

工程數學 觀念分析 (下冊)

(附最新研究所考題)

3版

陳志偉 編著

標竿出版社

3版序

2807866

工程數學 觀念分析

—陳志偉 編著—

▼ 轟動・搶購

■感謝各位熱烈的支持和愛護，第二版 2,600 套搶購一空，即日三版供應。

■內容除增訂外，下冊另加 76 年最新考題，彌足珍貴。

▶ 本書包含

■集本班 90 餘班工數授課精華。

■集工數公式、定理、觀念、題庫之大全。

■下冊附歷屆及最新 76 年試題。

▶ 適合對象

■升研究所博、碩士班最佳寶庫。

■在職進修及高特考最佳利器。

■各大專院校教學參考最佳書籍。



工程數學 觀念分析

(下冊)

版權所有 • 翻譯必究



高標準系列叢書(E204)

中華民國76年 9月 3版

書 名：工程數學 觀念分析
作 者：陳志偉
發行人：陳毓明
出版者：標竿出版社
北市南昌路一段43號2樓
3926796-7 3916005 3934653
印刷者：東陞美術印刷有限公司
北市德昌街185巷12弄14號
3055321 · 3050420
郵政劃撥：0 5 9 7 0 7 4 -9
帳 戶：賴祝光

中華民國75年 6月初版

中華民國75年 12月 2版

局版台業字第3150號

定價：250元



致親愛的偉文學友

感謝各位多年來對偉文熱烈的支持和鼓勵，才能一天天茁壯，而堂堂邁入第6年；更感謝衆多學友的熱心關注和推薦，使得更多的學員湧向偉文，也承蒙多位助教、講師和教授參加研習的行列，並給予多方的批評和指教，大大提升了我們教學的水準和成果。

工程數學是大部份學科的基礎，也是衆多研究所必考的課程；而偉文升研究所更是傾全力灌注在工程數學的教學上，累積6年多來的教學經驗，從第一個班（E1）開始至今已超過九十個班次，76年研究所成果輝煌榜首林立，金榜耀眼，震撼了全國大學城，此乃偉文學友的成就，也是偉文的榮譽。

爲了加強工程數學和學習的效果起見，也是應衆多學友的要求起見，本班自前年發行工程數學總整理，不但學友購買踴躍，更引起不肖出版商的盜印、盜賣，可見本班教材彌足珍貴！今年我們重新編印，教材一律革新，並附加最新之研究所試題，更臻於完善！

本教材係陳志偉老師精心收集、編著和修訂，並融會歷屆各校研究所、期中、期末考、高特考等試題而成，爲參加工數應考必備之良書，並歷經多位工數老師校正，謹此對數位編輯老師致謝，並感謝各位教師、助教提供各校試題，並熱心解題；同時感謝偉文同仁打字、編校的辛勞。

敬請您一秉過去的愛心，繼續給予愛護和關照，並請您給予多方的批評和指教，讓您和偉文永遠走上勝利成功之路！

偉文考情資訊中心 陳龍敬啓

序 言

史塔頓博士 (Thomas F. Staton) 在其所著「讀書方法」一書中，開章明義的說“我們看到、聽到億萬的事物，却從未予以留意，這行為叫作感官吸收。感官吸收不導致記憶，也不產生學習，而許多效果不佳的學習即歸因於此。若對事物加以留意，你可以將感官吸收變成短期記憶。但是短期記憶只有其特定性能和用途，所以在學習上，應以長期記憶為目標，這就需要將所學的東西概念綜合組織起來，並理解其中意義、重要性和關係，這叫做智識的處理”。

“工程數學”這門智識對理工科技人員或工程分析人員，是一門很基本很重要之學科，如何引導讀者對工程數學能在最短時間內達到最有效的學習，乃是作者撰寫本書的最主要動機，但是要使工程數學之觀念與分析技巧能植入一個人的長期記憶庫中，並不只是多多益善地、拼命地死記一些工數題型及解題技巧而已，對於一個工數學習者而言，其問題在於如何將你所學習到的工數觀念、題型及技巧，納入你的長期記憶庫中永久保存，如何在需要用到它時，能正確無誤取出應用於工程分析上。為達成上述目標，必須將我們所學習到屬於短期記憶的題型與技巧，利用觀念的理解與比較作一有系統、有組織的整理與歸納，才能達到學習的最佳效果。

