

名师导学

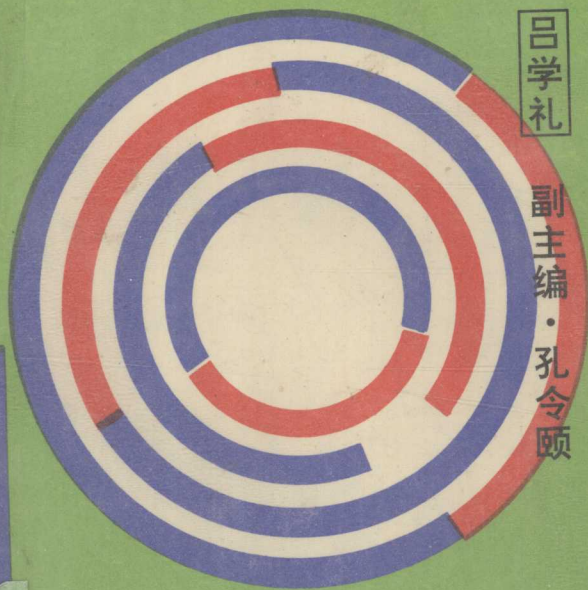
高中数学精解

下册

主编·

吕学礼

副主编·孔令颐



北京工

名师导学

高中数学精解

下 册

主 编 吕学礼

副主编 孔令颐

北京工业大学出版社

(京)登95第212号

内 容 简 介

本书精选了大量的高中数学中各种类型的题目,并加以详尽的讨论、分析和解答,旨在帮助学生发展解题思路,提高分析问题和解决问题的能力.所选题目中有相当一部分属综合性题目,这些题目往往具有多种解法,更易于培养和发展学生的解题思路和能力.

本书分上、下两册出版.上册包括代数、三角两篇,下册包括立体几何、解析几何两篇.

本书可供高中学生课外阅读之用,也可供高中数学教师参考.

名师导学

高中数学精解

(下册)

编

吕学礼

副主编

孔令颐

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

世界知识印刷厂印刷

1996年4月第1版 1996年4月第1次印刷

787×1092毫米 32开本 7.875印张 175千字

印数: 1~15000册

ISBN 7-5639-0452-2/G·235

定价: 7.40元

编著者简介

主编：吕学礼

副主编：孔令颐

其他编著者（按笔划排序）：

王人伟 王健民 陈剑刚 周沛耕

吕学礼 1919年生，上海青浦人，

1942年毕业于上海交通大学数学系。

历任中学数学教员，上海交通大学数学系助教、讲师，人民教育出版社数学室编辑、编审。参加1954年至1980年期间历届中学数学教学大纲的起草工作。参加1954年以来历次中学数学通用课本、教学指导书、教学参考书、习题集的编写、校订工作。



编著有《中学数学教学一得集》、《中学数学实际问题选》、《中学数学实用题解》、《初中数学应用例解》、《平面向量和空间向量》、《代数矩阵与几何变换浅说》等；合著有《分角线相等的三角形（初等几何机器证明问题）》、《初级计算机原理和使用》、《BASIC语言——电子计算机初步知识（高中数学选用教材）》等；合译有《计算机程序设计 Logo 语言》等。

孔令颐 浙江桐乡人，1956年毕业于四川大学数学系，同年任清

华大学基础课数学教师，现任清华大学附中数学教师、教研组长，1985年、1987年先后被评为北京市中学特级教师和高级教师。

编著、主编或参加编写的书籍有《名师启迪丛书》、《名师授课程》、《高级中学试验课本》、《高中数学综合解题方法》、《高中各科选修指导丛书》、《高中数学教学指导书》、《数学竞赛培训教程》、《高中数学总复习》、《数学复习与题解》、《高考总复习指导丛书》

等；撰写的论文有《从一次齐次递推公式求通项的特征根法的一个初等证明》、《能力培养与第二课堂》、《从1988年高考数学试题看能力培养》、《关于微积分教学》、《关于中学生能力培养的一点实践》、《求导方法与数学实验》等。



