21世纪高等院校信息与通信工程规划教材

21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

信号与系统

翁剑枫 主编
徐鸿鹄 主审

Signal and System

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

精品系列

21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

信号与系统

翁剑枫 主编
徐鸿鹄 主审

Signal and System

人民邮电出版社
北京

精品系列

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统 / 翁剑枫主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2010.8
21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
ISBN 978-7-115-22844-4

Ⅰ. ①信… Ⅱ. ①翁… Ⅲ. ①信号系统－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第130645号

内 容 提 要

本书讲述确定性信号通过连续时间线性时不变系统的基本概念和基本分析方法。全书由5章组成，内容包括信号与系统的基本概念、信号通过系统的时域分析、信号通过系统的频域分析、重要应用论题、信号通过系统的复频域分析。各章后均配置了适量的习题以供读者进一步学习和练习。此外，为适应不同的教学需要，还以附录形式给出了离散时间信号与系统的基本知识和系统的状态变量分析，供选用。

本书可作为普通高校尤其是应用型本科高校电子信息类相关专业“信号与系统”课程教材，也可供相关专业的科技人员参考。

21世纪高等院校信息与通信工程规划教材

信号与系统

◆ 主　　编　翁剑枫
　主　　审　徐鸿鹄
　责任编辑　蒋　亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：13　　　　　2010年8月第1版
　字数：312千字　　　2010年8月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-22844-4

定价：24.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

信号与系统现已成为一个极为普遍的概念，和信号与系统概念有关的思想和方法已经渗透到科学技术的各个领域，甚至渗透到社会科学的许多领域。“信号与系统”是电子信息类专业的一门重要技术基础课，是学生知识结构中的重要组成部分。通过本课程的学习，学生将能掌握信号和线性系统分析的基本理论、基本原理和方法，从而为后续课程如数字信号处理、通信原理等课程的学习以及日后工作打下基础。

始于20世纪70年代末的信号与系统分析已经有了很长的历史，但其基本方法和基本原理没有发生变化，就本科生而言，信号与系统的教学内容是相对稳定的。但是，国内外有影响力的《信号与系统》教材，都是以重点大学的本科生为教学对象的。随着高等教育的大众化，在不少普通高等院校尤其是培养高等工程应用型人才的高校中，信号与系统只是一学期的课程，而且学时还不多。这样，直接选用上述教材就显得不尽适合，教材内容会明显感到偏多、偏深、偏广，为教和学双方都带来了一定的困难。

此外，“信号与系统”课程既有着很强的数学味道，又具有很强的工程应用背景，因此，为了适应高等教育大众化的趋势，使普通高校尤其是应用型本科高校电子信息类专业的学生能够真正学到最为有用的知识，编撰一本与之相适应的《信号与系统》教材就非常必要了。本书是作者多年教学经验的总结，它以高等工程应用型本科学生为教学对象；对教学内容进行了精心的整合，讲述了确定性信号通过连续时间线性时不变系统的基本概念和基本分析方法。书中突出了最重要的内容，去除了难度较大的内容，注重了理论与应用的结合。

与通常教材相比，本书单独设置了“重要应用论题”这一章。其内容除采样与重建、不失真传输、理想低通滤波器等外，还安排了两个精选的综合性应用实例，以说明如何将基本理论应用于工程问题。其一是分析了调幅信号通过带通谐振系统所产生的失真，由此指出了调幅制式的固有缺陷，以使学生从中领悟到基本理论在技术发展进程中所起的作用；其二是在对二进制比特流的信号表达进行说明的基础上，对其通过基带低通系统时产生的码间干扰问题从采样与重建以及不失真传输的角度进行了分析，以使学生尽早尝试从信号通过系统的观点出发分析工程应用中的复杂问题，并接触理解码间干扰这一后续课程中极为重要而又比较难以把握的概念。

对于离散时间信号和系统的基本知识，本书从对信号进行数字处理的角度出发引入了相关概念和内容，涉及内容较一般《信号与系统》教材略广，因此单独分离出来放入附录，

以便不同学校根据其教学安排作取舍。对于状态变量分析，本书也以附录方式给出了 LTI 系统的状态变量分析方法，以满足学生的研究生入学考试所需。这两部分附录内容可视专业需求、学时安排及后续课程设置情况进行取舍，精讲、选讲或不讲均可。

本书可作为普通高校尤其是应用型本科高校电子信息类相关专业“信号与系统”课程教材，也可供相关专业的科技人员参考。

本书由翁剑枫主编，徐鸿鹄主审。郑卫红配置第 3 章至第 5 章的习题。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥或疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编者

