数学分析解题指南

（上　册）

毛羽辉　蒋国芳
编著
郑英元　杨庆中

华东师范大学数学系

一九八五年九月

数学分析解题指南

上　　册

毛羽辉　　蒋国芳

郑英元　　杨庆中

华东师范大学数学系

编　者　的　话

本书是华东师范大学数学系编、高等教育出版社出版的《数学分析》一书的配套读物，它逐章阐述解题要领或基本训练的线索，并提供全部题解（或提示）。此外还增编了若干适当的补充题及其解答。征得原书作者同意，对原书习题中的某些不妥之处，在本书中作了订正或说明。

对于执教数学分析课程的老师们来说，本书至少会使你感到方便，提高你的工作效率。

对于正在学习数学分析的在校学生、函授生和其他读者，我们期望你在解题时首先应独立思考，作出自己的解答。本书的作用是可以为你订正错误、开拓思路和检查解题能力。切不可对本书存过分的依赖。

另外，我们还希望本书能成为报考研究生或参加自学考试者的益友。

本书各章均由两部分组成。第一部分为解题指导，主要阐述解题的思想方法，归纳习题类型，并指出注意事项。在这部分中大都伴有一定数量的例题；个别章节也有把上述想法直接渗透到习题或补充题中去完成的做法。在第二部分中，依次给出各节习题和分章总练习题的解答或提示。除此之外，还增编了若干具有中等难度的补充题，用来弥补原书中选题方面的不足，使得基本训练在面上可以广一些。第一部分中的不少例题和第二部分中的某些补充题都可选作习题课

12

的教学资料。

在本书中，所有习题都按章、节、题的次序加以统一编号。如4.2.5是指原书中第四章§2习题第5题；各章总练习题和补充题分别带有A，B两个特征字符，例如9.A.2是指原书中第九章总练习题的第2题，13.B.4表示第十三章的第4道补充题，便于查找和引用。

本书是在原书作者和历任我系数学分析教学工作的老师们的工作基础上，经编者整理、补充而成。具体分工为：毛羽辉（第一、二、三、四、七章）蒋国芳（第五、六、八、九、十章），郑英元（第十一至十六章），杨庆中（第十七至二十一章）。由于我们受水平所限，恳切希望读者对本书的缺点错误给予批评指正。以期今后能改写得完美一些。

对于华东师大印刷厂的通力合作和华东师大数学系的忱情支持，我们深表感谢！

编者　　1985年3月

目　　录

第一章 函 数

（一） 解题指导

对于这一章，仅仅从正面去理解函数的概念和性质，通常都觉得比较容易。如果你能从侧面或反面去观察这些内容，在认识的广度和深度上作适当的增加，那么问题远非如此简单。提出以下建议供你参考。

（1）在§1中增加一些对绝对值的讨论，例如补充题1.B.1.—1.B.3；还可以适当补充一些以后有用的重要不等式，例如三角不等式，平均值不等式，伯努里不等式，许瓦兹不等式等。这些内容在1.B.4—1.B.7中作了介绍。

（2）在§2中应该化较大的精力培养学生具有否定一个逻辑判断的能力(或初步能力)。具体地说，就是要为无界函数、非单调函数、非奇(偶)函数、非周期函数等否定性概念作出肯定语式的定义。还可选择一些适当的问题作为具体的判别练习。关于这些内容可参见补充题1.B.8—1.B.12。应该认识到，这种培养逻辑表达、运算能力的训练，对今后的顺利学习无疑是大有裨益的。

（3）函数的复合运算理应成为§3的重点。在这方面可以增加一些有益的内容，例如借助图形构造复合函数的问题，自身多次复合和不动点问题等（见1.B.13—1.B.14）。

（4）函数经过有限次运算或无限次运算之后是否能保持原来的性质，这是本课程也是其他众多数学学科所关注的重要问题。所以在§3结束时应该适当回顾一下§2中的一些性质，即它们经四则、复合、求逆等运算之后是否得以保持。除了原书习题中已作过一些讨论（如总练习1.A.4）之外，还可作

类似的补充，例如1.B.15—1.B.19。

（5）在§4中，有关基本初等函数（及其图象）的知识是学生们在中学里业已熟悉的，可以从简处理。由于在以后章节的教学过程中经常需要举出一些典型的函数，作为说明某些概念、性质的直观例子，因此我们先在这里对某些以后常用的初等函数作好图形上的准备是值得的。这些例题示于1.B.20。如果你对"描述法"表示的函数图象有兴趣的话，1.B.21—1.B.22为你提供了几个有趣的例题。

