吉米多维奇

数学分析

习题集精选精解

滕加俊 ◎ 主编

精准浓缩习题精华
深入讲解方法技巧

东南大学出版社
Southeast University Press

吉米多维奇数学分析习题集

精选精解

主编　滕加俊

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

吉米多维奇的《数学分析习题集》的内容概括了《数学分析》的全部命题，但该书习题数量多，许多题目在题型和解题方法上具有相似之处，同时该书难题多，许多题目的难度超出对同学们的要求。为了帮助广大同学更好地掌握《数学分析》的基本概念，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们从吉米多维奇的《数学分析习题集》中选择了一部分习题进行汇编。这些习题涉及内容广、题型多，基础性题目从多个角度帮助广大同学理解相应的基本概念和基本理论，帮助同学掌握基本解题方法；而那些层次性较高的题目，涉及的内容多，技巧性强，掌握这些题目的解题方法，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握《数学分析》的基本内容和解题方法。

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集精选精解/滕加俊主编.
—南京：东南大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-5641-2302-4

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①滕… Ⅲ.①数学分析—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 126315 号

吉米多维奇数学分析习题集精选精解

主　　编	滕加俊	**责任编辑**	刘　坚
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	**电子邮件**	liu-jian@seu.edu.cn
出版发行	东南大学出版社	**出 版 人**	江　汉
社　　址	南京市四牌楼2号	**邮　　编**	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	**电子邮件**	press@seu.edu.cn
经　　销	全国各地新华书店	**印　　刷**	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	**印　　张**	30.5　**字　数**　880千
版　　次	2010年8月第1版第1次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-2302-4		
定　　价	39.00元		

前　言

《数学分析》是数学学科中一门重要的基础课，同时也是学习时间跨度大、理论体系严谨、内容极其丰富、学习难度很高的一门课程。学好《数学分析》既可以为后续专业课程奠定必备的数学基础，同时也培养了学生抽象的逻辑思维能力，提高了学生的创新意识、开拓精神和实际应用能力。

《数学分析》中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密，无懈可击。作为进入大学阶段学习的第一门基石性课程，许多同学在学习过程中感到《数学分析》抽象难懂，对基本概念以及定理、结论在理解上感到困难，具体解题时缺乏思路，难以下手。

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作。该书内容丰富，由浅入深，涉及的内容概括了《数学分析》的全部命题，但该书习题数量多，许多题目在题型和解题方法上具有相似之处，同时该书难题多，许多题目的难度超出对同学们的要求，以至于许多同学望而却步。为了帮助广大同学更好地掌握《数学分析》的基本概念，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们从吉米多维奇的《数学分析习题集》中选择了一部分习题，汇编成本书。

这些习题涉及内容广、题型多，基础性题目从多个角度帮助广大同学理解相应的基本概念和基本理论，帮助同学掌握基本解题方法；而那些层次性较高的题目，涉及的内容多，技巧性强，掌握这些题目的解题方法，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握《数学分析》的基本内容和解题方法。

本书可以作为数学专业同学学习《数学分析》的参考书，又可以作为其他理工科同学学习《高等数学》《微积分》的参考书，同时也可作为各专业同学考研复习时的参考书。

本书由滕加俊、滕兴虎、郑琴、赵颖、杜法鹏、张瑰、颜超、王璞以及杨传兵、张月娇、李茂广、冯晨、刘娟等同志编写，全书由滕加俊教授、滕兴虎讲师统编，在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社领导以及刘坚博士和戴季东老师的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于我们水平有限，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编者

2010.7

目 录

第一章　分析引论

§1. 实数

1. 数学归纳法　为了证明某定理对任意自然数 n 是正确的，只要证明下面两点：

(1) 该定理对 $n=1$ 是正确的；(2) 若该定理对任何一个自然数 n 是正确的，则它对其后的一个自然数 $n+1$ 也是正确的.

2. 分割　若把有理数分为 A、B 两类，使其满足下列条件：(1) 两类均非空集；(2) 每个有理数必属于一个类，且仅属于一个类；(3) 属于 A 类(下类)的任何数都小于属于 B 类(上类)的任意数，此分类法被称之为分割. (a) 若或者下类 A 有最大数，或者上类有最小数，则分割 A/B 确定一个有理数；(b) 若 A 类没有最大数，而 B 类没有最小数，则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数①.

