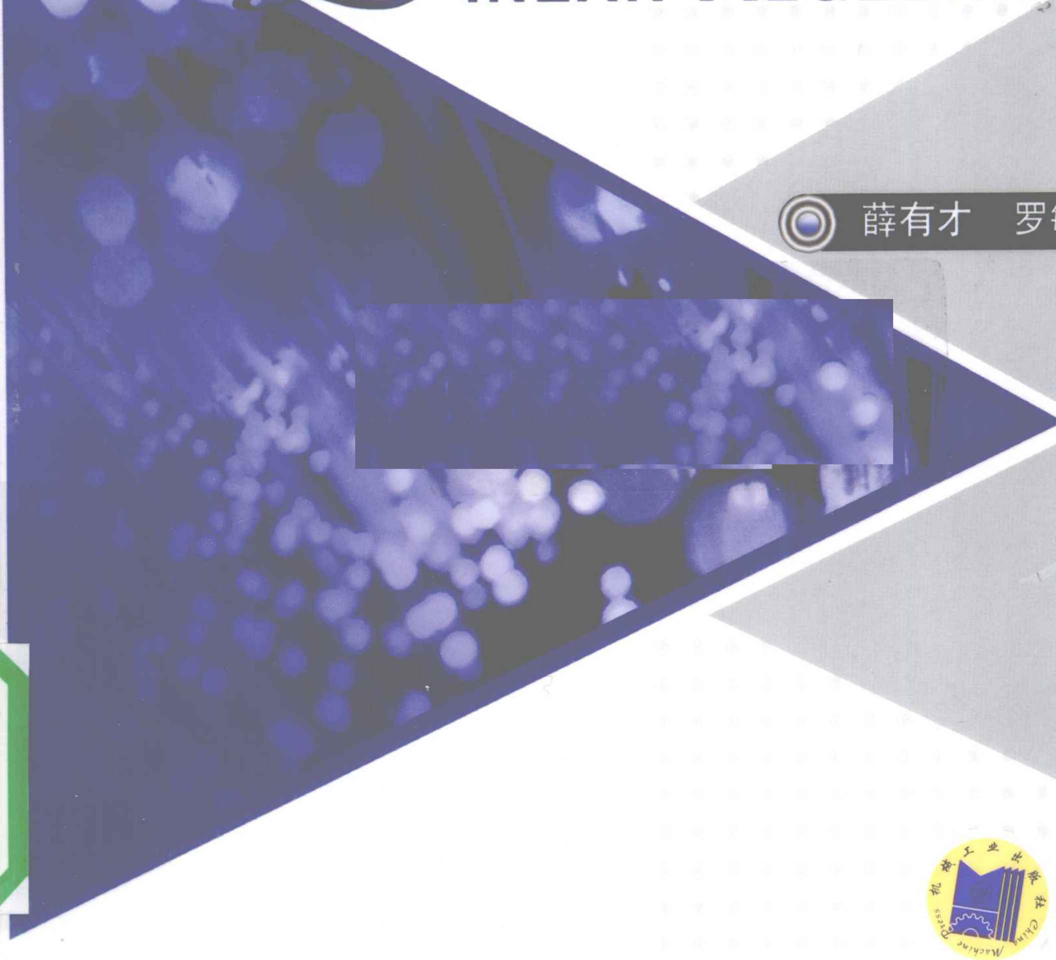
大学数学改革系列教材

线性代数

（理工类）

LINEAR ALGEBRA

薛有才　罗敏霞　主编

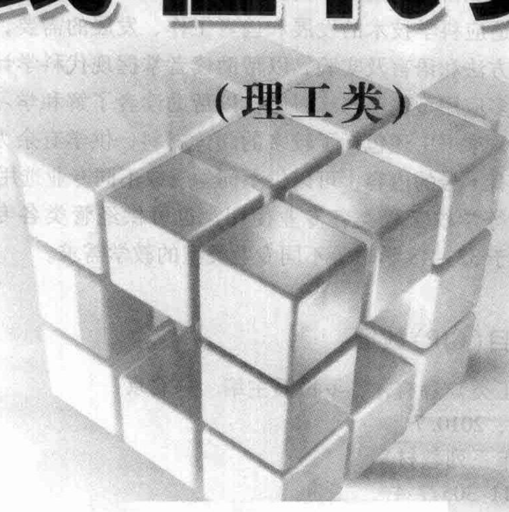


机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学数学改革系列教材

线性代数

（理工类）



主编　薛有才
参编　申国伦
主审　徐常青

机械工业出版社

线性代数是高等本科院校理、工、农、医、经、管各专业的一门重要基础课程。本书是根据国家教育部高等教育本科线性代数课程的基本要求，结合作者多年教授本课程的体会而编写的，并与高中新的数学课程标准具有较好衔接的一本教材。

本书包含了线性代数的传统内容：矩阵、线性方程组、行列式、向量与向量空间、矩阵的相似对角化、二次型、线性变换和线性空间；同时，为了适应科学技术的发展和读者工作、发展的需要，也写进了相关的计算方法和语言及实验，以帮助读者掌握现代科学计算方法；本书中有许多应用型例题与练习题，以帮助读者了解和学习线性代数方法的应用；本书中还包括了较多的阅读材料，供学有余力的同学参考。本书中有 * 号的内容，可以供不同学校或不同专业选用。

本书可供高等学校工程类各专业使用，也可供经管类各专业使用。本书可适用于 32 ~ 48 学时等不同专业类型的教学需求。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（理工类）/薛有才，罗敏霞主编. —北京：机械工业出版社，2010.7
（大学数学改革系列教材）
ISBN 978-7-111-30577-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①薛… ②罗… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 082721 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码 100037）
策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫 孙志强
版式设计：霍永明 责任校对：申春香
封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
北京铭成印刷有限公司印刷