王人伟 1945年生，1968年毕业于中国科技大学近代力学系，1979年至1981年于北京航空学院攻读硕士，并获工学硕士学位，1982年至今在北航附中任数学教师及数学教研组长，现任北京市特级教师，北京数学会理事，航空普教协会数学会理事长。他在1987年北京市中青年教师教学评优中获优秀课奖，由北京市教研部推荐，他参加了1990年青岛举行的全国首届中学数



学教学观摩研讨会，在会上讲了一堂观摩课，作为突出数学思想的典范，受到与会专家及老师们的一致好评。

作为中国奥林匹克高级教练，北京市数学奥校常务教练，他在优秀学生的培养方面做了大量工作。近年来，他作为北京数学集训队的主教练、副主教练及北京代表队的领队，带领学生连续两年夺得CMO（中国数学奥林匹克）团体第一（获陈省身杯），与其他教练员一起，培养出多名学生进入国家队，在IMO（国际数学奥林匹克）上取得优异成

绩.

王建民 1939年生,天津市人,北京市数学特级教师,北京市数学学科带头人,市教研员,现任教于中国科学技术大学附属中学,是海淀区人民代表大会代表.

长期参与北京市和海淀区的数学教学和教学科研活动,参加编写各类教学参考书籍数十本,在省市级以上刊物发表论文数十篇,曾到一些省市讲学,与张君达、周沛耕、明知白合著专著《初等数学概论》.

陈剑刚 江苏海门人,1958年毕业于复旦大学数学系,同年任北京大学数力系助教.1960年任北大附中数学教师,曾任数学教研组长、副校长、校长等职.1986年被授予北京市中学特级教师、市普教系统先进工作者,1987年被评为北京市中学高级教师,1991年被授予北京市中学数学学科带头人.

著作有《名师启迪丛书》、《名师授课录》.

周沛耕 河北唐山人,1962年至1968年就读于北京大学数学力学系力学专业,1968年毕业.现在北大附中任教,是北京市特级教师.

在教学中,他注重开发学生的智力,调动学生的积极性,形成了“激发式”的教学风格.除了从事普通教学工作外,他多年来从事竞赛数学的辅导与研究,他的学生多次在国内、国际数学竞赛中获奖.他直接培养



的学生，先后获得国际数学竞赛的三枚金牌和一枚银牌。今年，他参与培养的又一名学生已获得世界数学竞赛的参赛资格。

他是中国奥林匹克数学高级教练，现任北京市数学奥林匹克学校培训部主任，任中国“双法”（优选法和统筹法）数学研究会教育委员会副主任。

主要著作有《初等数学概论》、《数学竞赛培训教程》、《组合数学基础》等。

前 言

学生学习数学，必须首先掌握双基——基础知识、基本技能。

在掌握双基的基础上，还需要引伸触发、深入研究，了解所学的知识技能在各方面的综合运用，同时增强和提高分析问题和解决问题的能力。

数学教师对这方面进行指导，也需要有相应的参考资料。

为此，特请经验丰富的数学名师，编写此书，以适应上述需要。

本书为习题集形式，目的在于巩固双基，同时发展解题思路，帮助学生提高分析问题和解决问题的能力。

本书分上、下两册出版。上册包括代数、三角两篇，下册包括立体几何、解析几何两篇，每篇均有习题数十条。虽然分为四篇，但习题大多是带综合性的，只能由其主要属于某类而放入某篇。每一习题，往往具有多种解法，更易于培养和发展学生的解题思路和能力。解析几何篇中每隔几题有一小结，指明这类问题的共同规律和共同解法。

本书可供高中学生课外阅读之用，对于每一道题，可以先自己加以思考，研究解法，然后再看题后的解法。教师应用本书指导学生，也可请先让学生加以思考，再告知解法，这样可能收效更大。

对本书的缺点错误，敬请批评指正。

吕学礼

1995年6月

目 录

前 言	(VI)
第三篇 立体几何	(1)
第四篇 解析几何	(99)
一、坐标方法	(100)
二、二次曲线的弦长、弦的中点及有关问题	(116)
三、点、直线与二次曲线的位置关系	(129)
四、线段与二次曲线及二次曲线之间的交点问题	(141)
五、对称问题	(151)
六、方程的思想方法	(163)
七、曲线系方程	(178)
八、轨迹方程	(190)
九、最大、最小值问题	(207)
十、几何量的取值范围	(221)
十一、证明题	(235)

第三篇

立体几何

1. 已知四条直线 a, b, c, d 两两相交且不通过同一点, 证明这四条直线共面.

