College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

微积分学习指导

闫站立 编

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

微积分学习指导

Weijifen Xuexi Zhidao

闫站立 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是为教科书《微积分》编写的学习指导书，书中除了回答学生在学习过程中可能提出的问题外，还为教科书中几乎所有的习题做了解答（包括习题选解）。另外，本书还编选了与《微积分》章节内容同步的模拟试题，其中一部分选自历年（非数学专业）研究生入学试题数学一（理工类）和数学三（经济类），另一部分是编者根据历年考研试题的难易程度和命题人的设计思路编写的试题，或从网站（www.lxwjf.com）上摘选的网友提供的习题，并配备了解答或给初学者的提示，解题方法丰富。

本书具有一定的独立性，可作为非数学类专业本科生微积分课程的学习辅导书或研究生入学考试的复习用书，还可供青年教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/闫站立编.—北京:高等教育出版社，2010.5

ISBN 978-7-04-029224-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①闫… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 054878 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 黄建英
版式设计 张 岚 **责任校对** 俞声佳 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2010年5月第1版
印　　张	44	印　　次	2010年5月第1次印刷
字　　数	830 000	定　　价	49.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 29224-00

前言

本书是为学生学习《微积分》(闫站立编)一书编写的学习指导书，书中除了回答学生可能提出的问题外，还想通过解题教给学生做习题或试题的方法。《微积分》一书中已经为许多难做的习题给出了解答，这里再补充一些习题解答。为了逐步培养和提高学生的应试能力，这里又编选了与《微积分》一书章节内容同步的模拟试题，这些模拟试题中，一部分选自历年（非数学专业）研究生入学试题数学一（理工类）和数学三（经济类），另一部分是编者编写的试题或从网站（www. lxwjf. com）上摘选的网友提供的习题。微积分的习题成千上万，任何一本习题集都不可能穷尽所有的题目，因此，你做习题时要在解题方法上多比较、多总结，许多看似不同的习题在解题方法上往往是相同的或类似的。

尽管每一个习题或试题都有答案、解答或（足够使你能够接着做下去的）提示，你最好还是先尝试自己做，实在不会做时，再去看题后的解答或提示，这样不仅可以培养自己解题的毅力和能力，而且有时你可能会给出与书中不同的解题方法。

学习微积分要做够一定数量的习题，才能够真正理解其中的概念和结论，并掌握解题方法。求函数的微分（或导数）和积分，基本上都是利用规则和套用公式，所以要记住教科书中的公式（微分公式，常用积分公式）；做其他的习题，也要记住教科书中给出的有关公式（例如解微分方程，要记住有关一般解的公式），以及几个简单初等函数的幂级数展开式和特殊的极限值与积分值。考试时，进入考场前要再看一看你不容易记住的重要公式。

研究生入学试题，总的来说，基础知识覆盖面大、综合性强和重点突出，体现了着重测试运用所学知识分析问题和解决问题的能力。目前考试题的类型分为填空题、（单项）选择题和解答题（计算题或证明题）。与其他专门编写的关于模拟试题的书的编写方法不同，本书是把试题按内容和解题方法分别编入相关章节的习题解答之后，以便让学生在学习过教科书中的内容，并做完或基本做完节后的习题时，能够及时地测试一下自己的应试能力。由于有些试题可能有不同的解法，所以同一个试题可能出现在不同的章节中。

对于填空题和解答题中的计算题，在方法上没有本质的不同（仅在难易程度或做题所需时间上有所区别）。选择题实际上是判断题，根据自己所掌握

的微积分知识，或经过简单的演算，选择出符合题意的选项。目前各类试卷中的选择题，一般都是“单项选择题”（从四个选项中选出一个符合题意的选项），做题时适宜选用下面的方法：直接计算法；排除法；猜想法。

所谓“直接计算法”，就是直接计算后，对照选项选出符合题意的选项。

所谓“排除法”，就是经过分析或计算，逐一排除错误选项，遇到符合题意的选项就终止。

所谓“猜想法”，就是根据自己的有关知识，猜想（判断）是哪个选项（猜想过程中可能用到排除法），即填入最大可能正确的选项。（若能再排除一个选项，猜对的概率不小于0.33；若能排除两个选项，猜对的概率不小于0.50。）