2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 18 印张 · 348 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-30577-4
定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务
社服务中心：（010）88361066 门户网：http：//www.cmpbook.com
销 售 一 部：（010）68326294 教材网：http：//www.cmpedu.com
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

前　言

线性代数是高等本科院校理、工、农、医、经、管各专业的一门重要基础课程，是现代科学技术的重要理论基础。同时，它也是解决实际问题的重要工具。随着现代计算机技术的发展，线性代数理论已成为计算机离散化处理问题和数值计算的基础知识。本书是根据国家教育部高等教育本科线性代数课程的基本要求，结合作者多年教授本课程的体会而编写的，并与高中新的数学课程标准具有较好衔接的一本教材，其目的是为普通高等学校非数学专业的学生提供一本适用面较宽、容易阅读和学习、能够帮助学生较好地掌握本课程的基本知识、基本方法、基本应用的教材。

本书包含了线性代数的传统内容：矩阵、线性方程组、行列式、向量与向量空间、矩阵的相似对角化、二次型、线性变换和线性空间；同时，为了适应科学技术的发展和读者工作、发展的需要，本书增加了相关的计算方法和语言及实验，以帮助读者掌握现代科学计算方法；本书中有许多应用型例题与练习题，以帮助读者了解和学习线性代数方法的应用。

本书具有鲜明的特色：

（1）起点低，坡度适中。本书从学生熟悉的解线性方程组讲起，坡度较适中，尽量采用提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开，以适应学生的思维习惯。

（2）突出应用。本书采用从读者熟悉的实例和知识出发，用大家熟悉的语言、知识和思想方法进行自然的扩展来泛化这些概念，以帮助读者更好地掌握这些概念。大量的应用实例为课程提供了活力和应用方法；各种不同类型的习题为培养各种能力而服务。

（3）重视几何模型作用，几何与代数方法互为反衬。几何为代数提供了“背景”或“模型”，代数为几何提供了方法，所以本书中提供了大量的几何图形和案例，以帮助读者理解代数概念，同时也是一种应用。