3. 绝对值　若 x 为实数，则由下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x|=\begin{cases}-x, & 若\ x<0;\\ x, & 若\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何实数 x 和 y，下列不等式成立

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4. 上确界和下确界　设 X 为实数的有界集，若：

(1) 每一个 $x\in X$② 满足不等式

$$x\geqslant m,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使得

$$x'<m+\varepsilon,$$

则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集 X 的下确界.

同样，若：

(1) 每一个 $x\in X$ 满足不等式

$$x\leqslant M,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $x''\in X$，使得

$$x''>M-\varepsilon,$$

则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集 X 的上确界.

若集 X 下方无界，则通常说

$$\inf\{x\}=-\infty,$$

若集 X 上方无界，则认为

$$\sup\{x\}=+\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差　若 $a(a\neq 0)$ 是被测量的准确值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|,$$

称为绝对误差，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|},$$

---

① 今后如没有相反的说明，我们把所研究的数都理解为实数.

② 符号 $x\in X$ 表示数字 x 属于集 X.

称为被测量的相对误差.

如果 x 的绝对误差不超过其第 n 个有效数字的单位的一半,则说明 x 有 n 位准确的数字.

运用数学归纳法证明:下列等式对任何自然数 n 都成立.

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 和 $a^{[0]}=1$.

证明:$(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$,式中 C_n^m 为由 n 个元素中选取 m 个的组合数,由此推导出牛顿二项式公式.

证 当 $n=1$ 时,有 $(a+b)^{[1]}=a+b$,

$$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立.即 $\qquad (a+b)^{[k]}=\sum\limits_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$,

则对于 $n=k+1$,有

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh)=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\
&=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+\{(a-(k-1)h)+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\\
&=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]},
\end{aligned}$$

即对 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有 $\qquad (a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$, ①

令 $h=0$,则有 $a^{[n]}=a^n$. ②

将 ② 式代入 ① 式,得牛顿二项式公式 $(a+b)^n=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m$.

【6】 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时,不等式显然成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则当 $n=k+1$ 时,由于 $\qquad x_i>-1 \qquad (i=1,2,\cdots,k+1)$,

所以 $1+x_i>0$,因此有

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\
&\quad=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).
\end{aligned}$$

又由于 $x_ix_j\geqslant 0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,k+1)$,

所以 $\qquad (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}$,

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$.

【8】 证明:当 $n>1$ 时,$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

提示:利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

证 当 $n=2$ 时,因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$. 故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即 $\quad k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$,

则当 $n=k+1$ 时,有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

而 $$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \qquad (k=1,2,\cdots),$$

从而 $$(k+1)!<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}=\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 $n\geqslant 2$ 有 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

【10】 证明不等式 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证 当 $n=1$ 时,显然有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式成立.

设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

而 $$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

事实上,$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$,

即 $$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2,$$

从而 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$,

因此 $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式成立.

由数学归纳法,命题证毕.

【11】 设 c 为正整数,而且不是整数的平方,$\frac{A}{B}$ 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割,其中 B 类包含 $b^2>c$ 这样的所有正有理数 b,而 A 类包含其余的所有有理数,证明:A 类中无最大数,而 B 类中无最小数.

证 我们要证明对任意 $a\in A$,存在 a' 使得 $a'>a$ 且 $a'\in A$.

若 $a\leqslant 0$,则显然存在 $a'>0\geqslant a$ 且 $a'\in A$. 故不妨设 $a>0$,于是 $a^2\leqslant c$ 但 $a^2\neq c$,倘若不然,$a^2=c$. 设 $a=\frac{p}{q}$,其中 p,q 为互质的正整数,则 $\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数,而 p^2 与 q^2 也是互质

的，故必有 $q=1$，从而 $c=p^2$，这与题设矛盾. 因此 $a^2<c$. 下面我们证明，当 n 充分大时，$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c$，即 $\quad a+\frac{1}{n}\in A$，

上述不等式等价于$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2$，

而 $\qquad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{2a+1}{n}$，

故只需取 n 使得$\frac{2a+1}{n}<c-a^2$，

为此只需取 $n>\frac{2a+1}{c-a^2}$，

因此当 $n>\frac{2a+1}{c-a^2}$ 时，$a+\frac{1}{n}\in A$.

故 A 类中无最大数.

