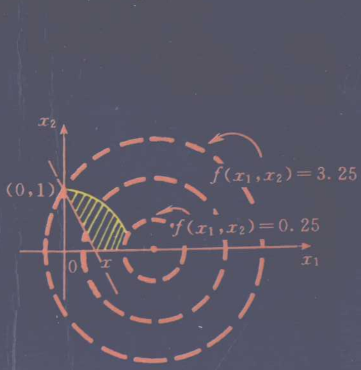
高等学校研究生教材

最优化方法

Methods of Optimization

唐焕文 秦学志 编著



大连理工大学出版社

THE PRESS OF DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

高等学校研究生教材

最优化方法

唐焕文　秦学志　编著

大连理工大学出版社

(辽)新登字 16 号

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法/唐焕文,秦学志编著.一大连:大连理工大学出版社,1994.11

ISBN 7-5611-0901-6

Ⅰ.最… Ⅱ.①唐…②秦… Ⅲ.最优化方法

Ⅳ.O224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 06254 号

最优化方法

Zuiyouhua Fangfa

唐焕文 秦学志 编著

大连理工大学出版社出版发行

(大连市凌水河 邮编:116024)

大连海运学院印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:10 $\frac{3}{8}$ 字数:250 千字

1994 年 11 月第 1 版 1994 年 11 月第 1 次印刷

印 数:0001—3000 册

*

责任编辑:高晓凌 张亚军

责任校对:晓 白 封面设计:王 艳

*

ISBN 7-5611-0901-6 / O·118

定 价: 7.00 元(压膜) / 12.00 元(精装)

序　言

最优化方法是运筹学的一个重要的组成部分，在自然科学、社会科学、生产实际、工程设计和现代化管理中有着重要的实用价值，因此，在最近的四十多年中得到了十分迅速的发展和广泛的应用。

本书是根据高校工科研究生数学课程教学指导小组审订通过的《工学硕士研究生最优化方法课程教学基本要求》，在对原编著《实用数学规划导论》一书进行修改补充后写成的。主要对象是理工科院校的工科研究生。考虑到应用数学、计算数学、运筹学等应用理科专业和管理工程、系统工程等专业本科生的教学需要以及从事运筹优化应用的工程技术人员、管理人员的需要，因此，本书还增写了部分超出基本要求的内容(用 * 标记者)，供有关专业选用。全书共分七章，比较系统地介绍了线性规划、无约束优化方法、约束优化方法、多目标规划、整数规划和动态规划的数学模型、基本概念、基本理论和计算方法。期望通过本书的学习，能使读者较好地理解定量优化的思想，掌握一些基本而常用的优化方法，并能运用优化的观点和方法分析解决实践中经常遇到的一些较典型的优化问题。

在编写本书时，我们还着重考虑了以下几点：

1. 努力做到深入浅出，通俗易懂，适于教学和自学，使具有微积分和线性代数知识的广大读者都能读懂本书的大部分内容。为了帮助大家学习，在附录中列出了阅读本书需要用到的主要数学基础知识，供读者复习和查阅。但是，为了叙述的完整，本书中也含

有少部分较难的内容，需要用到较深的数学知识或较复杂的数学推导，有困难的读者初学时，可以略去。

2. 正如在《自然杂志》1981 年举行的应用数学座谈会上许多同志所指出的那样：目前在我国，适合工科师生和工程技术人员阅读的应用数学书籍还比较少，有的书，纯数学的味道太浓，搞应用的人学不下去，学了也不会应用；有的书，又写得太浅，不够用。本书企图弥补这方面的不足，考虑到从事应用的读者的需要，着重介绍最优化的基本原理和在实际应用中比较有效的计算方法。为了便于理解和应用，对选入的每种算法，尽可能把它的基本思想阐述清楚，然后阐明其理论依据，并给出具体的计算步骤、程序框图和数值计算例子。在选择算法时，我们遵循下面的原则：第一，所选算法便于在计算机上实现；第二，在应用中比较有效的重要算法都尽可能选入，并注意选入一些较新的重要方法。

3. 要掌握最优化方法，需要有一些数值计算及应用的例题帮助理解；还需要独立完成一定数量的习题，其中部分习题要上机计算。为此，我们在每一章都配有一定数量的例题和较多的习题，供大家阅读和练习，部分习题附有提示或答案。