茲將本書學習步驟及主要三大特色簡述如下：

(1)觀念闡釋：工數是訓練一個知道如何思考，如何推演，且具獨立分析能力之工程師，所以對每一公式，題型解法及應用必須要有透徹、清晰之觀念，也就是說，你必須要知道：為什麼要這樣解？為什麼可以這樣解？還有沒有其他方法可用？……等等，這也是一般學工數者，最容易忽略的一點，也因此大大降低了學習的效果，本書試以最簡潔之敘述，作一詳密的說明，希望讀者在這一部分，多作思考，並作比較。

(2)類型與技巧整理：在建立了清晰的基本概念或知其所以然後，很自然地

就知道其如何分析的步驟與方法，但本書除了詳盡的介紹其分析技巧外，而且不分章節地將各種相同類型的題目作一整理組織成一完整的題型，俾利學習效果與興趣。例如工數考題中若有出現定積分題型者，不外乎下列類型之一：①可用 Gamma 函數解者②可用 Beta 函數解者③可用拉氏變換解者④可用 Fourier 變換解者⑤可用 Mellin 變換解者⑥可用複變積分或殘數定理理解者⑦可用矩陣二次式化簡解者，……等等。

(3)綜合比較：本書在建立了題型與技巧後，最後再將所學之觀念與技巧作綜合比較，亦即要瞭解為什麼有這些差異？這些差異會導致什麼之結果？例如，在學習完 Taylor 級數，Fourier 級數及 Laurent 級數後，你有沒有想過，上述三級數在應用上各有什麼異同？各適用於什麼樣類型之工程問題？……

除了上述三大特色之外，在本書每章第一頁，您將看到一個內容大綱或學習重點，它給您一個扼要預告，讓您知道本章之範圍與重點，這是本書之一創舉，幫助您將內容清清楚楚地在心中組織起來，達到事半功倍的學習效果。本書第一章首先將工數中常用的特殊函數及其應用，作一綜合整理。在第二章至第六章以五章之篇幅，對常微分方程作一系統之介紹，其中第六章 Sturm-Liouville 邊界值問題在未來實際工程分析上應用非常廣，而一般工數書籍大都簡略介紹而已，所以本書特在此章作一有系統且完整之探討。接著兩章介紹二大積分變換法：拉氏變換及傅氏變換與級數，並整理出其應用於微分方程式求解之優越性。第九章開始，以總整理之方式，將微積分純量場內之微分積分之理論，衍伸應用至向量場中之微積分特性，亦即向量分析，並緊接着第三章矩陣分析及線性代數之探討。第十六章、第十七章，介紹複變數函數理論及其應用。第十八章開始，將各種偏微分方程及其邊界值問題作一系列整理。最後再加兩章差分方程式及變分學，以增加本書之完整性及廣泛性。舉凡歷年來各校土木、機械、電機、資訊……等工科研究所入學考題蒐集殆盡，並將其有系統的分門別類，詳解並歸納於各章精選範例及習題中，此乃其他工數書籍所沒有的，希望對有志於高層次研究工作者，或參加研究所入學考試者，提供一份理想之教材，並與您共勉！

在學完本書的每一章節後，讀者可依每一重點或觀念為主而學習出題目，因

爲學會出題目，在準備考試上很有幫助，當然在考試上得高分不是讀工數之唯一目的，但是假裝把分數當作學習上不重要的東西也是很可笑的事。在工數一門中，可以提出之好問題，不在少數，但畢竟也是有限，隨著您在研習時，編製問題之技巧有所增進，您會發現您所編製之問題出現在考題之情形，也會越來愈多，平時將這些題目記下來，考試前再複習一下，將對您的考試成績有莫大之幫助。

最後，在本書四年編輯歷程當中，承蒙陳龍先生提供所有研究所考古題及斥資出版，黃立人老師提供代數部分試題詳解，陳宏謀老師對本書提供許多寶貴之意見，以及內人平時幫助整理講義，無時的精神鼓勵及最後校對工作之辛勞，及其他偉文工作同仁之校稿，無法一一備載，謹在此致最深忱之謝意；原稿及詳解雖屢經驗算校正，然謬誤在所難免，尙祈讀者不吝指正！