2010 年 7 月

目　录

第 1 章　信号与系统的基本概念 ……1
1.1　引言 ……1
1.2　信号的描述与分类 ……2
1.2.1　信号定义 ……2
1.2.2　信号分类 ……2
1.2.3　信号特性描述 ……6
1.2.4　3 种基本信号 ……6
1.3　$\delta(t)$的进一步讨论 ……9
1.3.1　分配函数的概念 ……9
1.3.2　$\delta(t)$的性质 ……10
1.3.3　周期冲激信号 ……11
1.4　系统 ……12
1.4.1　引言 ……12
1.4.2　系统的定义 ……13
1.4.3　LTI 系统 ……14
1.4.4　LTI 系统的响应 ……16
本章小结 ……18
习题 1 ……19
第 2 章　信号通过 LTI 系统的时域分析 ……22
2.1　引言 ……22
2.2　信号的时域分解 ……22
2.2.1　时域分解表达式及其物理意义 ……22
2.2.2　信号时域分解的进一步考察 ……23
2.3　信号通过 LTI 系统的时域分析与卷积积分 ……23
2.3.1　分析 ……23
2.3.2　单位冲激响应 $h(t)$的再讨论 ……25
2.3.3　因果性、稳定性 ……26
2.4　卷积的计算 ……28
2.4.1　卷积的计算步骤 ……28
2.4.2　例 ……30
2.4.3　单位阶跃响应 ……32
2.4.4　卷积的性质 ……34
本章小结 ……36
习题 2 ……37
第 3 章　信号通过 LTI 系统的频域分析 ……40
3.1　引言 ……40
3.2　周期信号的频域分解——傅里叶级数 ……41
3.2.1　三角函数的形式 ……41
3.2.2　复指数函数的形式 ……43
3.2.3　吉伯斯振荡简介 ……44
3.3　复正弦信号通过 LTI 系统 ……47
3.3.1　频率特性概念的引入 ……47
3.3.2　$H(j\omega)$的对称性 ……48
3.3.3　频率特性的另一名称——正弦稳态响应 ……49
3.4　信号频谱、带宽与系统带宽的概念 ……51
3.4.1　信号频谱与信号带宽 ……51
3.4.2　系统带宽 ……52
3.5　周期信号通过 LTI 的频域分析 ……53
3.6　非周期信号的频域分解 ……54
3.6.1　引言 ……54
3.6.2　信号的傅里叶变换与傅里叶反变换 ……54
3.6.3　非周期信号通过 LTI 系统的频域分析 ……56
3.7　重要的例和傅里叶变换的性质 ……57
3.7.1　典型信号的傅里叶变换 ……57
3.7.2　傅里叶变换的重要性质 ……60
3.7.3　进一步的例 ……65
3.7.4　卷积定理与帕斯瓦尔等式 ……69
3.7.5　傅里叶变换性质列表 ……71
本章小结 ……72
习题 3 ……73

第 4 章 重要应用论题 ······78
4.1 不失真传输 ······78
4.1.1 引言 ······78
4.1.2 幅度失真与相位失真 ······78
4.1.3 不失真传输条件 ······80
4.2 综合性的例——正弦调幅信号作用于二阶谐振电路 ······82
4.2.1 二阶谐振回路的频率特性 ······82
4.2.2 正弦调幅信号作用于系统 ······84
4.3 采样与重建 ······87
4.3.1 引言 ······87
4.3.2 信号的理想采样 ······87
4.3.3 信号的重建 ······89
4.3.4 实际采样简介 ······91
4.4 综合性的例——数字基带传输中的码间干扰 ······94
4.4.1 码间干扰的来源 ······94
4.4.2 码间干扰的消除 ······96
本章小结 ······98
习题 4 ······98
第 5 章 拉普拉斯变换与系统函数 ······101
5.1 引 言 ······101
5.2 拉普拉斯变换 ······101
5.2.1 概念的引入 ······101
5.2.2 双边拉普拉斯变换 ······102
5.2.3 拉普拉斯反变换 ······104
5.3 拉普拉斯变换的进一步讨论 ······105
5.3.1 定义与说明 ······105
5.3.2 反变换 ······106
5.3.3 两类重要函数 ······108
5.3.4 单边拉普拉斯变换的主要性质 ······109
5.3.5 卷积定理 ······114
5.4 单边拉普拉斯变换用于线性系统分析 ······116
5.4.1 引言 ······116
5.4.2 拉普拉斯变换求解线性微分方程 ······117
5.4.3 系统函数的概念 ······119
5.4.4 电路的 S 域模型 ······120
5.5 系统函数 ······124
5.5.1 系统函数的代数结构与零极点 ······124
5.5.2 极点分析 ······125
5.5.3 其他相关问题简述 ······128
5.6 模拟滤波器设计简介 ······130
5.6.1 引言 ······130
5.6.2 指标给定 ······131
5.6.3 滤波器系统函数的求取 ······132
5.6.4 滤波器的巴特沃思逼近设计 ······134
本章小结 ······136
习题 5 ······137
附录 A 离散时间信号与系统的基本知识 ······140
A1 引言 ······140
A2 离散时间信号与系统基本概念 ······140
A2.1 离散时间信号与数字信号 ······140
A2.2 几个重要的数字信号 ······141
A2.3 离散时间系统及重要性质 ······144
A2.4 LSI 系统的时域分析：单位采样响应与卷积和 ······145
A2.5 差分方程表示的 LSI 系统 ······146
A3 傅里叶分析 ······147
A3.1 离散时间傅里叶变换与反变换 ······147
A3.2 系统频率特性 ······148
A3.3 信号通过 LTI 系统的频域分析 ······148
A4 Z 变换与系统函数 ······149
A4.1 Z 变换 ······149
A4.2 Z 变换的重要性质及常用序列的 Z 变换 ······149
A4.3 反变换 ······151
A4.4 变换 $e^{-sT} \to z^{-1}$ 下的 S 平面与 Z 平面关系 ······152
A5 系统函数与系统结构 ······153
A5.1 引言 ······153

