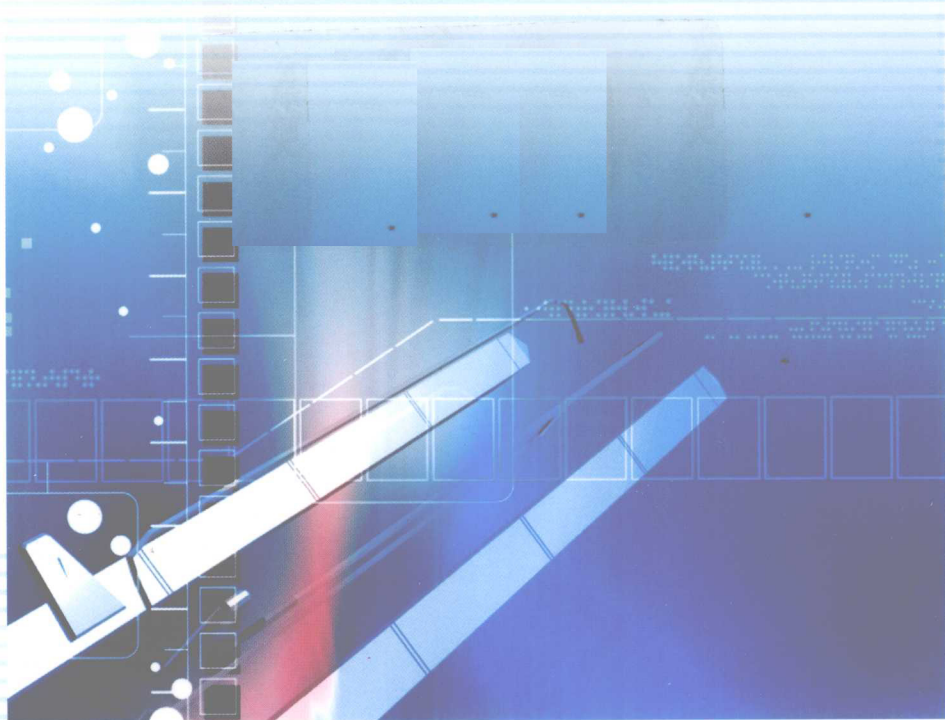


全国高等农林院校面向21世纪规划教材

高等数学学习指导

李任波 张 健◎主编



 科学出版社
www.sciencep.com

全国高等农林院校面向 21 世纪规划教材

高等数学学习指导

李任波 张 健 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是“全国高等农林院校面向 21 世纪规划教材”《高等数学》的配套学习指导书,根据教育部高等农林院校本科高等数学(少学时)有关《考试大纲》的内容和要求,为高等农、林、经管及医学类院校相关专业本(专)科学生学习高等数学课程的需要而编写而成。本书共 9 章内容,前 8 章每章主要内容分为三个部分:第一部分是《高等数学》各章的基本要求、知识点及知识结构图;第二部分是各章典型例题及解题方法介绍;第三部分是各章所有习题的详细解答。第 9 章是根据《考试大纲》编写的五套模拟测试题及参考答案。

本书可供有关院校教学辅导或学生自学时使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/李任波,张健主编. —北京:科学出版社,2010
(全国高等农林院校面向 21 世纪规划教材)
ISBN 978-7-03-028110-4

I. ①高… II. ①李… ②张… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 119202 号

责任编辑:王 彦/责任校对:柏连海

责任印制:吕春珉/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版	开本: 787×1092 1/16
2010 年 7 月第一次印刷	印张: 11 3/4
印数: 1—3 000	字数: 261 000

定价: 20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

销售电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138978-8208

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

编者名单

主 编

李任波 张 健

副主编

丁 琨 林 敏 任丽洁

编 者 (按姓氏拼音排序)

陈 焱 丁 琨 和亚琚 李任波

刘 琳 赖巧玲 林 敏 任丽洁

唐 伟 王清晖 谢 爽 张 健

张元铎 张中旭

前 言

本书是与“全国高等农林院校面向 21 世纪规划教材”《高等数学》相配套的学习指导书. 本书按《高等数学》教材的章次对应编写, 根据有关教学大纲和考试大纲的要求, 在各章的知识要点、知识结构图和典型例题分析上既注意到科学性和系统性, 又有一定的广度与深度, 较好地贯彻了“基础理论教育以应用为目的, 以必要、够用为度. 基础课程内容应当体现宽口径、具有通用性和稳定性”的精神. 适合高等农、林、经管及医学类相关院校的专业作为学习高等数学的学习指导书.