陳志偉 謹識

目 錄

(下冊)

第16章 複變數函數

- 16 · 1 複數代數 1
- 16 · 2 複數之幾何意義 4
- 16 · 3 複變數函數 12
- 16 · 4 解析函數 18
- 16 · 5 Cauchy-Riemann 公式 25
- 16 · 6 解析函數之重要性質 33
- 16 · 7 基本解析函數 36

第17章 複數定積分

- 17 · 1 複平面之線積分 1
- 17 · 2 Green theorem之複數表示法 8
- 17 · 3 Cauchy 定理 10
- 17 · 4 Cauchy 積分通式 17
- 17 · 5 Taylor 級數及 Laurent 級數 27
- 17 · 6 異點與殘數 38
- 17 · 7 殘數定理 42
- 17 · 8 特殊定積分之計算 $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 59
- 17 · 9 瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$ 之求法 67

- 17 · 10 瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iaz} F(x) dx$ 之求法 74
- 17 · 11 避點積分 (Indented contours) 84
- 17 · 12 $\int_0^{\infty} x^{p-1} F(x) dx$ 之積分 97
- 17 · 13 基本變換 100

第18章 偏微分方程之通解

- 18 · 1 偏微分方程概論 1
- 18 · 2 一階偏微分方程式通解—Lagrange 法 2
- 18 · 3 二階線性偏微分方程式概論 12
- 18 · 4 二階及高階線性常係數偏微分方程齊性解之求法 14
- 18 · 5 二階偏微分方程特別積分之求法 22

第19章 熱方程式及其邊界值問題

- 19 · 1 熱方程式之推演 1
- 19 · 2 一維零溫端熱傳問題 4
- 19 · 3 絕緣端之熱傳問題 7
- 19 · 4 半無窮長熱傳導問題 10
- 19 · 5 無窮長棒之熱傳問題 13
- 19 · 6 非齊性邊界值熱傳問題 17
- 19 · 7 具絕緣面圓盤之熱傳問題 23
- 19 · 8 二維球體熱傳問題 25

第20章 Laplace方程式之邊界值問題

- 20 · 1 概論 1
- 20 · 2 2-D 卡氏坐標之 Dirichlet 邊界值問題 4
- 20 · 3 二維圓柱坐標 Dirichlet 邊界問題 7
- 20 · 4 二維混合邊界條件問題 15

第21章 波動方程式之邊界值問題

- 21 · 1 波動方程式之推演 1
- 21 · 2 一維固定端細弦之振動 4
- 21 · 3 一維半無窮長細弦之振動 6
- 21 · 4 一維全無窮長細弦之振動 8
- 21 · 5 外力作用下之細弦振動 10
- 21 · 6 D'Alembert method 解波動方程式 13
- 21 · 7 二維平板之振動問題 20
- 21 · 8 圓形薄膜之振動 23
- 21 · 9 非齊性暫態邊界值問題 27
- 21 · 10 變換法解偏微分方程式 30

第22章 有限差分及差分方程式

- 22 · 1 差分之基本運算 1
- 22 · 2 一階及二階微分之有限差分近似 10
- 22 · 3 差分方程式概論 14
- 22 · 4 二階差分方程式之通解求法 15

第23章 變分學

- 23 · 1 前言 1
- 23 · 2 單變數函數之極值 2
- 23 · 3 自由極值之充分與必要條件 10
- 23 · 4 拘束極值之求法 15
- 23 · 5 單變數泛函數之極值分析 27
- 23 · 6 自然邊界條件及轉換條件 32
- 23 · 7 變分符號與微分符號之類比 33
- 23 · 8 單變數泛函數之變分原理 36

- 23 · 9 雙變數泛函數之變分原理 37
- 23 · 10 可變端點 (Variable end point) 40
- 23 · 11 積分式拘束條件之變分原理 42
- 23 · 12 二階通式及 Sturm-Liouville 方程式 44

附錄

試題集錦

第16章

複變數函數

• 學習大綱

複變數函數：

1. 複數代數
2. 複變函數極限與連續
3. Riemann-Cauchy 公式
4. 解析函數之五大特性
5. 複數五大基本函數

§ 16•1 複數代數

1 複數定義

$$\text{令 } \sqrt{-1} = i$$

複數用 z 表示，則通式爲 $z = x + iy$

稱 x 爲實部， y 爲虛部，表成 $\begin{cases} x = R_e z \\ y = I_m z \end{cases}$

2 複數之基本運算：

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

(1) 相等 (Equality) :