证明: 若三条直线交于一点, 如图 3-1, a, b, c 交于一点 P , $d \cap a = S, d \cap b = R, d \cap c = Q$.

$$\therefore a \cap d = P,$$

$\therefore a, d$ 确定一个平面, 设为 α (公理 3 推论 2).

$$\therefore Q \in d, P \in a, a, d \subset \alpha,$$

$$\therefore Q, P \in \alpha,$$

$$\therefore c \subset \alpha \text{ (公理 1)}.$$

同理, $b \subset \alpha$,

$\therefore a, b, c, d$ 共面.

若已知四条直线中每三条直线都不交于一点, 则如图 3-2, $a \cap d = P, b \cap d = Q, c \cap d = R, a \cap b = S, a \cap c = M, b \cap c = N$.

$$\therefore a \cap d = P,$$

$\therefore a, d$ 确定一个平面, 设为 α .

$\therefore Q \in d, S \in a, a, d \subset \alpha,$

$$\therefore Q, S \in \alpha,$$

$$\text{又} \because Q, S \in b,$$

$$\therefore b \subset \alpha.$$

同理, $c \subset \alpha$,

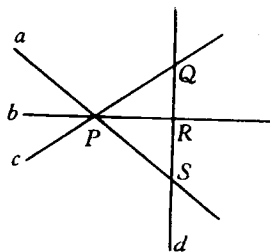


图 3-1

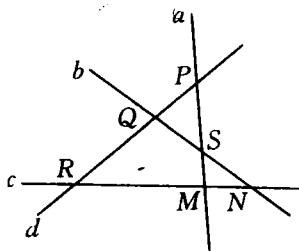


图 3-2

$\therefore a, b, c, d$ 共面.

2. 已知一组平行线 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都与 b 相交, 求证它们共面.

证明: 如图 3-3, 直线 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 相互平行, 且它们分别与直线 b 交于 $P_1, P_2, \dots, P_n$.

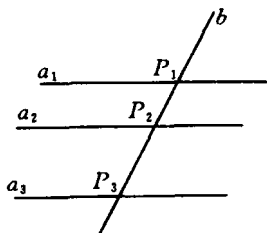


图 3-3

$\therefore a_1 \cap b = P_1,$

$\therefore a_1$ 与 b 确定平面 α ;

$\therefore a_1 \parallel a_2,$

$\therefore a_1$ 与 a_2 确定平面 β .

$\therefore a_2 \cap b = P_2,$

$\therefore P_2 \in b, P_2 \in a_2,$

$\therefore P_2 \in \alpha, P_2 \in \beta.$

$\therefore a_1 \subset \alpha, P_2 \in \alpha, a_1 \subset \beta, P_2 \in \beta,$

$\therefore \alpha, \beta$ 重合 (公理 3 推论 1),

$\therefore a_2 \subset \alpha.$

同理, $a_3, a_4, \dots, a_n \subset \alpha,$

$\therefore a_1, a_2, \dots, a_n, b$ 都在同一平面内.

说明: 证明若干元素 (点或直线) 共面, 常用两种方法. 方法一是先根据公理 3 或推论确定一个平面, 然后再证明其他元素也在这个平面内 (如第 1 题); 方法二是先根据公理 3 或推论确定出两个平面, 然后再证明这两个平面重合 (如第 2 题).

3. m, n 是两条异面直线, m 上有三点 A_1, B_1, C_1 , n 上有三点 A_2, B_2, C_2 , 线段 $A_1A_2, B_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ 的中点

分别是 D 、 E 、 F 、 G . 求证: D 、 E 、 F 、 G 四点共面.

证明: 如图 3-4, 连结 DE , EF , C_1B_2 .

$\because D$ 、 E 分别是 A_1A_2 、 B_1A_2 的中点,

$\therefore DE \parallel A_1B_1$, 即 $DE \parallel m$.