A5.2 系统函数的定义 153
A5.3 $H(z)$用于 LSI 系统性质与行为描述 154
A5.4 数字滤波器 155
A5.5 系统结构与有限字长问题概述 156
A6 离散傅里叶变换 157
A6.1 引言 157
A6.2 离散傅里叶变换的定义 157
A6.3 DFT 的应用：频谱分析 159
A6.4 DFT 的应用：FIR 滤波器的频率采样结构 159
A6.5 DFT 的应用：快速卷积 160
A7 结束语 161
附录 B 系统的状态变量分析 162
B1 引言 162
B2 系统状态与状态变量 162
B3 系统的状态方程与输出方程 164
B4 从系统函数的结构出发列写系统方程 167
B5 LTI 系统的状态转移矩阵 170
B5.1 状态转移矩阵概念的引入 170
B5.2 状态转移矩阵 e^{At} 的重要性质 172
B5.3 状态转移矩阵 e^{At} 的求取 173
B6 LTI 系统状态方程与输出方程的求解 174
B6.1 状态方程的求解 174
B6.2 输出方程的求解 175
B6.3 用状态变量分析法求解电路问题 175
B7 结束语 177
附录 C “信号与系统”模拟测试题及解答 178
“信号与系统”模拟试卷（一） 178
“信号与系统”模拟试卷（一）解答 180
“信号与系统”模拟试卷（二） 184
“信号与系统”模拟试卷（二）解答 186
“信号与系统”模拟试卷（三） 190
“信号与系统”模拟试卷（三）解答 192
参考文献 198

第 1 章 信号与系统的基本概念

1.1 引言

本书讲述的是信号通过系统的基本概念、理论和分析方法。

“信号”这个名词在日常生活中经常用到，通常用于提示某种信息。更科学地说，“信号”是用于携带信息的某种载体，这些载体可以是文字或语言，也可以是某种物理表示形式，如传递消息或命令的灯光、声音、动作等。春秋时代“烽火戏诸侯”故事中点燃的烽火台上的火焰就是用于传输异族入侵这个信息的信号。因此，从一般的意义上说，信号就是用于携带、表达信息的物理方式。

在本书中，信息的物理表达和携带方式是电信号。为了表达不同的信息，这些电信号显然应该具有不同的波形。以下的例子可以对此作一说明。

随着大规模集成电路技术的发展，数字传输技术现在已经在绝大多数应用场合下替代了模拟传输。这时，所要传输的信息以二进制比特流的形式出现，例如，通过计算机键盘输入的各种符号在用 6 位 ASCII 进行变换时，每个键盘符号都被变换为一个 6 比特字符。以字母“W”为例，它将被变换为“111010”。但是，这个 6 比特字符仅仅是个抽象的表达形式，还需要使用某种物理实体来携带这 6 个二进制数字才能够在计算机内外进行传输。图 1-1 所示为 6 比特字符的两种最直接的电波形信号，其中 T 是每个二进制数字“0”、“1”的占时长度。两种电波形信号的相同之处是它们都用幅度“A”表示“1”，不同之处是分别用幅度“$-A$”和幅度“0”来表示“0”。显然，如果把图中表示“0”、“1”的方法反一下，也同样可以表达这个 6 比特字符串“111010”。实际上，如果用两种可以区分的并且占时长度都为 T 的任意波形来分别表示二进制数字“1”和“0”，也同样能够表达这个二进制字符串。