应用相同的方法，可证明 B 类中无最小数，实质上，此分割$\frac{A}{B}$ 确定一个无理数$\sqrt{c}$.

【13】 作出适当的分割，证明等式：

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；(2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (1) 作确定$\sqrt{2}$的分割$\frac{A}{B}$：其中 B 类包含所有满足条件$b^2>2$的正有理数，而其余有理数归入 A 类. 再作确定$\sqrt{8}$的分割$\frac{A'}{B'}$：B' 类包含所有满足条件 $b'^2>8$ 的正有理数，而其余有理数归入 A' 类. 根据实数加法的定义，满足不等式 $a+a'<c<b+b'$（对任何 $a\in A,b\in B,a'\in A',b'\in B'$）的唯一实数 c 就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此要证$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$，我们只需证明$(b+b')>18$（$\forall b\in B$，$b'\in B'$）及$(a+a')^2<18$（$\forall a\in A,a'\in A'$ 且 $a+a'>0$）.

因为 $b^2>2,b'^2>8,b>0,b'>0$，故 $b^2b'^2>16,bb'>4$，从而

$$(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18.$$

又 $\qquad a+a'>0$，

则 a 与 a' 中至少有一个为正，从而由 $a^2a'^2<2\times 8=16$，知 $aa'<4$.

因此$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18$，证毕.

(2) $\sqrt{2}$ 的分割$\frac{A}{B}$ 如(1)中所示，再作确定$\sqrt{3}$ 的分割$\frac{A^*}{B^*}$：其中 B^* 类中包含所有满足条件 $b^{*2}>3$ 的正有理数，而其余有理数 a^* 归入 A^* 类. 根据实数乘法的定义，满足 $aa^*<c<bb^*$（对任何 $a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0,b\in B,b^*\in B^*$）的实数 c 唯一存在，且 $c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

但由于 $a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0$，从而 $a^2<2,a^{*2}<3$，所以$(aa^*)^2<6$. 而当 $b\in B$，$b^*\in B^*$ 时，$(bb^*)^2>6$；故 $aa^*<\sqrt{6}<bb^*$（对任何 $a\in A,a>0,a^*\in A^*,a^*>0,b\in B$，$b^*\in B^*$）. 因此$\sqrt{6}=c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

【15】 证明：任何非空并且下方有界的数集有下确界，而任何非空并且上方有界的数集有上确界.

证 设 A 是下方有界的数集，即存在实数 α 使得 $a>\alpha$（$\forall a\in A$）. 下面我们证明 A 有下确界.

我们讨论两种情况：

(1) A 中有最小数$\bar{a}$. 此时，$\forall a\in A$ 都有 $a\geqslant\bar{a}$，即$\bar{a}$是 A 的下界，又因为$\bar{a}\in A$，故对任何 A 的下界 m，均有$\bar{a}\geqslant m$，故$\bar{a}$ 为 A 的下确界.

(2) A 中无最小数. 此时，作分割$\frac{A'}{B'}$：将 A 的所有下界归入 A' 类，而其余数归入 B' 类，这样 A

$\subset B'$，A'、B' 均为非空集，且 A' 中的数小于 B' 中的数，故$\dfrac{A'}{B'}$是一个实数分割. 易知由此分割产生的实数 β 是 A' 类中的最大数，即 β 是 A 的最大下界. 因此 β 是 A 的下确界.

同理可证，上方有界的数集必有上确界.

【18】 $\{x\}$ 为数集，$-x$ 为 x 的相反数，证明：

(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$；(2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证 (1) 设 $\inf\{-x\}=m$，则有：

(a) 当 $-x\in\{-x\}$ 时，$-x\geqslant m$；

(b) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $-x'\in\{-x\}$，使

$$-x'<m+\varepsilon,$$

因此由(a)及(b)得：

(c) 当 $x\in\{x\}$ 时，$x\leqslant -m$；

(d) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in\{x\}$ 使得

$$x'>-m-\varepsilon.$$

因此 $\sup\{x\}=-m$，

即 $m=-\sup\{x\}$，

所以 $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

(2) 设 $\sup\{-x\}=M$，则由上确界的定义有

(a) 当 $-x\in\{-x\}$ 时，$-x\leqslant M$.

(b) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $-x'\in\{-x\}$，使

$$-x'>M-\varepsilon,$$

因此由(a)及(b)得：

(c) 当 $x\in\{x\}$ 时，$x\geqslant -M$.