（二）习题解答与提示

1.1.1 设O为原点，点A的坐标是（4，0），线段$x+y=6$（$x\geqslant 0$且$y\geqslant 0$）上动点P的坐标为P（x，y），△OAP的面积是S。写出x与S的对应关系，根据这种关系确定了S是x的函数$S=f(x)$，并求它的定义域和值域。（图1—1）

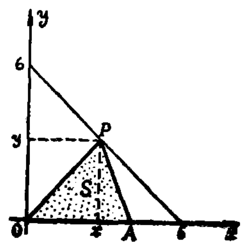

图1—1

解

$$S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot y,\ y=6-x，所以$$

$$S=2(6-x)$$

定义域和值域分别为

$$D：0\leqslant x\leqslant 6，\ M：0\leqslant S\leqslant 12$$

1.1.2 跳伞运动员在t_0秒内自由降落，然后打开降落伞，并按速度v米/秒降落t_1秒。试把他所经过的路程表成时间t的函数。

解 因为当$0\leqslant t\leqslant t_0$时为自由落体运动，当$t_0<t\leqslant t_0+t_1$时为匀速运动，所以容易写出所求的函数为

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}gt^2, & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ \frac{1}{2}gt_0^{\,2}+v(t-t_0), & t_0<t\leqslant t_0+t_1\end{cases}$$

1.1.3 根据图1—2写出定义在[0,1]上的函数$f_1(x)$与$f_2(x)$的解析表示式。

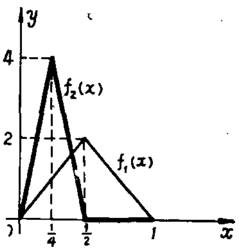

图1—2

解 利用直线的两点式方程或点斜式方程容易得到如下结果：

$$f_1(x)=\begin{cases}4x; & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 4-4x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}16x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\\ 8-16x, & \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

1.1.4 設$f(x)=x^3-4x^2+11x+7$求，$f(0)$，$f(-2)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(1)$，$f(-x)$，$f(x+h)$。

解 $f(0)=7$，　$f(-2)=-39$，　$f(\frac{1}{2})=\frac{93}{8}$，

$f(1)=15$，　$f(-x)=-x^3-4x^2-11x+7$，

$$\begin{aligned} f(x+h)&=(x+h)^3-4(x+h)^2+11(x+h)+7\\ &=x^3+(3h^2-4)x^2+(3h^2-8h+11)x\\ &\quad+(h^3-4h^2+11h+7)。\end{aligned}$$

1.1.5 设函数

$$f(x)=\begin{cases} 2+x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0 \end{cases}$$

求 (1) $f(-3)$，$f(0)$，$f(1)$；

(2) $f(\Delta x)-f(0)$，$f(-\Delta x)-f(0)$，$(\Delta x>0)$。

解 (1) $f(-3)=2+(-3)=-1$，

$f(0)=2+0=2$，$f(1)=2$；

(2) $f(\Delta x)-f(0)=2^{\Delta x}-2$，

$f(-\Delta x)-f(0)=2-\Delta x-2=-\Delta x$

1.1.6 试作函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 3x, & |x|<1\\ x^3, & |x|>1\\ 3, & |x|=1 \end{cases}$$

的图象。

解 函数$y=f(x)$的图象如图1—3。

1.1.7 设火车从甲站出发以0.5公里/分^{2}的加速度前进，经2分钟以后匀速行驶，再过7分钟后以0.5公里/分^{2}匀减速到达乙站。试将火车在这段时间内的速度及所走的路程表示为时间的函数，并作出其图象。

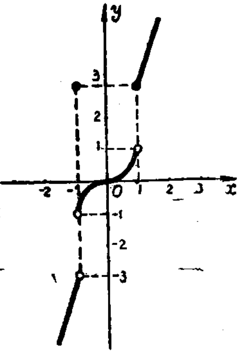

图1—3

解　速度函数应是

$$v(t)=\begin{cases}0.5t, & 0\leqslant t\leqslant 2\\ 1, & 2<t\leqslant 9\\ 1-0.5(t-9), & 9<t\leqslant 11;\end{cases}$$

路程函数则为

$$S(t)=\begin{cases}0.25t^2, & 0\leqslant t\leqslant 2\\ t-1, & 2<t\leqslant 9\\ t-1-0.25(t-9)^2 & 9<t\leqslant 11.\end{cases}$$

它们的图象分别示于图1—4和图1—5。

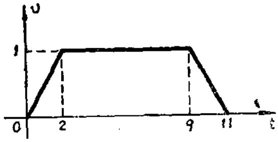

图1—4

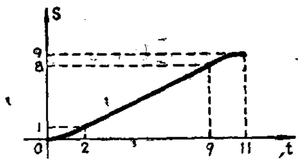

图1—5

1.1.8　一个三级火箭，各级质量分别为8000，4000，2000公斤，设燃料均匀消耗率为10公斤/秒，各级火箭燃烧时间分别为600，300，150秒。每级火箭的燃料燃烧尽后，外壳自行脱落，下一级火箭就自行燃烧，最后一级火箭成为人造卫星，绕地球运行。试写出火箭质量随时间的变化规律，并画出图象。

