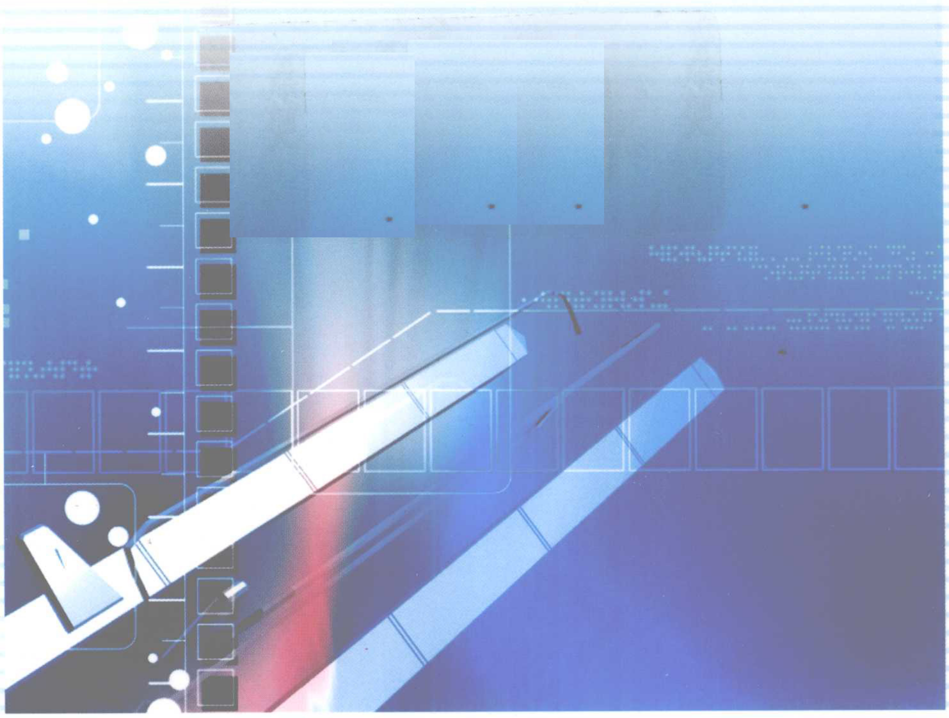
全国高等农林院校面向21世纪规划教材

高等数学学习指导

李任波　张　健◎主编



科学出版社
www.sciencep.com

全国高等农林院校面向21世纪规划教材

高等数学学习指导

李任波　张　健　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是“全国高等农林院校面向21世纪规划教材”《高等数学》的配套学习指导书，根据教育部高等农林院校本科高等数学（少学时）有关《考试大纲》的内容和要求，为高等农、林、经管及医学类院校相关专业本（专）科学生学习高等数学课程的需要而编写而成. 本书共9章内容，前8章每章主要内容分为三个部分：第一部分是《高等数学》各章的基本要求、知识点及知识结构图；第二部分是各章典型例题及解题方法介绍；第三部分是各章所有习题的详细解答. 第9章是根据《考试大纲》编写的五套模拟测试题及参考答案.

本书可供有关院校教学辅导或学生自学时使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/李任波，张健主编. —北京：科学出版社，2010
（全国高等农林院校面向21世纪规划教材）
ISBN 978-7-03-028110-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… ②张… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第119202号

责任编辑：王 彦/责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2010年7月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2010年7月第一次印刷 印张：11 3/4
印数：1—3 000 字数：261 000

定价：20.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138978-8208

编者名单

主　编

李任波　张　健

副主编

丁　琨　林　敏　任丽洁

编　者（按姓氏拼音排序）

陈　焱　丁　琨　和亚珺　李任波

刘　琳　赖巧玲　林　敏　任丽洁

唐　伟　王清晖　谢　爽　张　健

张元铎　张中旭

前　言

本书是与“全国高等农林院校面向21世纪规划教材”《高等数学》相配套的学习指导书.本书按《高等数学》教材的章次对应编写,根据有关教学大纲和考试大纲的要求,在各章的知识要点、知识结构图和典型例题分析上既注意到科学性和系统性,又有一定的广度与深度,较好地贯彻了“基础理论教育以应用为目的,以必要、够用为度.基础课程内容应当体现宽口径、具有通用性和稳定性”的精神.适合高等农、林、经管及医学类相关院校的专业作为学习高等数学的学习指导书.