（4）注重思想方法与创新教育。为了培养学生的创新能力，本书各章中均编排了一些讨论与研究性习题，供教学中参考。同时，教材特别注重思想方法的培养。

（5）现代化的处理方法。本书突出了矩阵思想与初等变换的方法。例如，在定义和证明中处理的是矩阵的列（向量），而不是矩阵的元素；线性方程组也突出矩阵的处理方法；线性变换的思想贯穿教材始终；等等。

（6）各章中都有小结，可以帮助读者复习知识、理清关系、加深理解与进一步提高。

（7）适应面宽，与中学数学课程较好地衔接。由于中学课程的变化，部分中学生已经学习了线性代数的部分内容。本书的内容比较丰富，可以适应不同的专业和学校、不同的学生要求。本书可以适用于32～48学时等不同专业类型的教学要求。

本书第1章与第4章的1，2节由浙江科技学院薛有才编写，第2章由河南城建学院徐华峰编写，第3章由西安邮电学院李昌兴编写，第5章由天津城市学院李引引编写，第4章第3节与第8章由浙江科技学院申国伦编写，第6章由中国计量学院罗敏霞编写，第7章由西安邮电学院赵美霞编写。全书由薛有才策划，由薛有才与罗敏霞统稿、审定。

在本书编写过程中，参考了诸多文献，部分内容与例题是直接引用的，我们对各位参考文献的作者表示真挚的谢意，也感谢机械工业出版社的编辑，为本书的出版付出了极大的心血。

限于作者自身的水平，写作过程常深感言不及义，错误在所难免，恳请读者不吝赐教，多多指正。

编　者

目 录

第1章 矩阵

问题(介绍性实例)

在中学，我们学习过解二元一次方程组或三元一次方程组。我们把含有多个未知数的一次方程称为**线性方程**，而把若干个线性方程所组成的方程组称为**线性方程组**。线性方程组在生活、生产和工程中有着广泛的应用。下面看一些实例。

引例1 一位营养师推荐给幼儿的食谱由四种食物A，B，C，D组成，幼儿的食谱要求包含60单位的钙、35单位的铁、35单位的维生素A、50单位的维生素B。表1-1给出的是每500g食物A，B，C，D中所含有的钙、铁、维生素A、维生素B的量(单位)。

表 1-1

食　物	钙	铁	维生素A	维生素B
A	20	5	5	10
B	10	5	15	10
C	10	10	5	10
D	15	15	10	20

写出幼儿食谱中所含有食物A，B，C，D的量所满足的方程组。

解 设A，B，C，D食物的量分别为x，y，z，w(g)，则有方程组

$$\begin{cases}20x+10y+10z+15w=60\\5x+5y+10z+15w=35\\5x+15y+5z+10w=35\\10x+10y+10z+20w=50\end{cases}$$

引例2 1949年夏末，美国哈佛大学教授列昂惕夫(Wassily Leontief)把美国经济分解为500个部门，例如煤炭工业、交通系统等。对于每个部门，他写出了一个描述该部门的产出如何分配给其他经济部门的线性方程。这样，他就得到了一个含有500个未知数的500个方程的线性方程组。但由于当时最大的计算机也无法处理含500个未知数500个方程的方程组，所以最后他不得不把该方程组简化为包含42个未知数42个方程的方程组。为解列昂惕夫的42个方程的方程组，人们用了几个月的时间编写了当时最大的计算机之一的Mark-Ⅱ的应用程序，并

运行了56个小时才得到最后的答案。为此，列昂惕夫获得了1972年的诺贝尔经济学奖，他打开了研究经济数学模型的新时代的大门。从此以后，许多其他领域的研究者也开始应用计算机来分析数学模型，以解决实际问题。当然，由于所涉及的数据数量庞大，所以这些模型通常都是线性的，即它们是用线性方程组来描述的。