在编者从事运筹、优化的学习、教学和科研工作中，经常得到中科院院士、著名力学家、工程优化专家钱令希教授、著名运筹优化专家越民义、桂湘云、吴方、韩继业教授和著名计算数学家徐利治教授等的大力支持和热情指导，《实用数学规划导论》一书就是在他们的热情支持和帮助下编写和出版的。韩继业教授还亲自在北京大学概率统计专业使用过该书。本书的修改得到上述各位先生和大连理工大学研究生院、出版社领导的关心与支持，特在此表示衷心的感谢。

编者还要感谢大连理工大学出版社编辑高晓凌、张亚军同志的合作和付出的巨大劳动，使本书得以尽快出版。

如果使用本书作为工科研究生教材，预计 50 学时左右可讲完

前五章，70学时可讲完全书。

本书由唐焕文（前五章）和秦学志（后两章）合作编写，全书由唐焕文修改定稿。限于编者水平，书中难免存在不当之处，请广大读者批评指正。

唐焕文

1994年5月18日

符 号 说 明

$\min\limits_{x\in R} f(x)$　$f(x)$在 R 上的最小值

$\max\limits_{x\in R} f(x)$　$f(x)$在 R 上的最大值

s.t.　受约束于，是“subject to”的缩写

$A\subset B$　集合 A 包含于集合 B

$A\supset B$　集合 A 包含集合 B

$x\in A$　x 属于集合 A，即 x 是集合 A 的一个元素

$x\overline{\in} A$　x 不属于集合 A，亦可写成 $x\notin A$

$A\cup B$　集合 A 与 B 的并集

$A\cap B$　集合 A 与 B 的交集

$\approx$　近似等于

$\varnothing$　空集合

$N(x_0,\varepsilon)$或 $N_\varepsilon(x_0)$　以点 x_0 为中心，ε 为半径的邻域

$\binom{n}{k}$或 C_n^k　二项式系数，即从 n 个元素中每次取出 k 个元素所有不同的组合数

$\triangleq$　定义、恒等

R　实数域

$[x]$　不超过 x 的最大整数

$f(x)\in C$　$f(x)$是连续函数

$f(x)\in C^k$　$f(x)$具有 k 阶连续偏导数

E^n　n 维欧氏空间

$f:\ D\subset E^n\to R$　$f(x)$是定义在 E^n 中区域 D 上的实值函数

$\|x\|$　向量 x 的欧氏范数，即 $\|x\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$或$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$　向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$的内积

$\det(A)$或$|A|$　矩阵A的行列式

$\mathrm{rank}(A)$或$\mathrm{r}(A)$　矩阵A的秩

$\nabla f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$的梯度，$\nabla f(\boldsymbol{x})=(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})^T$

$H(\boldsymbol{x})$或$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$的海赛阵，$H(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}$

$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$　数x_1，x_2，…，x_n中最小者

$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$　数x_1，x_2，…，x_n中最大者

$\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$在X上的下确界

$\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$在X上的上确界

$\boldsymbol{x}^*$　最优解

f^*　目标函数的最优值

目　　录

三楼

第一章　引　论

本章首先介绍如何从实际问题中抽象出最优化问题，然后介绍最优化的一些基本概念和有关的预备知识，为以后的学习打下基础。

§1.1　最优化问题举例

利用最优化的理论和方法解决生产实际和自然科学中的具体问题，一般分为两个步骤：

1. 建立数学模型。即对所要解决的具体问题进行分析研究，加以简化，形成最优化问题。

2. 进行数学加工和求解。这个过程主要包括以下各项工作：将所得的最优化问题进行整理和变换，使之成为易于求解的形式；选择或提出解决该问题的适当的计算方法；编制计算程序并上机计算；分析计算结果，看其是否符合实际。

在这一节中，我们将通过几个简单的实例来说明怎样由实际问题经过抽象，建立它的数学模型。

例 1　某化工厂生产 A,B,C,D 四种化工产品，生产每种产品一吨所消耗的工时和产值如下表：

产　　品	A	B	C	D
工　时（小时）	100	300	400	75
产　值（千元）	1	5	10	0.5

要求全厂年产值在 1000 万元以上，求当消耗的总工时最少时，该厂生产各种产品的数量。

解　设该厂全年生产 A,B,C,D 四种产品的数量分别为 x_1，x_2,x_3,x_4(单位均为吨)，消耗的总工时为 y，则

$$y = 100x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 75x_4$$

消耗的总工时 y 最少是我们所追求的目标，所以把 $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 称为目标函数。而变量 x_1,x_2,x_3,x_4 的值是我们需要确定的，称 x_1,x_2,x_3,x_4 为决策变量或设计变量。