本书既是教学同步的学习指导书, 又是阶段复习及模拟测试的指导书. 它有助于帮助学生理解高等数学这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有较全面、深刻的理解和掌握, 有利于培养学生分析问题、解决问题的能力. 同时, 还可作为高等农林类硕士研究生招生统一考试的一本重要参考书.

本书共 9 章内容, 前 8 章每章主要内容分为三个部分: 第一部分是《高等数学》各章的基本要求、知识点及知识结构图; 第二部分是各章典型例题及解题方法介绍; 第三部分是各章所有习题的详细解答. 第 9 章是根据《考试大纲》编写的五套模拟试题及参考答案.

本书由李任波、张健主编. 第 1 章由林敏、陈焱编写, 第 2 章由林敏、赖巧玲编写, 第 3 章由张健、张元铎编写, 第 4 章由丁琨、谢爽编写, 第 5 章由丁琨、张中旭编写, 第 6 章由张健、任丽洁、李任波编写, 第 7 章由唐伟、刘琳编写, 第 8 章由李任波、王清辉、和亚珺编写.

本书是西南林业大学重点建设课程“高等数学”的研究成果. 本书在编写过程中, 参阅了大量的同类书, 并得到了西南林业大学教务处、教育改革和发展研究中心、科技处等部门的大力支持, 在此一并致谢!

由于编者水平有限, 书中难免存在不妥之处, 衷心希望广大读者批评指正.

编 者

2010 年 1 月 11 日

目 录

前言

第 1 章 函数与极限	1
1.1 基本要求	1
1.2 知识点及知识结构图	1
1.2.1 知识点	1
1.2.2 知识结构图	2
1.3 典型例题与解题方法	2
1.3.1 关于函数概念的题型	2
1.3.2 关于数列的极限	3
1.3.3 关于函数的极限	4
1.3.4 极限存在的两个准则方面的题型	4
1.3.5 用等价无穷小理论解决极限问题	5
1.3.6 间断点的类型问题	6
习题一	7
习题一参考答案	10
第 2 章 导数与微分	16
2.1 基本要求	16
2.2 知识点及知识结构图	16
2.2.1 知识点	16
2.2.2 知识结构图	17
2.3 典型例题与解题方法	17
2.3.1 有关导数定义的题型	17
2.3.2 有关四则求导法则的题型	18
2.3.3 几种常用的求导法则	19
2.3.4 高阶导数	22
2.3.5 关于微分的题型	24
习题二	25
习题二参考答案	28
第 3 章 微分中值定理及导数的应用	33
3.1 基本要求	33
3.2 知识点及知识结构图	33
3.2.1 知识点	33
3.2.2 知识结构图	35

3.3 典型例题及解题方法	35
3.3.1 微分中值定理相关证明	35
3.3.2 泰勒公式的应用	37
3.3.3 利用洛必达法则求极限	38
3.3.4 求函数的单调区间与极值	39
3.3.5 利用函数的单调性证明不等式	40
3.3.6 讨论方程的根	41
3.3.7 闭区间上的连续函数求最大、最小值	41
3.3.8 求最大、最小值的应用题	41
3.3.9 求曲线的凹凸区间与拐点	42
3.3.10 求函数的渐近线	43
3.3.11 函数作图	43
习题三	44
习题三参考答案	45
第4章 不定积分	49
4.1 基本要求	49
4.2 知识点及知识结构图	49
4.2.1 知识点	49
4.2.2 知识结构图	49
4.3 典型例题与解题方法	50
4.3.1 和原函数有关的不定积分	50
4.3.2 直接积分法	51
4.3.3 第一换元法	51
4.3.4 第二换元法	54
4.3.5 分部积分法	56
4.3.6 有理函数的积分	58
4.3.7 简单无理根式的积分	59
4.3.8 含三角函数的积分	60
习题四	62
习题四参考答案	64
第5章 定积分及其应用	74
5.1 基本要求	74
5.2 知识点及知识结构图	74
5.2.1 知识点	74
5.2.2 知识结构图	75
5.3 典型例题与解题方法	75
5.3.1 与定积分定义有关的计算	75
5.3.2 定积分的性质	76