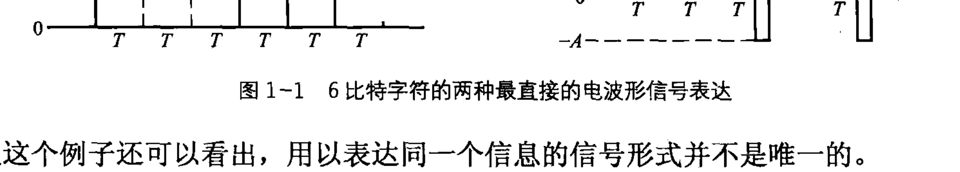

图 1-1　6 比特字符的两种最直接的电波形信号表达

从这个例子还可以看出，用以表达同一个信息的信号形式并不是唯一的。

虽然图 1-1 所示的电波形信号能够表达出“111010”这个字符，携带了这个字符的信息，

但是，这两个信号在从“0”变到“1”或从“1”变到“0”时都发生了突变，而从物理上说，要使一个电信号产生变化率为无穷大的变化是不可能的，其原因为：信号的变化总是需要能量的变化，而能量是不能在瞬刻间发生突变的。因此，根据以上的认识，可以推断出图 1-1 中的两个信号波形都只是理想的波形形式，在实际传输时是不能够使用的。

为了把图 1-1 中的理想波形形式变换为真正能够用于实际传输的电波形信号，就需要对理想的电波形信号进行一定的操作处理，而这就需要使用“系统”。

从数学上说，系统是对给定的输入信号所进行的一定操作，其作用是使系统输出的信号改变其波形形式；从物理上说，系统就是使信号产生上述变化的装置。对电信号而言，这个装置可能是一个简单的电路，也可能非常复杂。实际上，信息在采集、加工、处理、传输、存储各个环节中都会涉及信号或者被动或者有意经过某些装置的问题。对于这些装置，如果从对信号施加影响的角度进行理论抽象，所得到的理论模型就是“系统”。

本章的下面几节中将对信号、系统这两个概念进行展开描述，以便为随后要进行的信号通过系统的分析作好准备。

1.2 信号的描述与分类

1.2.1 信号定义

从广义而言，信号指某个或某些物理量以时间或空间位置为自变量的函数。例如，扬声器音圈电流是时间的函数，天线阵所接收到的电磁辐射强度随时间和天线阵元的位置而变，电冰箱内的温度场随测量点的空间位置和时间而变等。本书只涉及一维信号的情况，上述例子中的后两种不会遇到。同时，不失一般性，自变量也认定为时间，用 t 表示。因此，信号可以用 $x(t)$表示，绘出 $x(t)$的图像就得到了信号的波形。

还要约定的是，本书中信号 $x(t)$通常理解为是电量（电流、电压）随时间而变化的函数，函数随时间的变化则反映了信号携带的信息。此外，为便于讨论，本书中函数与信号这两个名词不加区分。

1.2.2 信号分类

信号的分类随分类规则不同而不同。

1．连续时间信号与离散时间信号

如果信号 $x(t)$除了可数个不连续点外，对于任何 t 都有意义，则称之为连续时间信号。如果 $x(t)$仅对 t 的离散时间点有定义，称之为离散时间信号。工程中，离散时间信号通常是对连续时间信号 $x(t)$进行采样得到的，在大多数应用情况下，这些离散时间点之间具有等间隔。