解　质量函数为

$$m(t)=\begin{cases}14000-10t, & t\in[0,600)\\ 6000-10(t-600), & t\in[600,900)\\ 2000-10(t-900), & t\in[900,1050)\\ 500, & t\in[1050,\infty)\end{cases}$$

这个分段函数的图象如图 1 — 6 所示。

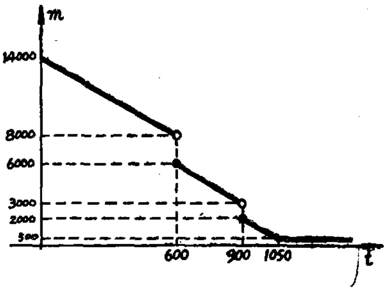

图 1 — 6

注 如果把m(t) 的各时间分段区间写成

$$[0,600], (600,900]$$

$$(900,1050], (1050,\infty)$$

也认为是正确的，只是在图象中需要将实端点与虚端点作相应更动。千万不能出现一个t值对应了两个m值的情形(因为我们曾声明，由自变量至因变量的对应必须是单值的，即所谓“单值函数”）。

1.1.9 作符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的图形。并证明 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$。

解 $y=\operatorname{sgn}x$的图形示于图 1 — 7，

根据符号函数的定义，当$x\geq 0$时 $x\cdot\operatorname{sgn}x=x$；当$x<0$时 $x\cdot\operatorname{sgn}x=-x$。所以对一切实数x，皆有 $x\cdot\operatorname{sgn}x=|x|$。

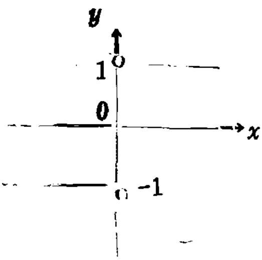

图 1 — 7

1.1.10 若$f(0)=-2$，$f(3)=5$。
求线性函数 $f(x)=ax+b$。
并求$f(1)$及$f(2)$（线性插补）。

解 将已知值代入线性待定形式：

$$\begin{cases} a\cdot 0+b=-2 \\ a\cdot 3+b=5 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=\dfrac{7}{3} \\ b=-2 \end{cases}$$

所以 $f(x)=\frac{7}{3}x-2$。 从而 $f(1)=\frac{1}{3}$，

$f(2)=\frac{8}{3}$ 。

1.2.1 证明下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $y=3x-1$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内严格递增；

(2) $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增；

(3) $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减。

証 (1) 任取x_1，$x_2\in(-\infty,\infty)$，且设$x_1<x_2$，则由于$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-1)-(3x_2-1)$

$$=3(x_1-x_2)<0$$

因此 $f(x_1)<f(x_2)$，即$f(x)=3x-1$在$(-\infty,\infty)$内严格递增。

(2) 任取x_1，$x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且设$x_1<x_2$，

由于 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$， $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x_1-x_2}{2}<0$，

因此 $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$， $\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$

从而 $f(x_1)-f(x_2)=\sin x_1-\sin x_2$

$$=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$$

即 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增。

(3) 任取 $x_1, x_2\in[0,\pi]$，且设 $x_1<x_2$，同样由于

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x_1-x_2}{2}<0,$$

因此 $$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0,\qquad \sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$$

从而 $$f(x_1)-f(x_2)=\cos x_1-\cos x_2$$
$$=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}>0。$$

即 $f(x)=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减。

另一种证法：由 (2) 的结果可知 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递增，从而 $\cos x=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减。

1.2.2 证明：设 $f(x)$ 为严格单调函数，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$。

証 （反证法）倘若 $x_1\neq x_2$，则由 $f(x)$ 为严格单调的假设，不论 $x_1<x_2$ 还是 $x_1>x_2$，总使 $f(x_1)<f(x_2)$ 或者是 $f(x_1)>f(x_2)$，这都与 $f(x_1)=f(x_2)$ 这一已知条件相矛盾。故 $x_1\neq x_2$ 的假设不真。

1.2.3 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=4x^3-x$；　　(2) $y=\frac{x^4}{2}+x^2-1$；

