全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

线性代数
与空间解析几何
及其应用

陈东升 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学"十一五"规划课题研究成果

线性代数与空间解析几何及其应用

Xianxing Daishu yu Kongjian Jiexi Jihe jiqi Yingyong

陈东升　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”项目的研究成果。本书以矩阵和初等变换作为出发点，逐步展开行列式、平面与直线、线性方程组等概念的讨论。每一章都安排了一节应用数学软件解决实际问题的典型例子，将现代数学思想融入其中，以期提高学生解决实际问题的能力。附录中简要介绍了数学软件 MATLAB。本书条理清晰，论证严谨，内容翔实，应用性较强，书中例题丰富，配有适量习题供各层次的读者练习。

本书内容包括矩阵的运算及其初等变换、行列式与逆矩阵、几何向量、平面与直线、n 维向量与线性方程组、特征值与特征向量、二次型与二次曲面，可作为工科和其他非数学类专业的高校教学用书，也可供各大专院校或成人教育学院的学生作为教材使用，还可供报考研究生的考生、自学者和广大科技工作者等参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何及其应用/陈东升主编.
—北京：高等教育出版社，2010.6
ISBN 978-7-04-029456-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②空间几何：解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 067416 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 张申申
责任绘图 尹文军 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 杨雪莲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	煤炭工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2010 年 6 月第 1 版
印 张	19.75	**印 次**	2010 年 6 月第 1 次印刷
字 数	360 000	**定 价**	26.00 元

物料号 29456-00

主　编：陈东升

编　者：（以姓氏笔画为序）

马艳琴　叶　林　孙丽萍

辛向军　陈东升　黄守佳

谭瑞梅

前言

20世纪以来，由于科学技术的飞速发展，数学的应用范围急剧扩展，它不仅更广泛深入地应用于自然科学和工程技术中，而且已经渗透到诸如生命科学、经济与社会科学等领域。尤其是计算机的广泛使用和计算机软件的高速发展，引起了科学技术的定量化分析方法迅速发展，使得各门学科之间加速相互渗透，因此数学必须以新的内容、新的理论、新的方法来适应新的形势。

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类需求，探索和建立我国高校应用型人才培养体系，教育部全国高等学校教学研究中心在已经组织的“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”立项研究成果的基础上，以已经批准立项的全国教育科学“十一五”规划课题——“我国高校应用型人才培养模式研究”课题为载体，继续深入组织开展以应用型人才培养教学内容、课程体系与优质教学资源建设为主要内容的课题研究。本书是“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题——“工科类专业应用型人才培养线性代数课程教学内容改革研究”的成果。

线性代数是讨论有限维空间的理论课程，相关理论较为抽象，没有背景材料与实际应用的支持，会使学生对概念和对其基本思想的理解造成一定困难。如“矩阵的秩”和“向量组的秩”等概念是学生感到最抽象、最难理解同时又感到最没用的东西，而它们在解析几何中却有着广泛的应用，使得对几何问题的讨论变得简捷明了。我们知道，解析几何研究的是用代数方法解决几何问题，电影电视中引人入胜的动画制作，工程技术中正在日益推广的计算机辅助设计(CAD)、科学计算的可视化等，它们的基本数学工具都是解析几何与线性代数。所以二者的结合能激发学生学习的主动性，特别是借助数学软件求代数与几何结合的实际问题的解，学生兴趣盎然，使他们学习数学的潜能得到了充分的发挥。整合线性代数与空间解析几何，不仅可以借助几何直观使一些抽象的代数概念和理论变得比较容易接受，而且也可借助矩阵方法处理解析几何中一些原本比较困难的问题，例如直线问题、直线与平面间的位置关系、二次曲面或平面二次曲线的化简等问题。再者，整合后的课程在一年级开课，为后续课程的学习奠定了坚实的基础。

郑州轻工业学院“线性代数”课程体系的改革始于1998年，调整、更新、整合课程内容，增加了与社会发展紧密相连的实用性内容，并由点到面逐步展开“线

性代数与空间解析几何及其应用”课程的教学。课程体系的改革极大地提高了学生的动手能力和应用水平，我校学生在全国大学生数学建模竞赛中取得了全国二等奖、河南赛区一、二、三等奖数十项，也增强了毕业生竞争就业的实力和工作能力。线性代数与空间解析几何课程被评为河南省精品课程和网络课程。