连续时间信号与离散时间信号简称连续信号和离散信号。本书中主要考察连续时间信号，离散时间信号的简单介绍在附录 A 中给出。

图 1-2 所示为连续信号和离散信号的两个例子，其中图（a）、（b）为连续时间信号，图（c）、（d）为离散时间信号。

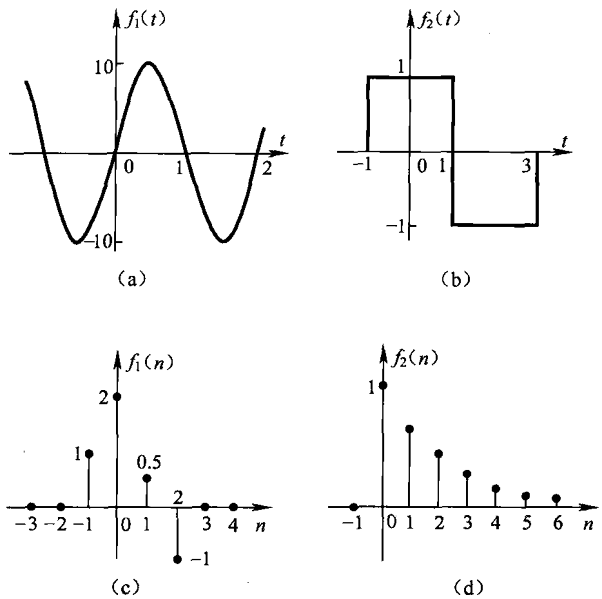

图 1-2 信号的图形表示

再举一个常见信号的例子。这个信号称为单位阶跃信号，以后常会见到

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

对于这个信号，在自变量 t=0 处，信号不连续，也即 t=0 是信号的间断点。但根据定义，它仍然是个连续时间信号。

2．模拟信号与数字信号

实际应用中，连续时间信号与模拟信号这两个名词往往不加以区分，本书也遵循此惯例。

对于数字信号而言，不同领域内有不同的理解。例如，在通信领域内，把幅值只能取为有限个不同值的连续时间信号也称为数字信号，如图 1-1 中的两个信号在通信领域中也称为数字信号。但在本书中，这两个信号将作为模拟信号看待，而把时间上离散、幅度上仅能取有限个不同值的信号称为数字信号，如图 1-2（c）、（d）所示。

例：平顶采样信号。

为了利用数字技术对信号进行处理和传输，必须首先对连续的模拟信号按一定的时间间隔进行采样，然后再对其进行量化，得到二进制数字序列。通常使用的实际采样有两种，一种是采用由时序控制的模拟开关来完成，另一种是用时序控制的采样保持器来完成。图 1-3 所示为用采样保持器对模拟信号进行采样而得到采样信号的示意图，这样得到的采样信号称为平顶采样信号。图中，原始模拟信号每 T 秒进行一次采样，采样后，信号成为采样信号。由图 1-3 可见，平顶采样信号的特点是，在下一个采样时刻之前，信号值保持为当前采样时刻所得到的数值不变。

尽管在采样瞬间信号值发生了突变，并且在两个采样时刻之间信号值不变，但平顶采样信号显然仍然是连续时间信号即模拟信号。

3．确定性信号与随机信号

如果除了不连续点外，信号 $x(t)$对于任何给定的时刻值都有确定的数值，信号 $x(t)$就称为确定性信号。

随机信号是指在任意给定时刻其值不确定的信号。例如，用示波器的交流输入端口观察直流稳压电源的输出电压，可以观察到电压中存在着幅度上下起伏变化的随机电噪声。这里观察到的电噪声就是随机信号，这个随机信号叠加在电源输出的稳定直流电压之上。实际上，在信号传输过程中，总会存在着由于噪声引入的不确定性。

严格地说，实际应用中有用的信号都是随机信号，因为只有具有不确定性的信号才能够带有新信息。例如，电视中一些重复播放的广告，即使它们一开始能够给人以启迪和一定的美的感受，但多数收看者最终会因为视觉疲劳、没有新意而在出现此类广告时就会感到厌烦而切换频道。

研究随机信号要用概率、统计的观点和方法，这已经超出了本书的范围。但是，随机信号通过系统的分析是以确定性信号通过系统的分析为基础的，而在进行信号操作处理时，对系统的要求也可在很大程度上借助对确定性信号通过系统的研究得到了解，因此，掌握确定性信号通过系统的分析是基础，也更为重要。