5.3.3 积分上限函数及其导数	78
5.3.4 牛顿-莱布尼茨公式应用	79
5.3.5 定积分的换元积分法	80
5.3.6 定积分的分部积分法	83
5.3.7 广义积分(反常积分)	84
习题五	86
习题五参考答案	88
第6章 多元函数微分法及重积分初步	98
6.1 基本要求	98
6.2 知识点及知识结构图	98
6.2.1 知识点	98
6.2.2 知识结构图	101
6.3 典型例题与解题方法	102
6.3.1 求多元函数的定义域	102
6.3.2 求二重极限	102
6.3.3 证明二重极限不存在	104
6.3.4 二元函数的连续性	104
6.3.5 求多元函数的偏导数与高阶偏导数	105
6.3.6 全微分	107
6.3.7 全微分在近似计算中的应用	108
6.3.8 多元复合函数的求导法则	108
6.3.9 隐函数的求导	110
6.3.10 二元函数的极值与最值	110
6.3.11 利用二重积分概念与性质解题	113
6.3.12 交换积分次序与计算二次积分(累次积分)	113
6.3.13 二重积分的计算	115
习题六	117
习题六参考答案	119
第7章 无穷级数	127
7.1 基本要求	127
7.2 知识点及知识结构图	127
7.2.1 知识点	127
7.2.2 知识结构图	128
7.3 典型例题及其解法	129
7.3.1 关于级数的性质、概念	129
7.3.2 正项级数敛散性的判别	129
7.3.3 根据定义判别级数是绝对收敛还是条件收敛	129
7.3.4 幂级数的收敛半径和收敛域	130

7.3.5 求幂级数的和函数	131
习题七	131
习题七参考答案	133
第8章 微分方程初步	137
8.1 基本要求	137
8.2 知识点及知识结构图	137
8.2.1 知识点	137
8.2.2 知识结构图	137
8.3 典型例题与解题方法	138
8.3.1 可分离变量方程	138
8.3.2 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	138
8.3.3 一阶线性微分方程	139
8.3.4 可降阶的高阶方程	139
8.3.5 二阶常系数齐次线性方程	140
8.3.6 二阶常系数非齐次线性方程	140
8.3.7 简单应用	142
习题八	142
习题八参考答案	144
第9章 模拟测试题	155
模拟测试题(一)	155
模拟测试题(一)参考答案	157
模拟测试题(二)	159
模拟测试题(二)参考答案	161
模拟测试题(三)	163
模拟测试题(三)参考答案	164
模拟测试题(四)	167
模拟测试题(四)参考答案	168
模拟测试题(五)	170
模拟测试题(五)参考答案	173

第1章 函数与极限

1.1 基本要求

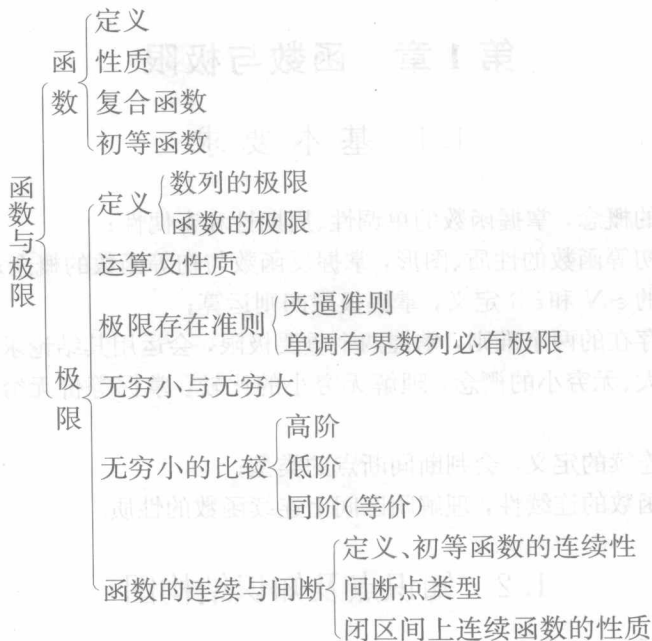
1. 理解函数的概念, 掌握函数的单调性、周期性和奇偶性;
2. 熟悉基本初等函数的性质、图形, 掌握反函数与初等函数的概念;
3. 了解极限的 $\epsilon-N$ 和 $\epsilon-\delta$ 定义, 掌握极限四则运算;
4. 了解极限存在的两个准则, 掌握两个重要极限, 会运用其结论求极限;
5. 了解无穷大、无穷小的概念, 理解无穷小的比较, 掌握等价无穷小, 并会用于求极限;
6. 理解函数连续的定义, 会判断间断点的类型;
7. 了解初等函数的连续性, 理解闭区间上连续函数的性质.

1.2 知识点及知识结构图

1.2.1 知识点

1. 函数.
 - (1) 函数定义、图像、定义域、值域;
 - (2) 函数的四大特性.
2. 数列的极限, 函数的极限.
 - (1) 定义;
 - (2) 性质.
3. 极限的运算法则, 存在准则.
4. 无穷小与无穷大, 无穷小的比较, 等价无穷小.
5. 函数的连续与间断, 连续函数的性质.