同理, $EF \parallel A_2B_2$, 即 $EF \parallel n$.

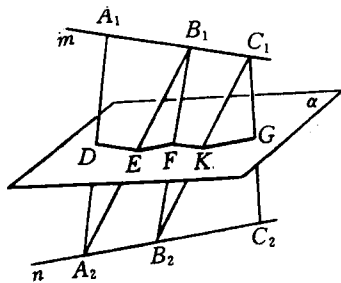


图 3-4

$\because m, n$ 是异面直线,

$\therefore D$ 、 E 、 F 不共线,

$\therefore D$ 、 E 、 F 确定一个平面, 设为 α .

$\because D, E \in \alpha$,

$\therefore DE \subset \alpha$.

又 $\because DE \parallel m, m \not\subset \alpha, DE \subset \alpha$,

$\therefore m \parallel \alpha$.

同理, $n \parallel \alpha$.

设 C_1B_2 与 α 相交于 K , C_1C_2 与 α 相交于 G' , 连结 FK , KG' ,

$\because m \parallel \alpha$, 平面 $B_1C_1B_2 \cap \alpha = FK$,

$\therefore m \parallel FK$,

又 $\because F$ 是 B_1B_2 的中点,

$\therefore K$ 也是 C_1B_2 的中点.

同理, $KG' \parallel n$, G' 是 C_1C_2 的中点,

$\therefore G'$ 与 G 重合,

$\therefore D$ 、 E 、 F 、 G 四点共面.

4. 直线 a 、 b 、 c 是两两互相垂直的异面直线, d 是 b 、 c 的公垂线, 则 d 与 a 的位置关系是 ().

- (A) 相交 (B) 平行
(C) 异面 (D) 不确定

解: (B).

在 b 上任取一点 P , 过 P 作直线 c' , 使 $c' \parallel c$. 设 b 、 c' 确定平面 α .

$$\because d \perp c, a \perp c, c' \parallel c,$$

$$\therefore d \perp c', a \perp c'$$

$$\text{又} \because d \perp b, a \perp b, b, c' \subset \alpha,$$

$$\therefore d \perp \alpha, a \perp \alpha,$$

$$\therefore a \parallel d.$$

5. 已知直线 $a \parallel$ 平面 α , 且 a 与 α 间的距离为 m , 那么到直线 a 的距离与到平面 α 的距离都等于 $\frac{2}{3}m$ 的点的集合是 ().

- (A) 一个平面 (B) 两个平面
(C) 一条直线 (D) 两条平行线

解: (D).

到直线 a 距离等于 $\frac{2}{3}m$ 的点集合是以该直线为轴的圆柱面 (无限长), 到平面 α 距离等于 $\frac{2}{3}m$ 的点集合是与 α 平行且距离都为 $\frac{2}{3}m$ 的两个平面, 这两个平面中的一个与上述柱面有两条互相平行的交线.

6. 到三角形三边所在直线距离相等的点的集合是

().

- (A) 两个平面 (B) 一条直线
(C) 一个平面 (D) 四条直线

解: (D).

分别作该三角形三个内角及外角的角平分线, 得到 4 个交点 (分别是该三角形的内心及 3 个旁心), 过此 4 点分别作垂直于该三角形所在平面的直线, 此 4 条直线即是到三角形三边所在直线距离相等的点的集合 (证明略).

7. 已知直二面角 $\alpha-l-\beta$, 直线 $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 且 a 与 l 不垂直, b 与 l 也不垂直, 则 (C).

- (A) a 与 b 可能垂直, 但不可能平行
(B) a 与 b 可能垂直, 也可能平行
(C) a 与 b 不可能垂直, 但可能平行
(D) a 与 b 不可能垂直, 也不可能平行

解: (C).

当 a, b 都与交线 l 平行时, 由公理 4, 可知 $a \parallel b$, 以下证明 a 与 b 不可能垂直.

假设 $a \perp b$, 在 b 上取一点 P ; 过 P 在 β 内作直线 c , 使 $c \perp l$.

$\because b$ 与 l 不垂直, $c \perp l$,

$\therefore b$ 与 c 是相交直线.