线性代数在应用中的重要性与广泛性随着计算机功能的增大而迅速增加。今天，线性代数在工程领域、经济领域等许多领域中有着广泛而重要的应用，如

(1) 石油勘探：当勘探船寻找海底石油储藏时，它的计算机每天要解几千个线性方程组。

(2) 电路：工程师使用仿真软件来设计电路和微芯片，这样的技术依赖于线性代数与线性方程组的方法。

线性方程组是线性代数的核心概念之一。我们在中学仅仅学习了线性方程组的一些最简单的知识，对于诸如解多元线性方程组、方程组解的存在性等许多问题还未涉及。本章引入介绍有关线性方程组、矩阵的概念、矩阵的运算、解线性方程组的初等变换方法与矩阵的初等变换、逆矩阵及矩阵的分块等知识与方法，它们是线性代数的基础知识，并对上述问题做初步的回答。

1.1 线性方程组

包含未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个一次方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{1.1.1}$$

称为一个**线性方程**(Linear Equation)。其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$，b 是实数或复数，b 称为常数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为系数。例如，方程 $4x+2y-z=3$ 与方程 $2x_1+3x_2-4x_3+x_4=0$ 都是线性方程。

由一个或几个包含相同变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程所组成的集合称为一个**线性方程组**(System of Linear Equations)。例如，

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

是一个包含4个未知数的方程组。

若有一组数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$(也可以记为$(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，称为数组或向量)，用这组数分别代替线性方程组中的未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时所有方程的两边都相等，就称这组数为线性方程组的一个**解**，我们也称这个数组为方程组的一个**解向量**。例如，数组$(3,-4,-1,1)$就是方程组(1.1.2)的一个解。如果一个线性方程组是有解的，它的解可能不止一个。方程组所有解的集合称为方程组的**解集**。

如果两个线性方程组有相同的解集，我们就称这两个线性方程组**等价**；就是说，第一个方程组的每个解都是第二个方程组的解，第二个方程组的每个解也都

是第一个方程组的解。

下面我们来看一些解方程组的例子。

例 1.1.1 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1+9x_2+2x_3=19 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

解 我们应用中学学过的消元法解方程组。为方便起见，将方程组(1.1.3)中的第1、2两个方程互换，方程组(1.1.3)变为

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=9 \\ 3x_1+9x_2+2x_3=19 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

将方程组(1.1.4)中第1个方程两边分别乘以-2和-3加到第2和第3个方程上去，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ -2x_2-5x_3=1 \\ 3x_2-x_3=7 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

在方程组(1.1.5)中，将第3个方程两边同乘以2，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ -2x_2-5x_3=1 \\ 6x_2-2x_3=14 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

再把方程组(1.1.6)中第二个方程乘以3加到第3个方程上去，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ -2x_2-5x_3=1 \\ -17x_3=17 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

在方程组(1.1.7)中，第3个方程是一元一次方程，两边除以-17得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ -2x_2-5x_3=1 \\ x_3=-1 \end{cases} \tag{1.1.8}$$

再把 $x_3=-1$ 代入方程组(1.1.8)中第2个与第1个方程，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2=5 \\ -2x_2=-4 \\ x_3=-1 \end{cases} \tag{1.1.9}$$

方程组(1.1.9)中第2个方程两边除以-2得 $x_2=2$；把 $x_2=2$ 代入方程组(1.1.9)

得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=-1 \end{cases} \tag{1.1.10}$$

我们仔细分析上例用消元法解方程组的过程，可以看出，用消元法解线性方程组的过程就是反复地将方程组进行以下三种基本变换以化简原方程组：

(1) 互换方程组中的两个方程的位置；

(2) 用一个非零的数乘某一个方程；

(3) 用一个数乘一个方程后加到另一个方程上。

我们把以上三种变换称为**线性方程组的初等变换**(Elementary Transformation)。以后可以看到，这三种变换是经常使用的方法，而且通过以上解方程组的过程，可以知道，初等变换把线性方程组变成其同解方程组(参见练习 1.1 第 4 题)。