本书既是教学同步的学习指导书,又是阶段复习及模拟测试的指导书.它有助于帮助学生对高等数学这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有较全面、深刻的理解和掌握,有利于培养学生分析问题、解决问题的能力.同时,还可作为高等农林类硕士研究生招生统一考试的一本重要参考书.

本书共9章内容,前8章每章主要内容分为三个部分:第一部分是《高等数学》各章的基本要求、知识点及知识结构图;第二部分是各章典型例题及解题方法介绍;第三部分是各章所有习题的详细解答.第9章是根据《考试大纲》编写的五套模拟测试题及参考答案.

本书由李任波、张健主编.第1章由林敏、陈焱编写,第2章由林敏、赖巧玲编写,第3章由张健、张元铎编写,第4章由丁琨、谢爽编写,第5章由丁琨、张中旭编写,第6章由张健、任丽洁、李任波编写,第7章由唐伟、刘琳编写,第8章由李任波、王清辉、和亚珺编写.

本书是西南林业大学重点建设课程“高等数学”的研究成果.本书在编写过程中,参阅了大量的同类书,并得到了西南林业大学教务处、教育改革和发展研究中心、科技处等部门的大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,衷心希望广大读者批评指正.

编　者

2010年1月11日

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　基本要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的单调性、周期性和奇偶性；

2. 熟悉基本初等函数的性质、图形，掌握反函数与初等函数的概念；

3. 了解极限的 ε-N 和 ε-δ 定义，掌握极限四则运算；

4. 了解极限存在的两个准则，掌握两个重要极限，会运用其结论求极限；

5. 了解无穷大、无穷小的概念，理解无穷小的比较，掌握等价无穷小，并会用于求极限；

6. 理解函数连续的定义，会判断间断点的类型；

7. 了解初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质.

1.2　知识点及知识结构图

1.2.1　知识点

1. 函数.

(1) 函数定义、图像、定义域、值域；

(2) 函数的四大特性.

2. 数列的极限，函数的极限.

(1) 定义；

(2) 性质.

3. 极限的运算法则，存在准则.

4. 无穷小与无穷大，无穷小的比较，等价无穷小.

5. 函数的连续与间断，连续函数的性质.

1.2.2 知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义
    - 性质
    - 复合函数
    - 初等函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列的极限
      - 函数的极限
    - 运算及性质
    - 极限存在准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界数列必有极限
    - 无穷小与无穷大
    - 无穷小的比较
      - 高阶
      - 低阶
      - 同阶(等价)
    - 函数的连续与间断
      - 定义、初等函数的连续性
      - 间断点类型
      - 闭区间上连续函数的性质

1.3 典型例题与解题方法

1.3.1 关于函数概念的题型

1. 已知函数表达式，求定义域和值域.

例 1.1 求函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$ 的定义域和值域.

解:要使 $f(x)$ 有意义，必须

$$-x^2+x+2\geqslant 0,$$

解之，得 $-1\leqslant x\leqslant 2$，即 $f(x)$ 的定义域为

$$D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}.$$

为了求值域，先令 $y=-x^2+x+2$，则 y 是二次抛物线.

$$y_{最大}=\frac{4\times(-1)\times 2-1^2}{4\times(-1)}=\frac{9}{4},\quad y_{最小}=0.$$

$\therefore$ $f(x)$ 的值域为 $\left[\sqrt{0},\sqrt{\frac{9}{4}}\right]$，即 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

2. 已知 $f[\varphi(x)]$，求 $f(x)$.