$\because a \perp \beta, c \perp l, c \subset \beta$,

$\therefore c \perp a$,

$\therefore c \perp a$,

又 $\because a \perp b$,

$\therefore a \perp \beta$,

$\therefore a \perp l$, 这与已知矛盾,

$\therefore$ 假设不成立, 即 a 与 b 不可能垂直.

8. 异面直线 a 、 b 上分别有定点 A 、 B , γ 是过线段 AB 中点 O , 且与 a 、 b 都平行的平面, P 是 a 上动点, Q 是 b 上动点, 线段 PQ 中点 N 的集合为 ω , 则 ().

(A) $\omega = \gamma$

(B) $\omega \subset \gamma$

(C) $\omega \supset \gamma$

$\therefore$ (D) $\omega \not\subset \gamma$ 且 $\omega \not\supset \gamma$

解: (A).

(1) 先证 $\omega \subseteq \gamma$, 即证明 PQ

中点必在 γ 上:

连结 AQ , 交 γ 于 M , 连结 OM (如图 3-5).

$\because b \parallel \gamma$, 平面 $ABQ \cap \gamma = OM$,

$\therefore b \parallel OM$,

又 $\because AO = OB$,

$\therefore AM = MQ$.

设 PQ 与 γ 交于 N' , 连结 MN' , 同上可证 $MN' \parallel a$,

$\therefore PN' = N'Q$, 即 N' 与 N 重合, 即 N 在 γ 上,

$\therefore \omega \subseteq \gamma$.

(2) 再证 $\gamma \subseteq \omega$, 即证明对于 γ 上的任一点 T , 都能在 a 、 b 上找到 P 、 Q 点, 使 PQ 中点为 T .

设 T 为 γ 上任意一点, 直线 b 与 T 确定一个平面 α , 设 α 与 γ 相交于过 T 点的直线 c .

$\because b \parallel \gamma$, $b \subset \alpha$, $\alpha \cap \gamma = c$,

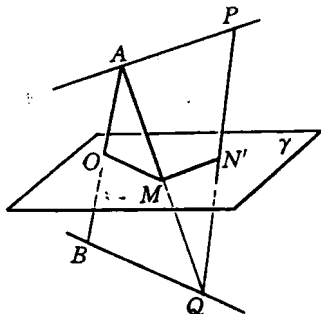


图 3-5

$\therefore b \parallel c,$

$\therefore \alpha$ 与 a 必相交 (否则, $a \parallel \alpha$, 再由 $a \parallel \gamma$, 可得 $a \parallel c$, $a \parallel b$, 这与 a, b 是异面直线矛盾), 设交点为 P .

连结 PT , 并延长, 必与 b 相交 (否则, $PT \parallel b, c \parallel b$, 这与平行公理矛盾), 设交点为 Q .

由 (1) 可知, T 点必是 PQ 的中点, 所以 $\omega \supseteq \gamma$.

综合 (1)、(2) 的结论, 得 $\omega = \gamma$.

9. 设 a, b 是两条异面直线, 下列命题中正确的是 ().

(A) 有且仅有一条直线与 a, b 都垂直

(B) 过空间任一点必可作一个平面与 a, b 都平行

(C) 过空间任一点必可作一条直线与 a, b 都相交

(D) 过直线 a 有且仅有一个平面与 b 平行

解: (D).

与 a, b 的公垂线平行的所有直线与 a, b 都垂直, 因此 (A) 不正确; 当空间某一点与直线 a 确定的平面恰与 b 平行时, 过该点无法作出一个平面与 a, b 都平行, 因此 (B) 不正确, 在这种情况下, 过该点与 a 相交的直线都在 a 与该点确定的平面内, 这些直线与 b 都不相交, 因此 (C) 也不正确. 命题 (D) 正确, 在 a 上任取一点 P 作 b 的平行线 b' , a 与 b' 确定的平面与 b 平行, 可证这样的平面是唯一的 (可利用第 2 题的结论证明).

10. 以下命题中正确的是 ().

(A) 两个平面斜交, 则其中一个平面上任一直线与另一个平面都不垂直

(B) 通过 α 平面一条斜线的平面与 α 一定不垂直