1.2.2 知识结构图



1.3 典型例题与解题方法

1.3.1 关于函数概念的题型

1. 已知函数表达式, 求定义域和值域.

例 1.1 求函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ 的定义域和值域.

解: 要使 $f(x)$ 有意义, 必须

$$-x^2 + x + 2 \geq 0,$$

解之, 得 $-1 \leq x \leq 2$, 即 $f(x)$ 的定义域为

$$D = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}.$$

为了求值域, 先令 $y = -x^2 + x + 2$, 则 y 是二次抛物线.

$$y_{\text{最大}} = \frac{4 \times (-1) \times 2 - 1^2}{4 \times (-1)} = \frac{9}{4}, \quad y_{\text{最小}} = 0.$$

$\therefore f(x)$ 的值域为 $\left[\sqrt{0}, \sqrt{\frac{9}{4}}\right]$, 即 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

2. 已知 $f[\varphi(x)]$, 求 $f(x)$.

例 1.2 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1-x^2}$, 求 $f(x)$.

解: 令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$, 于是

$$f(t) = \frac{\frac{1}{t} + \dots + \frac{1}{t}}{1 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{t}{t^2 - 1}.$$

因此

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

3. 已知 $f(x)$ 的定义域, 求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例 1.3 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, $g(x) = f(2x+1) - f(2x-1)$, 试求 $g(x)$ 的定义域.

解: 由 $0 \leq 2x+1 \leq 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, $0 \leq 2x-1 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ 求其交集得 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, 因此, $g(x)$ 的定义域为

$$D = \left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

1.3.2 关于数列的极限

1. 按定义作简单的证明.

例 1.4 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$.

证明: 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 \right| < \epsilon$,

由于

$$\left| \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 \right| = \left| \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}(n + \sqrt{n^2+1})} < \frac{1}{2n^2},$$

所以只须 $\frac{1}{2n^2} < \epsilon$ 即可, 于是取 $N = \left[\sqrt{\frac{1}{2\epsilon}} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 \right| < \epsilon$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$.

2. 数列的极限的计算.

例 1.5 设 $|a| < 1$, $|b| < 1$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+b+b^2+\dots+b^n}{1+a+a^2+\dots+a^n}$.

解: $\because 1+b+\dots+b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$, $1+a+\dots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1+b+\dots+b^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-b^{n+1}}{1-b} \right) = \frac{1}{1-b},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a+\dots+a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+b+\dots+b^n}{1+a+\dots+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}} = \frac{1-a}{1-b}.$$

例 1.6 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^3 + \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^3 - \frac{n}{4} \right]$.

解: $\because 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

$$\therefore \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^3 = \frac{1}{n^3} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = \frac{(n+1)^2}{4n}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^3 + \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^3 - \frac{n}{4} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^2}{4n} - \frac{n}{4} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.3.3 关于函数的极限

例 1.7 计算下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a > 0)$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{1}{2}x}{x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

解: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$;

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x+a}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x+a}} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x-a})(\sqrt{x+a})(\sqrt{x-a})}{\sqrt{x+a} \sqrt{x-a} (\sqrt{x+a})(\sqrt{x-a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{2a}}; \end{aligned}$$

(3) 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

(4) $\because \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0, \quad \left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1,$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$.

1.3.4 极限存在的两个准则方面的题型

1. 用夹逼法则解题.

例 1.8 计算下列数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(1) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$;

(2) $a_n = (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.

解: (1) $\because \frac{n}{(n+n)^2} < \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} < \frac{n}{n^2}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+n)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) = 0.$$

$$(2) \because 3^n < 1 + 2^n + 3^n < 3 \cdot 3^n, \therefore 3 < (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}} = 3.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3.$$

2. 用“单调有界数列必有极限”做题.