再分析上述解线性方程组的过程，可以看出，在作初等变换化简方程组时，只是对这些方程的系数和常数项进行变换，下面我们把例 1.1.1 解方程组的过程通过下面"矩阵"数表的形式再做一遍：

$$\underset{(\text{对应方程组}(1.1.3))}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 19 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{交换 } 1,2 \text{ 两行}} \underset{(\text{对应方程组}(1.1.4))}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 19 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\text{第 1 行}(-3)\text{倍加到第 3 行}]{\text{第 1 行}(-2)\text{倍加到第 2 行}} \underset{(\text{对应方程组}(1.1.5))}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行乘以}(-2)} \underset{(\text{对应方程组}(1.1.6))}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{第 2 行 3 倍加到第 3 行}} \underset{(\text{对应方程组}(1.1.7))}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行除以}(-17)} \underset{(\text{对应方程组}(1.1.8))}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\text{第 3 行乘以}(-1)\text{加到第 1 行}]{\text{第 3 行乘以 5 加到第 2 行}} \underset{(\text{对应方程组}(1.1.9))}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行除以}(-2)} \underset{(\text{方程组}(1.1.9)\text{到方程组}(1.1.10)\text{的过渡})}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{第 2 行乘以}(-2)\text{加到第 1 行}} \underset{(\text{对应方程组}(1.1.10))}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

大家看到，我们用这样一种"矩阵"数表的形式对方程组的系数与常数进行与解方程组的"加减消元法"对应的"矩阵"数表中的"行"的运算，最后也得到了方程组的解。这种方法的优点是记号简单，节省书写过程，尤其是它适用于计算机上操作——即我们可以通过编写相应的解题"程序"，然后

把它交给计算机来演算。下面我们再看一个例题。

例 1.1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3=-7 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_3=2 \end{cases} \tag{1.1.11}$$

解 将方程组(1.1.11)写成“矩阵”表格形式，并作“行”的变换化简。为了书写方便，我们用 r_1 表示第1行，而用 r_2-r_1 表示第2行减去第1行或说把第1行的-1倍加到第2行，等等。

$$\underset{\text{(对应于原方程组)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \underset{\text{(相当于消去2、3两方程中的}x_1\text{)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \underset{\text{(相当于第2个方程两边同除以2)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \underset{\text{(消去第3个方程中的}x_2\text{)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{11}\right)r_3} \underset{\text{(得}x_3=-2\text{)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow[r_1-5r_3]{r_2+2r_3} \underset{\text{(把}x_3=-2\text{分别代入方程1,2)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}} \xrightarrow{r_1-r_2} \underset{\text{(把}x_2\text{代入方程1)}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

最后一个“矩阵”表格对应了方程组的解

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

大家看到，这样利用矩阵化简解方程组的方法，简单明了。为了方便，我们称如下形式的数表

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

等为**矩阵**(Matrix)。一个有 m 行 n 列矩阵的一般形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中，a_{ij}称为矩阵的**元素**。矩阵一般用黑体大写英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…来表示。

我们称有 n 个未知数的一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.12}$$

为 n 元线性方程组，简称为**线性方程组**(System of Linear Equations)。其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$是常数项。若 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为0，称线性方程组(1.1.12)为 **n 元非齐次线性方程组**；若 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，称线性方程组(1.1.12)为 **n 元齐次线性方程组**。我们分别称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为方程组(1.1.12)的**系数矩阵**(Coefficient Matrix)和**增广矩阵**(Augmented Matrix)。

大家看到，在例1.1.1与例1.1.2的解题过程中，事实上是对线性方程组(1.1.3)与(1.1.11)的增广矩阵作类似于解方程组的“初等变换”的变换，把方程组的增广矩阵先化为一个形如(以方程组(1.1.3)的增广矩阵化简过程为例)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \end{pmatrix} \tag{1.1.13}$$

的**行阶梯形矩阵**。这个过程相当于我们过去解方程组中通过“消元法”把含有3个未知数的一个方程组逐步消元——减少未知数——化为仅含一个未知数的一元一次方程

$$-17x_3=17$$

然后我们逐步通过“代入法”，一步步求出 x_3，x_2，x_1。这一过程体现在继续对阶梯形矩阵(1.1.13)作变换，化为一个形如

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix} \tag{1.1.14}$$

的矩阵，我们称之为方程组(1.1.3)的**行最简形矩阵**。它的特征是每一行的第一个非零元为1，而1所在列的其他元素全部为零。由行最简形矩阵，我们可以直接写出方程组的解来。