(3) $y=\cos\frac{x}{2}$；　　(4) $y=x^2e^{-x^2}$；

(5) $y=x+\sin x$；　　(6) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

解 (1) $f(-x)=4(-x)^3-(-x)=-(4x^3-x)$ $=-f(x)$，故为奇函数；

(2) $f(-x)=\frac{(-x)^4}{2}+(-x)^2-1=\frac{x^4}{2}+x^2-1$ $=f(x)$，故为偶函数；

(3) $f(-x)=\cos\frac{-x}{2}=\cos\frac{x}{2}=f(x)$，故为偶函数；

(4) $f(-x)=(-x)^2e^{-(-x)^2}=x^2e^{-x^2}=f(x)$，亦为偶函数；

(5) $f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$，故为奇函数；

(6) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$=-f(x)$， 故为奇函数。

1.2.4 求下列函数的周期：

(1) $y=\cos^2x$； (2) $y=2\operatorname{tg}3x$。

解(1) $y=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$，而$\cos 2x$的周期为π，常数1以任何正数为周期，故$y=\cos^2x$以π为周期。

(2) $\operatorname{tg}3x$以$\frac{\pi}{3}$为周期，故$y=2\operatorname{tg}3x$的周期也是$\frac{\pi}{3}$。

1.2.5 证明：(1)函数$y=\frac{x}{x^2+1}$在$(-\infty,\infty)$上是有界的；

(2)函数$y=\frac{1}{x^2}$在$(0,1)$上是无界的。

证(1)利用不等式$2|x|\leqslant 1+x^2$，就有

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

对一切$x\in(-\infty,\infty)$都成立，这就是说$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,\infty)$上以$\frac{1}{2}$为其界，或者说它是$(-\infty,\infty)$上的一个有界函数。

(2)对于无论怎么大的正数$M>0$，总可在$(0,1)$内找到相应的x_0，例如取$x_0=\frac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$使得

$$|f(x_0)|=\frac{1}{x_0^2}=M+1>M$$

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在$(0,1)$上是无界函数。

1.2.6 证明$f(x)=2x+\sin x$在$(-\infty,\infty)$内为严格递增函数。

证 这里要用到一个基本不等式：

$$|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|,\qquad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

理由见图1—8，在单位圆中$|\sin\alpha|=\overline{AC}$，

而且 $\overline{AC}<\overline{AB}<\overset{\frown}{AB}=|\alpha|$（只有α当=0时，$\sin\alpha=\alpha$）。

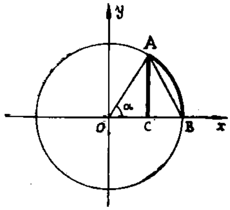

图1—8

任取x_1，$x_2\in(-\infty,\infty)$且设$x_1<x_2$。则

$$f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+(\sin x_2-\sin x_1)$$

$$=2(x_2-x_1)+2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

因为$\left|2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|$

$$\leqslant 2\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=x_2-x_1,$$

所以 $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)$

$$=x_2-x_1>0$$

即 $f(x)=2x-\sin x$在$(-\infty,\infty)$内为严格递增函数。

1.2.7 讨论狄利克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数时}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

的周期性与有界性。

解 (1)任何正有理数都是它的周期：任取有理数$r>0$，则

$$(x+r)\text{为}\begin{cases}\text{有理数}, & \text{当}x\text{为有理数时}\\ \text{无理数}, & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

于是

$$f(x+r)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数时}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

即$f(x+r)=f(x)$。 显然$f(x)$没有基本周期。

（2）任何无理数都不是它的周期·任取无理数$\alpha>0$，对于$x_0=-\alpha$这一无理数，$f(x_0)=0$；但$f(x_0+\alpha)=f(0)=1\neq f(x_0)$

注： 要证明α不是$f(x)$的周期，并不需要对一切$x\in(-\infty,\infty)$都能使得$f(x+\alpha)\neq f(x)$。

（3）对一切$x\in(-\infty,\infty)$，显然有$|f(x)|\leqslant 1$。所以$f(x)$是有界函数。

1.2.8 证明：函数$f(x)=\operatorname{tg}x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的，但在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的任一内闭区间上是有界的。

证（1）任给无论怎样大的正数$M>0$，只要取$x_0=\operatorname{arctg}(M+1)$，$-\frac{\pi}{2}<x_0<\frac{\pi}{2}$，就使得

$$|\operatorname{tg}x_0|=|\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(M+1)|=M+1>M。$$

所以$f(x)=\operatorname{tg}x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的。

（2）任取$[a,b]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。因$\operatorname{tg}x$在$[a,b]$上是单调递增的，所以$\operatorname{tg}a\leqslant\operatorname{tg}x\leqslant\operatorname{tg}b$。令$M=\max\{|\operatorname{tg}a|,|\operatorname{tg}b|\}$，则对一切$x\in[a,b]$均有$|\operatorname{tg}x|\leqslant M$，即$f(x)=\operatorname{tg}x$在$[a,b]$上是有界的。

1.2.9 求下列函数的周期：

（1） $y=\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$；