注　试题中的填空题和选择题比较容易做，分值也比较低。考试做题时，若先做填空题和选择题，应控制做题时间在每题3分钟左右；若先做解答题，最后应留出时间（每题约4分钟）做填空题和选择题。

例1　已知函数$f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图像（抛物线）的对称轴为$x=1$，且通过点（2，0），则$\dfrac{f(-1)}{f(1)}$等于【　　】。

（A）3　　（B）2　　（C）-2　　$\boxed{\text{(D)}}$ -3

分析　适宜用直接计算法。为此，需要具体求出数值

$$\begin{cases}f(-1)=a-b+c\\ f(1)=a+b+c\end{cases}\qquad (※)$$

根据它通过点（2，0），则

$$0=4a+2b+c\qquad (※※)$$

再根据它（抛物线）的对称轴为$x=1$，则［最高（低）点的横坐标］$1=\dfrac{-b}{2a}\Rightarrow b=-2a$，代入（※※）得$c=0$；再把$b=-2a$和$c=0$代入（※），则得$\dfrac{f(-1)}{f(1)}=\dfrac{3a}{-a}=-3$，选（D）。

例2　设有两个不相等的实数a和b均满足方程$x^2-3x=1$，则$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$的数值为【　　】。

（A）-18　　（B）18　　$\boxed{\text{(C)}}$ -36　　（D）36

分析　a和b就是方程$x^2-3x=1$的两个不等的根

$$a=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\quad 和\quad b=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

若用直接计算法，显然有点麻烦（考试时间有限）。不妨先用猜想法（考试有

剩余时间时，再返回用直接计算法)：从 a 和 b 的数值看出（$b<0$，$a>|b|$），排除为正值的选项（B）和（D），应当选（A）或（C），选对的概率不小于0.50。【用直接计算法算出的答案是（C）。】

编　者

2009/05/20

目录

微积分（一） 一元函数微积分

第一篇 微积分浅释

第二篇 补 编

第三篇 微积分的进一步应用

微积分（二） 多元函数微积分

第 0 章

中学数学知识摘要

§0-1 集合及其运算

因为本书中只用到其中一些记号，所以没有选配习题.

§0-2 实数

习题解答

（5）伯努利（Bernoulli）不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

其中 x_1，x_2，…，x_n 同符号且都大于 -1. 特别地，

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx(x>-1)$$

证 当 $n=1$ 时，结论显然成立；假设不等式对 $n=k$（$k<n$）成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k$$

则有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)+(x_{k+1}+x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1})\\&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}\end{aligned}$$

即不等式对 $n=k+1$ 也成立. 根据数学归纳法，不等式对任何正整数 n 都成立.

注：对于任意正整数都成立的有限等式或不等式，可以不用数学归纳法.

（6）$\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.【证明见教科书中选解.】

补充习题

1. 设 n 为正整数. 证明不等式 $(n!)^2 \geqslant n^n$ 或 $n! \geqslant (\sqrt{n})^n$

证 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \cdot \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$

于是有

$$(n!)^2 = (n \cdot 1)[(n-1) \cdot 2] \cdots [(n-k+1) \cdot k] \cdots [2 \cdot (n-1)](1 \cdot n)$$

而右端的一般项

$$\begin{aligned}(n-k+1)k &= [(n-k+1)k-n]+n = [n(k-1)-k(k-1)]+n \\ &= (k-1)(n-k)+n \geqslant n\end{aligned}$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant n$. 因此, $(n!)^2 \geqslant n^n$.

2. 设 n 为正整数. 证明不等式 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n \geqslant 2)$.

提示: 用数学归纳法.

§0－3 数列与级数

数列的极限是近代极限论的重要组成部分. 为了暂时避开近代极限理论, 本书把有关数列极限的内容分成了两部分, 这里讲的是数列极限的基本知识, 它大体上相当于中学数学中的内容; 数列极限的另一部分内容编排在本书的§5－6中.