(d) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in\{x\}$ 使得

$$x'<-M+\varepsilon.$$

因此 $\inf\{x\}=-M$，

即 $M=-\inf\{x\}$，

亦即 $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

【19】 设 $\{x+y\}$ 是所有 x，y 的和的集，其中 $x\in\{x\}$ 和 $y\in\{y\}$. 证明下列等式成立：

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$；

(2) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

证 (1) 设 $\inf\{x\}=m_1$，$\inf\{y\}=m_2$，则有

(a) 当 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$ 时 $x\geqslant m_1$，$y\geqslant m_2$，

从而 $x+y\geqslant m_1+m_2$.

(b) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$，使得 $x'<m_1+\dfrac{\varepsilon}{2}$，$y'<m_2+\dfrac{\varepsilon}{2}$ 从而 $x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon$.

因此 $\inf\{x+y\}=m_1+m_2$；

即 $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

(2) 同理可证：$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

【26】 解不等式 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

解 令 $x+2=t$，则有

$$|t|+|t-4|\leqslant 12,$$

即 $|t-4|\leqslant 12-|t|$.

两边平方得 $t^2-8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2$，

即 $\qquad 3|t|\leqslant 16+t.$

将上式两边平方，化简得 $t^2-4t-32\leqslant 0$，

解之得 $\qquad -4\leqslant t\leqslant 8$，

即 $\qquad -4\leqslant x+2\leqslant 8.$

因此 $\qquad -6\leqslant x\leqslant 6.$

【29】 解不等式 $|x(1-x)|<0.05.$

证 由 $|x^2-x|<\dfrac{1}{20}$ 得

$$-\frac{1}{20}<x^2-x<\frac{1}{20},$$

故原不等式可化为

$$\text{且}\quad\begin{cases}x^2-x-\dfrac{1}{20}<0,\\ x^2-x+\dfrac{1}{20}>0.\end{cases}\qquad(*)$$

由 $\qquad x^2-x-\dfrac{1}{20}<0,$

可得 $\qquad \dfrac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\dfrac{5+\sqrt{30}}{10}.$

由 $\qquad x^2-x+\dfrac{1}{20}>0,$

可得 $\qquad x<\dfrac{5-\sqrt{20}}{10},$

或 $\qquad x>\dfrac{5+\sqrt{20}}{10},$

因此使（$*$）式中两个不等式同时成立的 x 为

$$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10},$$

或 $\qquad \dfrac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\dfrac{5+\sqrt{30}}{10}.$

【40】 假设 $\delta(x)$ 和 $\delta(y)$ 为数 x 及 y 的相对误差，$\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差，证明：$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$

证 $x=a+\Delta_x, y=b+\Delta_y$，

其中 a 与 b 分别是 x 和 y 的精确值，Δ_x 与 Δ_y 是 x 和 y 的绝对误差，则有，xy 的绝对误差

$$\Delta=|xy-ab|=|b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\Delta_y|\leqslant|b|\Delta_x+|a|\Delta_y+\Delta_x\Delta_y.$$

于是
$$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|}$$
$$=\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 序列的理论

1. 序列极限的概念

假设对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

则称序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 或 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有极限 a（简称收敛于 a），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，特别是若

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称 x_n 为无穷小.

没有极限的序列称为发散的.

2. 极限存在的准则

(1) 如果 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

(2) 单调且有界的序列具有极限.

(3) 柯西判别法　序列 x_n 极限存在的必要且充分条件是：对于任何的 $\varepsilon>0$ 都存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时：$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$.

3. 序列极限的基本定理

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，则有：

(1) 如果 $x_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(4) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

4. 数 e

序列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n=1,2,\cdots)$ 具有有限极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots.$$

5. 无穷极限

符号 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 表示：对于任何的 $E>0$，都存在数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$.

6. 极限点(聚点)

若存在子序列：$x_{p_1},x_{p_2}\cdots,x_{p_n},\cdots\quad(1\leqslant p_1<p_2<\cdots)$
使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\xi$，则数 ξ(或符号 ∞) 称为已知序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的聚点.

任何有界序列至少有一个有穷的聚点(**布尔查诺 - 威尔斯特拉斯原理**)，如这个聚点是唯一的，则它就是该序列的有穷极限.