一般地，如果一个矩阵的每个非零行的非零首元都出现在上一行非零首元的右边，同时没有一个非零行出现在零行(即该行元素全为零)之下，则称这种矩阵为**行阶梯形矩阵**。如果一个行阶梯形矩阵的每一个非零行的非零首元都是1，且非零首元所在列的其余元素都是零，则称这种矩阵为**行最简形矩阵**。下面的两个矩阵都是行阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&3\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&4&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}$ 是行最简形矩阵，而 $\boldsymbol{B}$ 不是行最简形矩阵。

下面“移植”上述方程组的初等变换到矩阵上来，我们称对矩阵作如下的变换

(1) 交换矩阵中两行的位置(记作 $r_i\leftrightarrow r_j$)；

(2) 用一个非零数乘矩阵的某一行(记作 kr_i)；

(3) 把矩阵的某一行乘数 k 后加到矩阵的另一行上(记作 r_j+kr_i)。

为矩阵的**初等行变换**。相应地，如果把上面三种变换中的行换成列，则我们有矩阵的**初等列变换**的概念。三种初等列变换分别记作 $c_i\leftrightarrow c_j$，kc_i，c_j+kc_i。(r,c 分别为矩阵行、列英文单词 Row, Column 的第一个字母)

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经行(列)初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 时，记作 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$。

由上面的讨论可知，用有限次初等行变换可以把任何矩阵化为一个行最简形矩阵。以后我们还会知道，这种行最简形矩阵是唯一的。

例 1.1.3 求矩阵的行最简形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&-1&-1\\2&-1&1&0&2\\-1&3&-1&1&-2\end{pmatrix}$$

解 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&-1&-1\\2&-1&1&0&2\\-1&3&-1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&-1\\0&-5&-5&2&4\\0&5&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1&-1\\0&-5&-5&2&4\\0&0&-3&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_3]{-\frac{1}{5}r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&-1\\0&1&1&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_2-r_3,\ r_1-3r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{15}&\frac{14}{15}\\0&1&0&\frac{4}{15}&-\frac{7}{15}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

例 1.1.4 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ x_2-x_3+x_4=-3\\ x_1+3x_2-3x_4=1\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3\end{cases}\tag{1.1.15}$$

解 对方程组的增广矩阵作初等行变换，化为行最简形

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-3&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&1&-3\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+7r_2]{r_3-5r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{r_4+2r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&0&2&-14\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1=-8\\ x_2-x_4=3\\ x_3-2x_4=6\end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=3+x_4 \\ x_3=6+2x_4 \end{cases} \tag{1.1.16}$$

我们看到，式(1.1.16)中方程组的解 x_1，x_2，x_3 可用 x_4 表示出来，x_4 可以任意取值。而当 x_4 取定一组值后，x_1，x_2，x_3 就可由式(1.1.16)求出，此时，我们称 x_4 为**自由未知量**。例如，取 $x_4=k$，则方程组(1.1.15)的解可以表示为

$$\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=3+k \\ x_3=6+2k \\ x_4=k \end{cases}$$

其中 k 可以是任意一个数。可以看到，这个方程组有无穷多个解。

例 1.1.5 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=3 \\ x_1+3x_2-x_3=2 \end{cases} \tag{1.1.17}$$

解 对方程组的增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是得到与原方程组同解的线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ 2x_2-x_3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

从最后一个方程可以看出，这个方程是无解的，所以原方程组无解。

从以上例子可以看出，一般来说，线性方程组的解可能有三种情况：有唯一解，有无穷多解和无解。这就是线性方程组解的全部可能情况。

练习 1.1

1. 把下列矩阵化为行最简形。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$。

2. 用初等行变换解下列线性方程组。