学习要点

(1) 当 n 无限增大时, 若数列 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 能够无限接近一个常数 c, 则称 c 为数列 a_n 的**极限**, 记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \text{ (简记成 } \lim a_n = c\text{) 或 } a_n \to c \ (n\to\infty) \text{ (简记成 } a_n \to c\text{)},$$

并称数列 a_n 为**有极限的数列**或**收敛数列**. 按照目前中学数学中的说法: 对于数列 a_n, 若它与常数 c 能够满足条件:

任意给定正数 ε (不管它多么小), 都有相对应的正整数 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $\lvert a_n - c \rvert \leqslant \varepsilon$ (即 $c-\varepsilon \leqslant a_n \leqslant c+\varepsilon$),

则称 c 为数列 a_n 的**极限**. 它是近代极限论中数列极限的 "$\varepsilon - N$" 说法.

求数列的极限, 一般用数列极限的运算规则.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 的前 n 项和

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

又组成一个数列，若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是**收敛的**或**收敛级数**，并称 s 为**级数的和**，记成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s$$

若没有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是**发散的**或**发散级数**. 特别，等比级数

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0,\ q \neq 0)$$

当 $|q| < 1$ 时收敛，且级数的和为

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q} = \frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$$

而当 $|q| \geq 1$ 时，等比级数是发散的（当然也就没有和）.

注①：这里不采用有的书中关于数列的记号 $\{a_n\}$，是因为集合论中把它用作集合的记号，而且其中元素不允许重复出现. 我们把数列记成"a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$"或简记成"a_n"，是要把数列看成函数的特殊情形，即"$a_n = f(n)$"，就像"$f(x)$"一样.

注②：从直观上看，

"若 $a_n \leq x_n \leq b_n$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$，则也有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$"

在近代极限论中，称它为"夹挤规则". 你做题时，把它看作求数列极限的规则之一就行了. 特别，

$$\text{若 } 0 \leq x_n \leq b_n \to 0 \ (n \to \infty)\text{，则} \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

注③：记号"$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$"与"$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$"都表示和，前者是有穷和，后者是无穷和（或级数的表示式），即

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

不同的是：$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 是个确定的数值，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 可能是确定的数值【当级数收敛时】，也可能仅仅是个记号【当级数发散时】.

习题解答

1. 先把数列做恒等变换，再利用极限运算规则求出极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)}$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}}=\frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}=\frac{2}{\dfrac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}-\dfrac{n^2}{2(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\dfrac{(n+1)n}{2}-\dfrac{n^2}{2(n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-n^2}{2(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}(2-0)=1$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}$

$$=\frac{1}{3}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\frac{1}{3}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1\cdot3}{2\cdot2}\dfrac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\cdots+n)-[1+2+\cdots+(n-1)]}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{(1+n)n}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. 设有数列 a_n（$n=1, 2, \cdots$）. 若有

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=c$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. 【见教科书中选解，p. 011.】

3. 设数列 $a_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$（$n=1, 2, \cdots$），即

$$1, 0, 1, 0, \cdots, \frac{1-(-1)^n}{2}, \cdots$$

为什么说它没有极限？【见教科书中选解，p. 011.】

4. 举例说明：若数列 a_n 与 b_n（$n=1, 2, \cdots$）都没有极限，而数列 a_n+b_n 与 a_nb_n 可能会有极限.

例如，

$$a_n: 1, 0, 1, 0, \cdots, \frac{1-(-1)^n}{2}, \cdots;$$

$$b_n: 0, 1, 0, 1, 0, \cdots, \frac{1+(-1)^n}{2}, \cdots$$

则 a_n+b_n：1，1，1，1，…与 a_nb_n：0，0，0，0，…都有极限.

5. 设数列 a_n 有极限（即收敛），而数列 b_n 没有极限（即发散）. 你对数列 a_n+b_n 与 a_nb_n 是否有极限可以做出什么结论？【见教科书中选解，p. 011.】

6. 设 $a>1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

证 根据二项式公式，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$a^n=[1+(a-1)]^n=1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-1)^2+\cdots+(a-1)^n$$

$$\geqslant\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$$

则 $0\leqslant\frac{n}{a_n}\leqslant\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}\to 0$（$n\to\infty$），因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

注 根据此结论，若 $|a|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na^n=0$. 事实上，若 $a=0$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} na^n=0$；若 $a\neq 0$ 且 $|a|<1$，则 $\dfrac{1}{|a|}>1$ 且 $0\leqslant |na^n|=\dfrac{n}{\left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n}\to 0$ $(n\to\infty)$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}|na^n|=0\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} na^n=0$.

7. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$ $(h_n\geqslant 0)$，则当 $n\geqslant 2$ 时，

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n\geqslant \frac{n(n-1)}{2}h_n^2\geqslant \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

于是，$0\leqslant h_n\leqslant \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\to 0$ $(n\to\infty)$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1+0=1$$

8. 研究下列级数的收敛性，若收敛，求出它的和：

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\ (2n+1)}+\cdots$.

解 通项 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，则前 n 项和为

$$\begin{aligned} s_n&=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

(2) $\log\dfrac{2}{1}+\log\dfrac{3}{2}+\cdots+\log\dfrac{n+1}{n}+\cdots$.

解
$$\begin{aligned} s_n&=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}\\ &=\log 2+(\log 3-\log 2)+\cdots+[\log(n+1)-\log n]=\log(n+1)\end{aligned}$$

因为不存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\log(n+1)$，所以上面的级数发散.

(3) $1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}+\cdots$. 【见教科书中选解，p. 012.】

总结：以后做题时，可以直接用的结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$ ($a>1$) 或$\lim\limits_{n\to\infty}na^n=0$ ($|a|<1$).

(4) 设有数列 a_n ($n=1, 2, \cdots$). 若有极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=c$，则也有极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

(5) 若数列 a_n 有极限，而数列 b_n 没有极限，则数列 ($a_n\pm b_n$) 必定没有极限.

(6) 数列：$a, 0, a, 0, \cdots, \dfrac{1-(-1)^n}{2}a, \cdots$ ($a\neq0$) 没有极限.

(7) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$.

(8) 当$|q|<1$时，$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\dfrac{a}{1-q}=\dfrac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$.

§0-4 函数概念

解不等式

为了求函数的定义域，有时需要解不等式（组）：

$$f(x)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}g(x),\ f(x)\underset{(<)}{>}g(x)\quad\text{或}\quad\begin{cases}f_1(x)\geqslant g_1(x),\\ f_2(x)>g_2(x),\end{cases}\quad\text{等}$$

1. 解不等式：$2+x-x^2>0$.

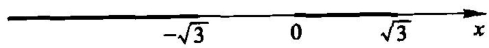
分析：$2+x-x^2>0\Leftrightarrow(1+x)(2-x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}1+x>0,\\ 2-x>0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1<0,\\ x-2>0,\end{cases}$【无解】.

因此，不等式 $2+x-x^2>0$ 的解为：$-1<x<2$ 或写成 $(-1, 2)$.

注：把解写成不等式“$-1<x<2$”或区间“$(-1, 2)$”都可以.

2. 解不等式：$3x-x^3\geqslant0$.

解 $3x-x^3\geqslant0$，即 $x(3-x^2)\geqslant0\Leftrightarrow$①$\begin{cases}x\geqslant0,\\ 3-x^2\geqslant0\end{cases}$或②$\begin{cases}x\leqslant0,\\ 3-x^2\leqslant0,\end{cases}$其中不等式组①的解是 $[0, \sqrt{3}]$，不等式组②的解是 $(-\infty, -\sqrt{3}]$，所以不等式 $3x-x^3\geqslant0$ 的解是 $[0, \sqrt{3}]$ 或 $(-\infty, -\sqrt{3}]$，即并集 $(-\infty, -\sqrt{3}]\cup[0, \sqrt{3}]$



第 2 题图

注：不等式组$\begin{cases}f(x)\leqslant0\ (\geqslant0,\ <0,\ >0),\\ g(x)\leqslant0\ (\geqslant0,\ <0,\ >0)\end{cases}$的解是其中两个不等式解的交集；而上面那个不等式 $3x-x^3\geqslant0$ 的解，应当是不等式组 (1) 和 (2) 解的