若且唯若 $z_1 = z_2$ 則 $\begin{cases} x_1 = x_2 & \text{實部相等} \\ y_1 = y_2 & \text{虛部相等} \end{cases}$

觀念分析

① 不等式 $z_1 < z_2$ or $z_1 \geq z_2$ ，沒有意義

② 不等式之成立，係針對複數之絕對值（或模數），方有意義

(2) 加法 (Addition) :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \text{亦即} \begin{cases} \text{實部相加} \\ \text{虛部相加} \end{cases}$$

『說明』 如 力學實驗中“平行四邊形”法則

(3) 減法 (Subtraction) : 加法逆運算

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

(4) 乘法 (Multiplication) :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

若 視 i 爲一實數，且 $i^2 = -1$ ，則依實數乘法原則即得。

(5) 除法 (Division) : 乘法逆運算

$$\textcircled{1} \quad z = \frac{z_1}{z_2} \quad \therefore \quad z_1 = z \cdot z_2 \quad \text{得} \quad x_1 + iy_1 = (x + iy)(x_2 + iy_2)$$

2 工程數學

$$\text{i.e. } x_1 + i y_1 = (x_2 x - y_2 y) + i (y_2 x + x_2 y)$$

$$\text{聯立解 } x_1 = x_2 x - y_2 y$$

$$y_1 = y_2 x + x_2 y$$

$$\text{得 } x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

相當於

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} \\ &= \frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)} \quad \text{有理化} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2 + y^2} \\ &= x + i y \end{aligned}$$

(6) 共軛運算 (Conjugate) :

$$\text{【定義】 } z = x + i y$$

$$\bar{z} = x - i y \quad \text{稱 } \bar{z} \text{ 爲 } z \text{ 之共軛複數}$$

觀念分析

$$\textcircled{1} \quad z + \bar{z} = 2x \quad \therefore x = R_e z = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$$

$$\textcircled{2} \quad z - \bar{z} = 2i y \quad \therefore y = I_m z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$$

$$\textcircled{3} \quad (\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(\overline{z_1 - z_2}) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$(\overline{z_1 z_2}) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\textcircled{4} \quad z = \bar{z} \quad \text{表 } z = x + 0i \text{ 表實數}$$

(7) 絕對值或模數 (Modulus)

【定義】 $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

觀念分析

$$\textcircled{1} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\textcircled{2} |z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|$$

$$\textcircled{3} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad z_2 \neq 0$$

$$\textcircled{4} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{三角不等式}$$

$$\textcircled{5} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

$$\textcircled{6} |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

$$\textcircled{7} |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

$$\textcircled{8} \because z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\therefore |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$\textcircled{9} \because |z| \geq x, |z| \geq y$$

$$\therefore |z| \geq R, z \quad |z| \geq I_m z$$

§ 16.2 複數之幾何意義

① 幾何圖形表示法——Complex plane (Argand diagram)

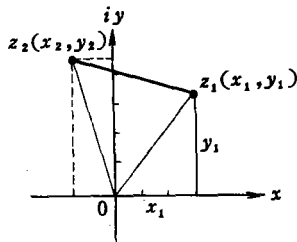
$z = x + iy$ 可視為一組實數序對表示 (x, y)

i.e. 2-D 卡式坐標

z - plane

橫軸——實部 x

縱軸——虛部 y



$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

表複平面 (Complex plane) 上 z_1, z_2 之距離。

觀念分析

① a : 已知複數

$|z - a| < \rho$ 表圓心為 a , ρ 為半徑之一圓

$|z - a| < \rho$ (open circular disk) 開區域

$|z - a| \leq \rho$ (closed circular) 閉區域

$|z - a| > \rho$ (exterior of the circular) 圓外部

$\rho_1 < |z - a| < \rho_2$ 且 $\rho_2 > \rho_1$ 為一環

② 向量表示法

$$z = x + iy$$

視為一位置向量 (position vector)

$$\vec{OP} = x + iy$$