序列 x_n 的最小聚点(有穷的或无穷的) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 称作下极限；而其最大聚点 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 称为此序列的上极限. 等式 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 是序列 x_n 的(有穷的或无穷的) 极限存在的必要且充分的条件.

假设 n 为自然数列，求下列各式的值.

【44】 证明：$x_n=n^{(-1)^n}(n=1,2,\cdots)$ 无界，但是当 $n\to\infty$ 时，它并不是无穷大.

证　因为

$$x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & 当\ n=2k\ 时,\\ \dfrac{1}{2k+1}, & 当\ n=2k+1\ 时,\end{cases}$$

所以 $x_{2k}\to\infty$，$x_{2k+1}\to0(k\to\infty)$，故 x_n 无界，且不趋于无穷大.

【48】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解　因为 $|\sin n!|\leqslant1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

【52】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

解 当 $n=2k$ 时(k 为自然数)

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$
$$=\left(\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}\right)+\left(\frac{3}{2k}-\frac{4}{2k}\right)+\cdots+\left(\frac{2k-1}{2k}-\frac{2k}{2k}\right)=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2}.$$

当 $n=2k+1$ 时,

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$
$$=\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}\right)+\left(\frac{3}{2k+1}-\frac{4}{2k+1}\right)+\cdots+\left(\frac{2k-1}{2k+1}-\frac{2k}{2k+1}\right)+\frac{2k+1}{2k+1}$$
$$=-\frac{k}{2k+1}+\frac{2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}\longrightarrow\frac{1}{2}(k\to\infty).$$

由于不同子列的极限值不同,所以极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right],$$

不存在.

【53】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 因为

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

【54】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)-\left(\frac{2^2}{n^3}+\frac{4^2}{n^3}+\cdots\frac{(2(n-1))^2}{n^3}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)-4\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6n^3}-4\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\right]=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

【55】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$$g(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

则 $$f(n)+g(n)=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n}=2f(n+1)-1,$$

故 $$2f(n+1)-f(n)=g(n)+1,$$

又 $$2f(n+1)-f(n)$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$
$$=f(n)+\frac{2n+1}{2^n},$$

故 $$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}(g(n)+1)=3,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0^{(*)},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

(*)参看第58题.

证明下列等式.

【58】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$

证 因为 $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1>\frac{n(n-1)}{2}$,

故 $$0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}\quad(n\geqslant 2),$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

【60】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\qquad(a>1).$

证 当 $k\leqslant 0$ 时,显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{n^{-k}}\right)=0,$$

下面讨论当 $k>0$ 时的情形.

设 $a=1+h\qquad(h>0)$,

则 $$a^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2=\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.$$

若 $k=1$,则有 $$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{2n}{n(n-1)(a-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(a-1)^2},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}=0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0.$$

而当 $k>0$ 但 $k\neq 1$ 时,

因为 $$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k,$$

而 $$a^{\frac{1}{k}}>1,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

【61】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

证 取 $k=[|a|]$,则当 $n>k$ 时

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{k}\cdot\frac{|a|}{k+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}<|a|^k\frac{|a|}{n}=\frac{|a|^{k+1}}{n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{k+1}}{n}=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

【62】 $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$，若 $|q|<1$.

证 当 $q=0$ 时，$nq^n=0$，结论显然成立.

当 $0<|q|<1$ 时，令 $a=\frac{1}{|q|}$，则 $a>1$，

由题 60 有 $\lim\limits_{n\to\infty} n|q|^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$，

因此 $$\lim_{n\to\infty} nq^n=0.$$

【63】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$.

证 (1) 当 $a=1$ 时，等式显然成立.

(2) 当 $a>1$ 时，对任意给定的 ε，取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，

则当 $n>N$ 时，$1+n\varepsilon>a$，而 $(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon$，

所以 $(1+\varepsilon)^n>a$，

因此，当 $n>N$ 时，我们有 $1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$，

即 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，

此即 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

(3) 当 $0<a<1$ 时，令 $h=\frac{1}{a}$，则 $h>1$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{h}}=1,$$

总之，当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

【68】 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$.

提示：参照第 10 题.

证 由 10 题结果，我们有 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

【69】 证明序列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$，

是单调递增且上方有界，而序列 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$，

是单调递减且下方有界. 由此推导出这些序列有共同的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

证
$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}\end{aligned}$$