4．周期信号与非周期信号

对于连续时间信号 $x(t)$，如果存在正数 T，使得对所有 $t\in(-\infty,\infty)$，有

$$x(t+T)=x(t) \tag{1-1}$$

则称 $x(t)$为周期信号。图 1-4 所示为周期信号的示意图。

式（1-1）也可以写成

$$x(t+n\cdot T_0)=x(t) \qquad n=0,\pm1,\pm2\cdots \tag{1-2}$$

其中，T_0 为满足式（1-1）的最小正数，称其为 $x(t)$的周期。

不能满足式（1-1）的连续时间信号称为非周期信号。

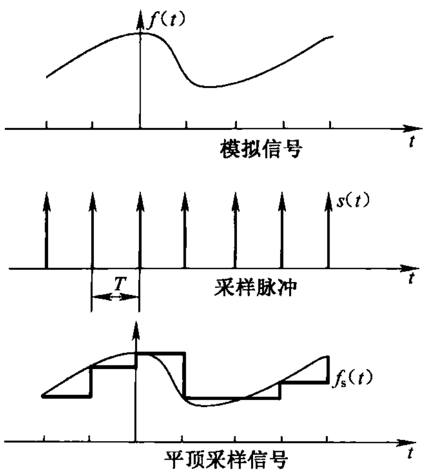

图 1-3 模拟信号的采样及平顶采样数据信号

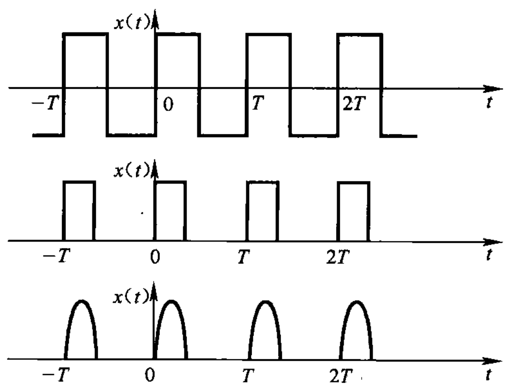

图 1-4 周期信号

给定任何连续时间信号 $x(t)$，用以下方法总可以构成一周期信号 $\tilde{x}(t)$，即

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t+nT) \tag{1-3}$$

其中，n 是整数，T 是正数。不难验证，对于 $\tilde{x}(t)$ 一定有 $\tilde{x}(t)=\tilde{x}(t+T)$，因此是个周期信号，周期为 T。式（1-3）所示的构成周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的方式称为对信号 $x(t)$进行周期延拓。

【例 1-1】 对信号 $x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ 进行周期延拓，求出相应的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 在[0，T]内的表达式。式中，$\varepsilon(t)$是单位阶跃信号。

解 根据式（1-3），有

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t+nT)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(t+nT)}\varepsilon(t+nT)$$

根据单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的定义，在 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，$\varepsilon(t+nT)$ 当 $n\geqslant 0$ 时等于 1，否则等于 0，因此 $\tilde{x}(t)$ 在[0，T]内的表达式为

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-nT}=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{1-\mathrm{e}^{-T}}\qquad(0\leqslant t\leqslant T)$$

在知道[0，T]内的表达式后，该周期信号的波形即可画出。

5. 能量信号与功率信号

能量信号和功率信号是能量有限信号和功率有限信号的简称。

如何定义信号能量？我们从一个最简单的电路来说明。设 1Ω电阻器两端的电压为 $v(t)$，则电阻中流过的电流为 $i(t)$，在数值上等于 $v(t)$，从而由电路知识不难得到，$v(t)$提供的瞬时功率 $p(t)$为

$$p(t)=\left.\frac{v(t)i(t)}{R}\right|_{R=1\Omega}=i^2(t)\quad 或\quad p(t)=\left.\frac{v(t)i(t)}{R}\right|_{R=1\Omega}=v^2(t)$$

因此，通常以 $x^2(t)$来定义信号 $x(t)$的功率。

由 $v(t)$提供的消耗在 1Ω电阻器上的总能量 E 和平均功率 P 为

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}v^2(t)\mathrm{d}t\ (\mathrm{J}),\quad P=\lim_{T\to+\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}v^2(t)\mathrm{d}t\ (\mathrm{W})$$

后一个式子中，t_0 可以为任意值，T 为正数。

在得到了信号的总能量E和平均功率P的表达式后，即可对能量信号和功率信号作出定义。

定义：对于任意一个连续时间信号 $x(t)$，如果 $x(t)$是平方可积的，也即其能量 E 满足

$$0<E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty \tag{1-4}$$

则称 $x(t)$为能量有限信号，简称能量信号，文献中通常称 $x(t)$是个平方可积信号。这类信号是工程中最为常见的信号。

如果 $x(t)$的能量不是有限的，即式（1-4）不能满足，但其平均功率 P 满足

$$0<P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty \tag{1-5}$$

则称 $x(t)$为功率有限信号，简称功率信号。

显然，周期信号的能量不是有限的，但在每一周期内的能量是有限的，因此是个功率信号，且其平均功率只需要通过一个周期来计算。

【例 1-2】 证明：如果 $x(t)$是周期为 T_0 的周期信号，则 $x(t)$的归一化平均功率与任意时间间隔 T_0 内的 $x(t)$的平均功率是相同的，即

$$P=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

证明 由定义

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

设 T 是基本周期 T_0 的整数倍，即 $T=kT_0$，则 $x(t)$在间隔 T 内的总归一化能量是一个基本周期内归一化能量的 k 倍，即

$$P=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{kT_0}k\int_0^{T_0}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