因为要求全厂的年产值在 1000 万元以上，所以决策变量 x_1，x_2,x_3,x_4 还需要满足以下的限制条件：

$$x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 0.5x_4 \geqslant 10000 \tag{1}$$

$$x_i \geqslant 0\ ,\ i = 1,2,3,4 \tag{2}$$

条件(1)(2)称为限制条件或约束条件。所以上述问题的数学模型可概述如下。

在约束条件(1)(2)之下，确定变量 x_1,x_2,x_3,x_4 的数值，使目标函数 $y = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 取得最小值。为叙述简便，以下文中常将此问题简写为

$$\begin{cases} \min & y = 100x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 75x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 0.5x_4 \geqslant 10000 \\ & x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 min 是 minimize 的缩写，s. t. 是 subject to 的缩写，中文意思是“受约束于”或“约束条件”。由于在最优化问题(1.1)中，目标函数 $y = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 是变量 x_1,x_2,x_3,x_4 的线性函数，约束条件是 x_1,x_2,x_3,x_4 的线性不等式(或等式)，所以把(1.1)称为线性规划问题，线性规划(Linear Programming)以后简记为 LP.

例 2　运输问题

假设某种物资有 m 个产地，n 个销地。第 i 个产地的产量为 a_i $(i = 1,2,\cdots,m)$；第 j 个销地的需要量为 $b_j(j = 1,2,\cdots,n)$。其中

$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$. 由产地 i 到销地 j 的距离为 d_{ij}，问应如何按排运输，才能既满足各地的需要，又使所花费的运输总吨公里数最少？试建立数学模型。

解　我们来建立上述问题的数学模型，设由产地 i 运往销地 j 的货物数量为 x_{ij}，s 为运输的总吨公里数，则上述问题可归结为如下的线性规划问题。

$$
\begin{cases}
\min s = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\cdots,n \\
\qquad \text{（满足各销地的需要量）} \\
\qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \ i = 1,2,\cdots,m \\
\qquad \text{（各产地的运出量不超过产量）} \\
\qquad x_{ij} \geqslant 0, \ i = 1,2,\cdots,m; \ j = 1,2,\cdots,n
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

运输问题是线性规划中的一个典型问题，也是线性规划模型中最早被研究的一类问题。早在 1939 年，前苏联数学家康托洛维奇（Л. В. Канторович）在列宁格勒大学所作的题为“生产组织与计划中的数学方法”的报告中，就讨论了交通运输和生产计划中所提出的线性规划问题。并给出了一种解法——解乘数法。

例 3　拟订生产计划问题

设有 m 种资源：$A_1,A_2,\cdots,A_m$，拟生产 n 种产品：$B_1,B_2,\cdots,B_n$. 用 a_{ij} 表示生产一个单位的第 j 种产品所需要第 i 种资源的数量，用 b_i 表示第 i 种资源的最大数量，用 c_j 表示第 j 种产品的单价，用 x_j 表示第 j 种产品的生产数量。则 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 就代表一个生产计划，我们的问题是：要设法按排一个生产计划，使每种产品都完成或超额完成国家下达的产量计划，即有 $x_j \geqslant e_j (j = 1,2,$

$\cdots,n)$，而使总产值最高。其中 $e_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为国家下达的生产第 j 种产品的产量指标。

解 在这个问题中，决策变量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 设总产值为 y，则上述问题可化为如下的线性规划问题：

$$\begin{cases} \max \quad y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\ x_j \geqslant e_j,\ j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1.3}$$

采用向量、矩阵记号，则(1.3)可写成

$$\begin{cases} \max \quad y=\mathbf{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad A\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b} \\ \qquad\ \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{e} \end{cases} \tag{1.3$'$}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$，$\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)^T$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$. $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{e}$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的每一个分量 x_j 都大于、等于向量 $\boldsymbol{e}$ 的每一个相应的分量 e_j. T 表示向量或矩阵的转置。

