3 =$

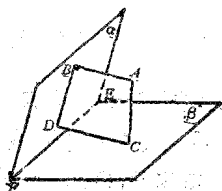


图 1-2

$$= \frac{2a^2}{\sin \alpha_3}.$$

(2) 若 $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$, 求证:

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot S_3}{\sqrt{S_1^2 - 4a^4} + \sqrt{S_3^2 - 4a^4}}$$

分析: $\triangle P_1 Q_1 O$ 可看成以弦 $P_1 Q_1$ 为底边, 以 O 到 $P_1 Q_1$ 的距离 d 为高的三角形. 则 $S_1 = \frac{1}{2} P_1 Q_1 \cdot d$, 因此, 本题证明应从计算弦长及原点到弦的距离入手.

证明: (1) 抛物线焦点为 $(a, 0)$, 弦 $P_1 Q_1$ 的倾斜角为 α_1 , 可设 $P_1 Q_1$ 的方程为

$$y = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (x - a),$$

代入抛物线 $y^2 = 4ax$, 有

$$x^2 - (2a + 4a \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha_1)x + a^2 = 0.$$

$$\text{由此 } |P_1 Q_1| = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} \cdot |x_2 - x_1|$$

$$= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} \cdot \sqrt{(2a + 4a \operatorname{ctg}^2 \alpha_1)^2 - 4 \cdot a^2}$$

$$= 4a \cdot \frac{1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_1} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1$$

$$= \frac{4a}{\sin^2 \alpha_1}.$$

$$\text{原点 } O \text{ 与弦距离 } d_1 = \frac{|0 - \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot a|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = a \cdot \sin \alpha_1$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} |P_1 Q_1| \cdot d_1 = \frac{2a^2}{\sin \alpha_1}.$$

$$\text{同理 } S_2 = \frac{2a^2}{\sin \alpha_2}, S_3 = \frac{2a^2}{\sin \alpha_3}.$$

(2) 将(1)的结果代入等式右边, 有

$$\begin{aligned}
 \text{右边} &= \frac{4a^4 \cdot \frac{1}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3}}{2a^2 \left[\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\cos \alpha_3}{\sin \alpha_3} \right]} \\
 &= \frac{2a^2}{\sin \alpha_3 \cdot \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3 \cdot \sin \alpha_1} \\
 &= \frac{2a^2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)} \quad (\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2) \\
 &= \frac{2a^2}{\sin \alpha_2} \\
 &= S_2 \quad (\text{左边})
 \end{aligned}$$

∴ 等式成立。

评注：一般地，设弦两端点为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ，弦的方程为 $y = kx + b$ ，则弦长

$$\begin{aligned}
 L &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2} \\
 &= \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_2 - x_1|.
 \end{aligned}$$

而 $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 \cdot x_2}$ 又可利用韦达定理计算，这样，就避开了具体求出端点坐标的不必要的繁杂计算。

从上面几个例题，我们看到，综合法由因导果，步步推求已知事项的必要条件。从思路上讲，比较顺当，而且叙述比较简便。因此，证题时往往首先考虑用综合法。其次，综合法的应用十分广泛，所有各种题型都可适用，它是一种最基础最常用的证明方法。下面几道证明题都可以用综合法来证。

(1) 已知： $\frac{a}{c} = \sin \theta$, $\frac{b}{c} = \cos \theta$, $a^a = (c + b)^{c-b}$