1.2.3 信号特性描述

描述信号特性的最基本方法有下面两种。

（1）时域——时间函数形式 $x(t)$，包含了信号含有的全部信息。

（2）频域——信号携带的信息反映在其变化中，如果将信号的变化用变化率来描述，虽然直观上容易理解，但在分析信号通过系统时，除了一些简单的情况外，很难与系统的特性描述建立起显式联系。因此，工程上广泛采用了频域描述的方法，将信号分解为正弦波的线性组合。了解了这个线性组合中不同频率的正弦波所占的比重及其相对时间关系，也就知道了信号的特性。这就是有名的傅里叶（Fourier）分析。

另外，还有其他的信号特性描述方法，但以上两种方法是最为基本的。

1.2.4 3 种基本信号

把复杂的问题分解为简单问题是处理工程实际问题的原则，信号分析也是如此。将信号分解为基本信号的线性组合后，只要掌握了这些基本信号通过系统的分析，就可以了解复杂信号通过系统的情况。以下对本书中所使用的 3 种基本信号形式进行展开说明。

1. 单位冲激信号δ(t)

单位冲激信号δ(t)是一种数学抽象，用于表示物理世界中持续时间非常短、幅度非常大，但累积效果有限也即强度有限的冲量信号。文献中又常称其为狄拉克函数（δ函数）。

从应用角度出发，δ(t)可以用下面两个表达式来表示其性质

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases},\qquad (1\text{-}6)$$

$$\int_a^b\delta(t)\mathrm{d}t=1\begin{pmatrix}a<0\\ b>0\end{pmatrix}$$

$$\text{或} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \qquad (1\text{-}7)$$

式（1-6）反映了$\delta(t)$的冲量持续时间非常短而幅度非常大的特征，式（1-7）则反映了$\delta(t)$强度有限的特征。由于定义中将信号的强度也即信号的面积进行了归一化，故称为单位冲激信号。由于这种定义方式中出现了函数的取值为无穷大的情况，因此，严格地说已经不符合函数的常规定义。稍后将会从广义函数的角度对$\delta(t)$给出定义，不过，只要把式（1-6）所表示的幅度情况与式（1-7）所表示的信号强度有限这两点结合起来理解，这种定义方式仍可适用于绝大多数场合。

从本质上来说，$\delta(t)$所反映的是一个极限过程。图 1-5 所示为一个单位面积的矩形脉冲在存在时间逐渐减小到 0，但同时增大幅度以维持面积不变的极限过程。这个极限过程的数学抽象就是$\delta(t)$。因此，式（1-6）中的$t \neq 0$时$\delta(t)=0$，以及$t = 0$时$\delta(t) = \infty$都应视为极限。

注意：由于$\delta(t)$反映的是一个极限过程，因此$\delta(t)$跟这个极限过程中所涉及的具体信号波形形状无关。例如，如果把图 1-5 中所示的矩形脉冲换成一个等腰三角形脉冲，也可得到相同的结果。

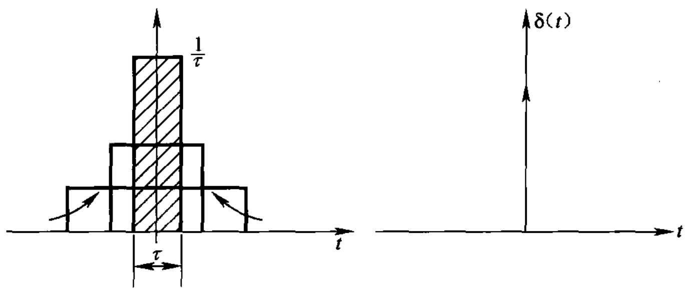

图 1-5 矩形脉冲演变成$\delta(t)$

下例可以进一步说明$\delta(t)$的意义。

【例 1-3】 信号$x(t) = \dfrac{\sin kt}{\pi t}$在$k>0$且$k \to +\infty$时也是$\delta(t)$信号。

证明 如图 1-6 所示，信号$x(t) = \dfrac{\sin kt}{\pi t}$与图 1-5 中所示矩形波形完全不同，并不局限在一个有限的时间区间内，但因为

$$\frac{\sin(kt)}{\pi t} \xrightarrow[t\to 0]{k\to\infty,\, k>0} +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{\pi t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1 \qquad k > 0$$

所以$x(t) = \dfrac{\sin kt}{\pi t}$在$k>0$且$k \to +\infty$时，也得到了$\delta(t)$，即有

$$x(t) = \frac{\sin(kt)}{\pi t} = \frac{k}{\pi}\frac{\sin(kt)}{kt} \quad \xrightarrow[k>0]{k\to\infty} \quad \delta(t)$$

对于这个信号，就必须从极限角度出发，才能理解式（1-6）中的$t \neq 0$时$\delta(t) = 0$。

2．单位阶跃信号$\varepsilon(t)$

单位阶跃信号$\varepsilon(t)$在前面的例子中已经引入，其表达式为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{1-8}$$