本书每一章都安排了一节实际应用问题的数学软件求解，并编排了数学软件简介。使读者了解线性代数与空间解析几何在解决实际问题中的独特作用，特别是一些代数与几何结合的经典实例，有利于学生充分认识数学模型中代数与几何问题的相互依托作用。

本书以全国高校“线性代数与空间解析几何教学基本要求”为依据，以“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”为准则。在例题和习题的选配方面，适量加入了近几年的考研试题，以适应各层次学生的需求。

全书由郑州轻工业学院陈东升主编，郑州轻工业学院黄守佳、谭瑞梅参编了部分内容。青岛理工大学教务处副处长叶林对本书的编写给予了极大的关心和帮助，在百忙中为本书校稿，并提出了许多宝贵意见。郑州轻工业学院的孙丽萍、辛向军、黄河科技学院的马艳琴做了文字处理、编辑、校对等工作。对各位编委的辛勤工作表示诚挚的谢意。

教育部全国高等学校教学研究中心、高等教育出版社以及郑州轻工业学院教务处教材科、数学与信息科学系对本书的编写和出版给予了许多帮助和支持，在此深表感谢。

教材改革是一项艰巨而光荣的工作，由于经验不足，加之水平所限，书中缺点、错误在所难免，恳请广大读者、同行批评指正。

陈东升

2010 年 2 月

目录

第一章

矩阵的运算及其初等变换

矩阵是线性代数的主要研究对象，它在数学及其它学科领域有着广泛应用，许多实际问题可以用矩阵表达并利用矩阵的有关理论得到解决．矩阵的初等变换起源于解线性方程组．利用初等变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成形式简单的矩阵 $\boldsymbol{B}$，通过 $\boldsymbol{B}$ 讨论或解决与 $\boldsymbol{A}$ 相关的问题或某些性质是讨论矩阵问题的常用方法．

本章介绍矩阵的概念、矩阵的基本运算、分块矩阵的概念及运算、矩阵的初等变换等概念．

§1.1 矩阵的概念

一、矩阵的概念

在许多实际问题中，我们常会遇到矩形数表．

例 1 一家开办了 3 个炼油厂的公司，每个炼油厂生产 3 种石油产品：燃料油、柴油和汽油．设从 1 桶原油中第一炼油厂可以生产出 64 L 燃料油、32 L 柴油及 16 L 汽油；第二炼油厂可以生产出 32 L 燃料油、80 L 柴油及 40 L 汽油；第三炼油厂可以生产出 32 L 燃料油、32 L 柴油及 80 L 汽油．这些数据可以用下面的矩形数表表示：

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc}\text{第一炼油厂} & \text{第二炼油厂} & \text{第三炼油厂}\end{array} \\
\boldsymbol{A}= & \left(\begin{array}{ccc} 64 & 32 & 32 \\ 32 & 80 & 32 \\ 16 & 40 & 80 \end{array}\right)\begin{array}{l}\text{燃料油}\\ \text{柴油}\\ \text{汽油}\end{array}
\end{array}$$

$\boldsymbol{A}$ 的每一列是一个炼油厂生产的三种产品数量，$\boldsymbol{A}$ 的每一行是三个炼油厂生产某一种产品的数量．像这样由 3×3 个数构成的数表，称为矩阵．

定义 1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数，又称为矩阵的**元**.

矩阵常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 或者 $(a_{ij}),(b_{ij}),(c_{ij}),\cdots$ 表示. 若需指明矩阵的行数或列数，常写为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，这里下标 i 指明行序数，下标 j 指明列序数.

元是实数的矩阵称为**实矩阵**，元是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书的矩阵除特别说明外，都指实矩阵.

如果 $m=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶**方阵**，n 阶矩阵也记为 $\boldsymbol{A}_n$. 只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\cdots\ a_n)$称为**行矩阵**. 为避免元间的混淆，行矩阵也记作 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**.

两个行数相等、列数相等的矩阵称为**同型矩阵**. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，并且它们的对应元相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

只有一个元 a 的矩阵称为一阶矩阵，记作(a)，所有元都为数 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{0}$. 注意不同型的零矩阵是不同的.

n 阶方阵

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

叫做 n 阶**单位矩阵**，简记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$，这个方阵的特点是：从左上角到右下角的直线（叫做**主对角线**）上的元为 1，其余元都是 0，即

$$\boldsymbol{E}=(\delta_{ij}),$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, i=j, \\ 0, i\neq j \end{cases}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

例 2 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{cases}
\tag{1-1}
$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的**线性变换**，其中 a_{ij} 是常数，线性变换(1-1)的系数构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

给定了线性变换(1-1)，它的系数所构成的矩阵也就确定. 反之，如果给出一个矩阵作为线性变换的矩阵，则线性变换也就确定. 从这个意义上来说，线性变换和矩阵之间存在着一一对应关系.