例 1.2 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}$，求 $f(x)$.

解:令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，于是

$$f(t)=\frac{\frac{1}{t}}{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{t}{t^2-1}.$$

因此

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}.$$

3. 已知 $f(x)$ 的定义域，求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例 1.3　已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，$g(x)=f(2x+1)-f(2x-1)$，试求 $g(x)$ 的定义域.

解：由 $0\leqslant 2x+1\leqslant 4\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$，$0\leqslant 2x-1\leqslant 4\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$ 求其交集得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$，因此，$g(x)$ 的定义域为

$$D=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}.$$

1.3.2　关于数列的极限

1. 按定义作简单的证明.

例 1.4　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}-1\right|<\varepsilon$，

由于

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}-1\right|=\left|\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(n+\sqrt{n^2+1})}<\frac{1}{2n^2},$$

所以只须 $\frac{1}{2n^2}<\varepsilon$ 即可，于是取 $N=\left[\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}-1\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$.

2. 数列的极限的计算.

例 1.5　设 $|a|<1$，$|b|<1$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+b+b^2+\cdots+b^n}{1+a+a^2+\cdots+a^n}$.

解：∵　$1+b+\cdots+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$，$1+a+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$，

∴　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+b+\cdots+b^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right)=\frac{1}{1-b}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a+\cdots+a^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

∴　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+b+\cdots+b^n}{1+a+\cdots+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}=\frac{1-a}{1-b}.$$

例 1.6 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3-\frac{n}{4}\right]$.

解：$\because\quad 1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$，

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3=\frac{1}{n^3}(1^3+2^3+\cdots+n^3)=\frac{(n+1)^2}{4n}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3-\frac{n}{4}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{4n}-\frac{n}{4}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n}=\frac{1}{2}.$$

1.3.3 关于函数的极限

例 1.7 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}x}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}+\lim\limits_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x-a})}{\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x-a})}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{2a}}；$$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

(4) $\because\quad \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x})}=0$，$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant1$，

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\vartheta\sqrt{x})=0$.

1.3.4 极限存在的两个准则方面的题型

1. 用夹逼法则解题.

例 1.8 计算下列数列的极限$\lim\limits_{x\to\infty}a_n$.

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}$；　　(2) $a_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

解：(1) $\because\quad \frac{n}{(n+n)^2}<\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}<\frac{n}{n^2}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+n)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4n}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=0.$

(2) $\because\ 3^n<1+2^n+3^n<3\cdot 3^n$，$\therefore\ 3<(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$，$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3.$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.$

2. 用"单调有界数列必有极限"做题.

例 1.9　已知 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解:先证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

$\because\ \sqrt{2}<\sqrt{2\sqrt{2}}<\cdots<\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdots$，$\therefore\ \{a_n\}$单调增加.

又$\because\ \sqrt{2}<2$，$\therefore a_n=\sqrt{2\sqrt{2\cdots 2}}<\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{4}}}=2.$

$\therefore\ a_n<2$ 有界，$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2a_n}\Rightarrow A=\sqrt{2A}\Rightarrow A^2=2A$，

解得 $A_1=0$，$A_2=2$.

由于 $\sqrt{2}<a_n<2$，$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=2.$

例 1.10　设 $a_1=a>0$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解:先证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

$\because\ a_1=a>0$，$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_{n-1}\cdot\frac{2}{a_{n-1}}}=\sqrt{2}.$

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{a_n}$$

$$=\frac{1}{2a_n}(a_n^2-2)\geqslant 0.$$

$\therefore\ \{a_n\}$单调递减且有界.　$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{2}{A}\right)\Rightarrow A^2=2\Rightarrow A_1=-\sqrt{2}$(舍去)，$A_2=\sqrt{2}.$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}.$

1.3.5　用等价无穷小理论解决极限问题

1. 常用的等价无穷小(当 $f(x)\to 0$ 时).