例 4 合理下料问题

设要用某类钢板下 m 种零件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的毛坯料。根据既省料又容易操作的原则，人们在一块钢板上，已设计出 n 种不同的下料方案，设在第 j 种下料方案中，可得到零件 A_i 的个数为 a_{ij}，第 i 种零件的需要量为 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$. 问应如何下料，才能既满足需要，又使所用钢板的总数最少？试建立数学模型。

解 设采用第 j 种方案下料的钢板数为 x_j，所用钢板的总数为 y，则上述问题可化为如下的最优化问题：

$$
\begin{cases}
\min \quad y = \sum_{j=1}^{n} x_j \\
\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i,\ i = 1,2,\cdots,m \\
\qquad (\text{第 } i \text{ 种零件的总数不少于需要量}) \\
\qquad x_j \geqslant 0, \\
\qquad x_j \in I, \quad j = 1,2,\cdots,n
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

其中$I = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 在问题(1.4)中，由于$x_j$表示用第$j$种方案下料的钢板数，所以应有$x_j \in I$，即$x_j$应取整数值，这样的问题(1.4)称为整数线性规划问题。

例 5 汽轮机叶片的优化设计

设汽轮机叶片面积的变化规律为

$$F(x) = F_0 - ax^m$$

其中F_0为叶片根部面积，根据热力学计算可求得各级叶片的平均半径R_p和叶片高度L，欲确定参数F_0, a, m的值，使其在强度许可的条件下，叶片的重量最轻，试建立数学模型。

强度条件为$\sigma_p \leqslant [\sigma]$，其中$[\sigma]$是简单拉伸的许用应力，$\sigma_p$是叶片截面上的最大拉应力。

$$\sigma_p = \gamma\omega^2 LR_p \left[1 - \left(1 - \frac{F_1}{F_0}\right)\left(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{\frac{D_p}{L}(m+1)(m+2)}\right)\right] \tag{1.5}$$

上式中的γ, ω, L, R_p为已知常数，$D_p = 2R_p$，$F_1 = F_0 - aL^m$为叶片顶部面积，γ为密度，则叶片的重量为

$$G = \int_0^L \gamma g F(x) \mathrm{d}x = \gamma g \left[F_0 L - \frac{a}{m+1} L^{m+1}\right] = f(F_0, a, m)$$

所以汽轮机叶片的优化设计问题归结为在约束条件$\sigma_p \leqslant [\sigma]$，$F_0 \geqslant (F_0)_{\min}$之下，求参数$F_0, a, m$的值，使目标函数$G = f(F_0, a, m)$

取得最小值。由于这里的目标函数和约束函数都是变量 F_0, a, m 的非线性函数，所以称它为非线性规划问题。非线性规划 (Nonlinear programming) 以后常简写为 NLP。

例 6 在船体的数学放样中，常会遇到下面的问题，已知平面上 n 个点：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_n, y_n)，我们希望用下面的样条函数来拟合这 n 个点。

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 (x - x_1)^3_{\#} + \cdots + a_{n+3} (x - x_n)^3_{\#}$$

其中

$$(x - x_i)^3_{\#} = \frac{1}{2}[|x - x_i|^3 + (x - x_i)^3],\ i = 1, 2, \cdots, n$$

为了保证求出的曲线 $y = f(x)$ 与连结已知 n 个点所成的曲线具有相同的拐点，应要求 $\gamma_i f''(x_i) \geqslant 0$，$i = 2, 3, \cdots, n-1$. 其中

$$\gamma_i = \frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$$

所以上述问题可归结为

$$\begin{cases} \min \quad s = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2 \\ \text{s.t.} \quad \gamma_i f''(x_i) \geqslant 0,\ i = 2, 3, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{1.6}$$

例 7 投资决策问题

设在一段时间（比如三年）内，有 B 亿元的资金可用于投资，有 m 个项目 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 可供挑选。若对项目 A_i 进行投资，需花费资金 a_i 亿元，可获得收益 c_i 亿元，试确定最佳的投资方案。

引入布尔变量 $x_i = \begin{cases} 1, & \text{若对 } A_i \text{ 投资}, \\ 0, & \text{若对 } A_i \text{ 不投资}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, m,$

则约束条件为