例 3 含有 n 个未知量 m 个方程的线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\tag{1-2}
$$

的系数也可构成一个 $m\times n$ 矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},
$$

称为方程组(1-2)的**系数矩阵**，它的常数项可以表示为一个 $m\times 1$ 的列矩阵

$$
\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.
$$

线性方程组(1-2)的系数矩阵与常数项一起可以表示成一个 $m\times(n+1)$ 的矩阵

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},
$$

称为方程组(1-2)的**增广矩阵**.

线性方程组(1-2)的未知量可以表示成一个列矩阵

$$
\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
$$

二、几种特殊的矩阵

特殊矩阵除了我们前面提到的行(列)矩阵、零矩阵、单位矩阵外,以下几种也是我们经常用到的.

主对角线以外的元全为零的方阵称为**对角方阵**,简称**对角矩阵**,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

常简记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 例如

$$\mathrm{diag}(3,-1,0)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶对角矩阵,而单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 就是一特殊的对角矩阵. n 阶对角矩阵有时也记为

$$\boldsymbol{\Lambda}_n=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

在对角矩阵中,若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$,则称其为**数量矩阵**,即方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

为数量矩阵.

主对角线下(上)方的元全为零的方阵称为**上(下)三角形矩阵**,即方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

分别称为上三角形矩阵和下三角形矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足以下条件:

1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 有零行(元素全为零的行),那么零行位于最下方;

2. 非零行的**非零首元**(自左至右第一个不为零的元)的列标随行的递增而递增,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行阶梯形矩阵**. 这时称 $\boldsymbol{A}$ 中非零行的行数为 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯数,即如下

形状的矩阵称为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} *_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & *_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & *_i & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & *_r & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & \end{pmatrix},$$

其中空白处的元全为零，$*_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$表示该行中第一个不为零的元(非零首元)，每行的非零首元必在前一行非零首元的右下方.

比如$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$都是行阶梯形矩阵，而$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$不是行阶梯形矩阵.

如果行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还满足条件：

1. 各非零首元全为 1；
2. 非零首元所在列的其余元全为 0，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行简化阶梯形矩阵(行最简形矩阵)**.

如$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$就是行简化阶梯形矩阵.

习题 1.1

1. 图 1 - 1 表示了 B 省的 3 个城市 B_1, B_2, B_3 与 C 省的 3 个城市 C_1, C_2, C_3 的交通连接图，称为一个交通网络. 每条线上的数字表示此通路上不同的运路(公路，铁路，水路，空路)数目. 若以 a_{ij} $(i,j=1,2,3)$表示从 B_i 到 C_j 的运路数，试写出矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

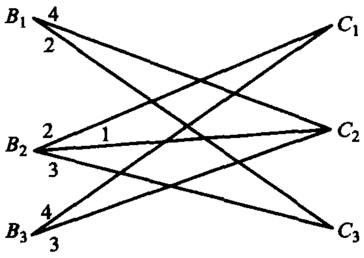

图 1 - 1

2. 当$\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$时，$x,y,z,u$各取何值？

3. 写出既是上三角形矩阵又是下三角形行矩阵的 n 阶矩阵的一般形式.

4. 下列矩阵哪些是行阶梯形矩阵，哪些不是？

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 下列矩阵哪些是行简化阶梯形矩阵，哪些不是？

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. 写出线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=b$ 的系数矩阵和增广矩阵，增广矩阵的行和列是多少？它是不是行阶梯形矩阵？是不是行简化阶梯形矩阵？

§1.2 矩阵的运算

一、矩阵的加法

定义 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，其对应元相加所得到的矩阵 $\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

注意，只有同型矩阵才能进行加法运算. 如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=(1,2)$不能相加.

定义 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作$-\boldsymbol{A}$.

用矩阵的加法及负矩阵的概念，可以定义矩阵的减法：减去一个矩阵等于加上这个矩阵的负矩阵，即若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

由定义不难验证矩阵的加法满足下面的运算律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵）：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ （加法交换律）；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ （加法结合律）；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{0}$ 是与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.