(1) $\sin f(x)\sim f(x)$；$\tan f(x)\sim f(x)$；$\arcsin f(x)\sim f(x)$；$\arctan f(x)\sim f(x)$

$$1-\cos f(x)\sim\frac{1}{2}f^2(x),\ 1-\sqrt{\cos f(x)}\sim\frac{1}{4}f^2(x).$$

(2) $e^{f(x)}-1\sim f(x)$, $\ln[1+f(x)]\sim f(x)$, $a^{f(x)}-1\sim f(x)\ln a$.

(3) $\sqrt[n]{1+f(x)}-1\sim\dfrac{1}{n}f(x)$, $[1+f(x)]^n-1\sim nf(x)$.

2. 等价无穷小的应用.

例 1.11　求下列的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}(m,\ n\in N)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sqrt{x+1}-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}$.

解:(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{1+(x-1)}-1}{\sqrt[n]{1+(x-1)}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{m}(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)}=\dfrac{n}{m}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}x=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\frac{1}{2}x}=6$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{\sqrt[n]{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln a}{\frac{1}{n}x}=n\ln a$.

3. 幂指函数的极限问题.

定理:若 $\lim f(x)=1$, $\lim g(x)=\infty$, 则

$$\lim[f(x)]g(x)=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}.$$

例 1.12　计算$\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{2}{\tan x}}$.

解:∵　$\lim\limits_{x\to0}(1+5x)=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\tan x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\tan x}\cdot(1+5x-1)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x}{\tan x}=10$,

∴　$\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{2}{\tan x}}=e^{10}$.

例 1.13　计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{5x+1}$.

解:∵　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{3x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(5x+1)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(5x+1)\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3(5x+1)}{3x-1}=5$,

∴　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{5x+1}=e^5$.

1.3.6　间断点的类型问题

例 1.14　设 $f(x)=\dfrac{\sin x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$, 试求 $f(x)$的间断点, 并判断其类型.

解:当 $x=0$, $x=1$, $x=-1$ 时, $f(x)$的分母为 0, 故三个点都是 $f(x)$的间断点.

当 $x=0$ 时，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}$

$$=\lim_{x\to0}-\frac{1}{x+1}=-1.$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-1)x}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1.$$

∴　$x=0$ 是 $f(x)$ 第一类间断点中的跳跃型间断点．

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x(x-1)}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

∴　$x=1$ 是 $f(x)$ 第一类间断点中的可去型间断点.

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin x(x-1)}{-x(x^2-1)}=\infty$，∴　$x=-1$ 是第二类中的无穷型间断点.

例 1.15　试确定 a，b 的值，使 $f(x)$ 在 R 上连续，已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant-1;\\ 2x-a, & -1<x<1;\\ x^3+b, & x\geqslant+1.\end{cases}$$

解: 要使 $f(x)$ 在 R 上连续，须使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处连续即可．

$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1}x^2=1=f(-1)$，$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1}(2x-a)=-2-a$.

令 $f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)$，得 $a=-3$.

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$，$f(1)=f(1+0)=1+b$.

令 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$，得 $b=4$.

∴　当 $a=-3$，$b=4$ 时，$f(x)$ 在 R 上连续．

习　题　一

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\sqrt{2x+3}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(2) $y=\ln(x^2-4x+3)$；　　(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

3. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x-5}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；　　(4) $y=2\sin3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=\ln(x+4)+2$； (6) $y=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

5. 证明函数 $f(x)=|x|$当 $x\to 0$ 时极限为零.

6. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$； (2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3+2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$； (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$； (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{x^5-3x^2+5}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)$； (10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$； (12) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^4+2x^3-x+1)$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$； (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+x}\cos x$；

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$； (16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$； (18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(2n+3)^3}{(n-1)(2n-1)(3n-2)}$；

(19) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}\right)$； (20) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

7. 若$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，求 k 的值.

8. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\ (x\neq 0)$；

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$.

9. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；