其中，$t=0$时的$\varepsilon(t)$数值没有给出定义，但按照惯例，在$t=0$处，可取其左右极限的平均值，也即取$\varepsilon(t)|_{t=0}=\dfrac{\varepsilon(0_+)+\varepsilon(0_-)}{2}=\dfrac{1}{2}$。

$\varepsilon(t)$的另外一种定义方式为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{1-9}$$

由于可数个间断点处的情况不会影响到函数的基本性质，在实际应用中，上面两种定义方式都可使用。

【例 1-4】 对$\varepsilon(t)$右移或左移 t_0 时刻的时间函数表达式及波形。

解 把信号在时间轴上右移 t_0 时刻，就是使信号延迟 t_0 时间单位。右移 t_0 后，信号波形如图 1-7 所示，因此，可以写为$\varepsilon(t-t_0)$，从而有

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases} \tag{1-10}$$

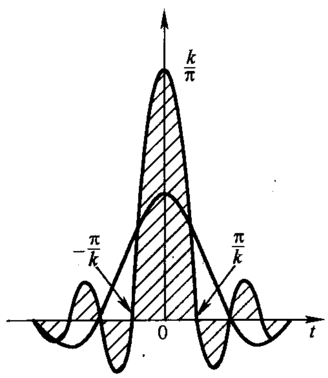

图 1-6 $x(t)=\dfrac{\sin kt}{\pi t}$ 演变成$\delta(t)$

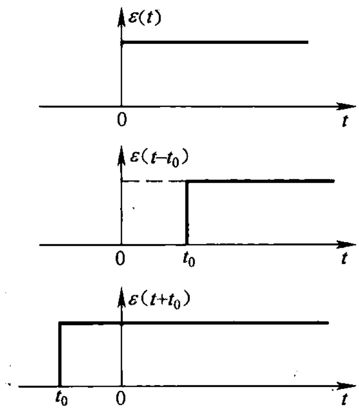

图 1-7 $\varepsilon(t)$、$\varepsilon(t-t_0)$、$\varepsilon(t+t_0)$的波形

类似可以得到$\varepsilon(t)$左移 t_0 后的信号 $\varepsilon(t+t_0)$。

【例 1-5】 用$\varepsilon(t-t_0)$和$\varepsilon(t+t_0)$表达图 1-5 中的矩形脉冲。

解 根据上例，当矩形脉冲 $p(t)$ 的幅度等于$\dfrac{1}{\tau}$，时宽等于τ，且关于$t=0$对称时，显然有

$$p(t)=\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

3. 复正弦信号

正弦信号早已为大家所熟识，其表达式为

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad t \in (-\infty, +\infty) \tag{1-11}$$

或

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{1-12}$$

式中，A 为振幅，ω为角频率，φ为初相。

三角函数形式的正弦信号在数学运算上很不方便，因此，在信号与系统分析中常使用复指数形式的正弦信号 $f(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$，简称为复正弦信号。

复正弦信号与三角函数形式的实正弦信号通过欧拉公式相联系，即

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} &= \cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} &= \cos(\omega t) - \mathrm{j}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{1-13}$$

反过来有

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \varphi) &= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right) \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right) \end{aligned} \tag{1-14}$$

式（1-13）和式（1-14）是今后经常要用到的关系式。

引入复正弦信号 $f(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$ 后，其实部和虚部就分别表示了两个实正弦信号 $A\cos(\omega t + \varphi)$ 和 $A\sin(\omega t + \varphi)$。而在采用复正弦信号后，数学运算将变得十分方便。回顾电路基础课程中学过的正弦信号的相量表示法还可看到，这种表示方式还可使信号与二维平面矢量一一对应。

上述 3 种基本信号中，δ(t)和复正弦信号尤为重要。随后将会看到，在把待分析的信号分解为这两种基本信号的线性组合后，信号通过系统的分析思路将变得非常清晰。

1.3 δ(t)的进一步讨论

1.3.1 分配函数的概念

从广义函数的角度说，δ(t)的性质更应视为一个分配函数。其数学定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\mathrm{d}t = f(0) \tag{1-15}$$

其中，$f(t)$是一个在 t=0 时刻连续的普通函数。

对于普通函数来说，给定一个自变量 t_0，就有一个函数值 $f(t_0)$与之对应。对于广义函数δ(t)来说，由定义式（1-15）可见，给定一个函数$f(t)$，通过与δ(t)的相乘及积分操作，就选定出了这个函数在 t=0 处的数值$f(0)$。