例 1.9 已知 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在

$$\because \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \cdots < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdots, \therefore \{a_n\} \text{ 单调增加.}$$

$$\text{又} \because \sqrt{2} < 2, \therefore a_n = \sqrt{2\sqrt{2\cdots 2}} < \sqrt{2\sqrt{2\cdots \sqrt{4}}} = 2.$$

$$\therefore a_n < 2 \text{ 有界, } \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在.}$$

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} \Rightarrow A = \sqrt{2A} \Rightarrow A^2 = 2A,$$

解得 $A_1 = 0$, $A_2 = 2$.

$$\text{由于 } \sqrt{2} < a_n < 2, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

例 1.10 设 $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

$$\because a_1 = a > 0, \therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{2}{a_{n-1}}} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) = \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{2a_n} (a_n^2 - 2) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 单调递减且有界. } \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在.}$$

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{2}{A} \right) \Rightarrow A^2 = 2 \Rightarrow A_1 = -\sqrt{2} (\text{舍去}), A_2 = \sqrt{2}.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}.$$

1.3.5 用等价无穷小理论解决极限问题

1. 常用的等价无穷小(当 $f(x) \rightarrow 0$ 时).

$$(1) \sin f(x) \sim f(x); \tan f(x) \sim f(x); \arcsin f(x) \sim f(x); \arctan f(x) \sim f(x)$$

$$1 - \cos f(x) \sim \frac{1}{2} f^2(x), 1 - \sqrt{\cos f(x)} \sim \frac{1}{4} f^2(x).$$

$$(2) e^{f(x)} - 1 \sim f(x), \ln[1+f(x)] \sim f(x), a^{f(x)} - 1 \sim f(x) \ln a.$$

$$(3) \sqrt[n]{1+f(x)} - 1 \sim \frac{1}{n} f(x), [1+f(x)]^n - 1 \sim n f(x).$$

2. 等价无穷小的应用.

例 1.11 求下列的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} (m, n \in N);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\sqrt[n]{1+x} - 1}.$$

解: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{1+(x-1)} - 1}{\sqrt[n]{1+(x-1)} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{m}(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)} = \frac{n}{m};$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\frac{1}{2}x} = 6;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\sqrt[n]{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a}{\frac{1}{n}x} = n \ln a.$$

3. 幂指函数的极限问题.

定理: 若 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) [f(x) - 1]}.$$

例 1.12 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{2}{\tan x}}.$

解: $\because \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\tan x} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\tan x} \cdot (1+5x-1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\tan x} = 10,$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{2}{\tan x}} = e^{10}.$$

例 1.13 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{5x+1}.$

解: $\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{3x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (5x+1) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} (5x+1) \left(\frac{3x+2}{3x-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(5x+1)}{3x-1} = 5,$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{5x+1} = e^5.$$

1.3.6 间断点的类型问题

例 1.14 设 $f(x) = \frac{\sin x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$, 试求 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

解: 当 $x=0, x=1, x=-1$ 时, $f(x)$ 的分母为 0, 故三个点都是 $f(x)$ 的间断点.

$$\begin{aligned}\text{当 } x=0 \text{ 时, } f(0-0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x+1} = -1.\end{aligned}$$

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x-1)x}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 第一类间断点中的跳跃型间断点.

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x(x-1)}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore x=1$ 是 $f(x)$ 第一类间断点中的可去型间断点.

$$\text{当 } x=-1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin x(x-1)}{-x(x^2-1)} = \infty, \therefore x=-1 \text{ 是第二类中的无穷型间断点.}$$

例 1.15 试确定 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 已知

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1; \\ 2x-a, & -1 < x < 1; \\ x^3+b, & x \geq 1. \end{cases}$$

解: 要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 须使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处连续即可.

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 = f(-1), \quad f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x-a) = -2-a.$$

令 $f(-1-0) = f(-1+0) = f(-1)$, 得 $a = -3$.

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+3) = 5, \quad f(1) = f(1+0) = 1+b.$$

令 $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$, 得 $b = 4$.

$\therefore$ 当 $a = -3, b = 4$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

习 题 一

1. 求下列函数的自然定义域.

$$(1) y = \sqrt{2x+3};$$

$$(2) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(2) y = \ln(x^2 - 4x + 3);$$

$$(4) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}.$$

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2 \lg x;$$

$$(2) f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x \sqrt[3]{x-1}.$$

3. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = \sqrt[3]{x-5};$$

$$(2) y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) y = \frac{2^x}{2^x + 1};$$

$$(4) y = 2 \sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right);$$

$$(5) y = \ln(x+4) + 2; \quad (6) y = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| = 1; \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

5. 证明函数 $f(x) = |x|$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限为零.

6. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^5 - 3x^2 + 5};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x^3}\right); \quad (10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{(x-2)^2};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}; \quad (12) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4 + 2x^3 - x + 1);$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}; \quad (14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x} \cos x;$$

$$(15) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2}; \quad (16) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(17) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}; \quad (18) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (2n+3)^3}{(n-1)(2n-1)(3n-2)};$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x}\right); \quad (20) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}).$$

7. 若 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + k}{x - 3} = 4$, 求 k 的值.

8. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} \quad (x \neq 0);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin x\right).$$

9. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x};$$