三度带

高斯、克吕格坐标换带表

纬度 0°—55°

三度带编算小组编

测绘出版社

—73

三

高斯、克吕格坐标
换带表

緯度 0°—55°

三度带编算小組编

測繪出版社

本表包含3°带坐标换算表Ⅰ与换算简表Ⅱ，可供3°与3°带、3°与6°带以及6°与6°带坐标互相换算之用；表Ⅰ精度1毫米，用于三角测量的精密計算，表Ⅱ精度1米，用于测图及其他低精度的計算。

本表附有說明，載有使用方法与算例，并扼要叙述了本表所用公式，編算方法，誤差分析以及如何編制最利实用之表的問題。关于本表詳細的研討，可参考編者所著“高斯、克吕格坐标的换带”一文。

本表可供全国各测繪单位計算作业之用。测繪工程技术人員研究有关之問題以及测繪院校有关的教学与实习，均可参考或采用。

三度带高斯、克吕格坐标换带表
纬 度0°—55°
三度带编算小组编
（根据本社纸型重印）

测 绘 出 版 社 出 版
北 京 印 刷 二 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

1975年5月北京新一版・1975年5月北京第一次印刷
印数4100册・定价1.20元
统一书号：15039・新21

3° 帶坐标換帶表

目　　錄

坐标换帶表的說明

坐标換帶表

3° 帶高斯、克呂格坐标換帶表的說明

§1 坐标換帶所依据的公式

坐标的換帶，就是把一点在一投影帶的坐标換算为相隣投影帶的坐标；其法之一，就是利用換帶表。这本換帶表的編算，是依据作者所导出的公式，导出的方法：选定"补助点"M于分帶子午綫上，並採取已知点 P_1 的"对称点" P_2（对于椭球面上分帶子午綫而言），然后將有关"在投影平面上計算一点之坐标的方法与公式"（在此处M为已知点，P_2为所求点）加以归納与演变，以得出直接的換帶公式。

現在实用上"在高斯投影平面上計算坐标"所用方向改化数 δ 与距离改化因数m的算式，仅适用于百公里以內之边長；为使換帶公式在最不利情况下达到 $1mm$ 的精度（按下式的 $\triangle x$ 为50公里，$\triangle y$、y_0 各为240公里进行估計），須另求更精密的 δ 与m，得其式如下：

$$\left.\begin{aligned}
\delta = &\frac{\triangle x}{6R_0^2}(3y_0+\triangle y)+\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\triangle y(6y_0^2+4y_0\triangle y+\triangle y^2)-\frac{\eta^2 t}{3R_0^3}\triangle x^2(2y_0+\triangle y)\\
&-\frac{\triangle x}{360R_0^4}(60y_0^3+90y_0^2\triangle y+45y_0\triangle y^2+7\triangle y^3)\\
m = &\frac{1}{6R_0^2}(3y_0^2+3y_0\triangle y+\triangle y^2)-\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\triangle x(6y_0^2+8y_0\triangle y+3y^2)\\
&+\frac{1}{72R_0^4}(3y_0^4+6y_0^3\triangle y-3y_0\triangle y^3-\triangle y^4)\\
&+\frac{\triangle x^2}{24R_0^4}(y_0^2+y_0\triangle y)+\frac{\triangle x^2\triangle y^2}{90R_0^4}\\
&\triangle x=x-x_0,\ \triangle y=y-y_0,\ \eta=e'\cos B_0,\ t=\tan B_0
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

式中：B_0、R_0、γ_0、$(x_0,\ y_0)$依次代表"起算点"（在此处为补助点M）的緯度、平均曲率半徑、平面子午綫收斂角、縱橫坐标，$(x,\ y)$为"他端点"（在此处为P_1或P_2）的縱橫坐标，e'为旋轉椭球体的第二偏心率。

由(1)式出发，按上述方法导出坐标換帶的一般公式如下：

$$\left.\begin{aligned}
x_2 = &x_0-n\triangle x_1+m\triangle y_1-m_1(\triangle x_1^2-\triangle y_1^2)-2n_1\triangle x_1\triangle y_1-m_2\triangle y_1(3\triangle x_1^2-\triangle y_1^2)\\
&+n_2\triangle x_1(\triangle x_1^2-3\triangle y_1^2)+m_3(\triangle x_1^4+\triangle y_1^4-6\triangle x_1^2\triangle y_1^2)\\
&+4n_3\triangle x_1\triangle y_1(\triangle x_1^2-\triangle y_1^2)\\
-y_2 = &y_0+m\triangle x_1+n\triangle y_1-n_1(\triangle x_1^2-\triangle y_1^2)+2m_1\triangle x_1\triangle y_1-n_2\triangle y_1(3\triangle x_1^2-\triangle y_1^2)\\
&-m_2\triangle x_1(\triangle x_1^2-3\triangle y_1^2)+n_3(\triangle x_1^4+\triangle y_1^4-6\triangle x_1^2\triangle y_1^2)\\
&-4m_3\triangle x_1\triangle y_1(\triangle x_1^2-\triangle y_1^2)\\
&\triangle x_1=x_1-x_0,\qquad \triangle y_1=y_1-y_0
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

式中：$(x_1、y_1)$、$(x_2、y_2)$依次为已知点 P_1 在原坐标带与相隣坐标带之坐标，而

$$
\left.\begin{aligned}
m &= -\sin 2\gamma_0 & n &= -\cos 2\gamma_0 \\
m_1 &= A\sin 3\gamma_0 & n_1 &= A\cos 3\gamma_0 \\
m_2 &= -C\cos 4\gamma_0 - D\sin 4\gamma_0 & n_2 &= C\sin 4\gamma_0 - D\cos 4\gamma_0 \\
m_3 &= \frac{5}{8}\frac{y_0}{R_0^4}\sin 2\gamma_0 & n_3 &= \frac{y_0}{12R_0^4} \\
A &= \cos\gamma_0\left\{\frac{y_0}{R_0^2} - \frac{2\eta^2 t}{R_0^3}y_0^2\tan\gamma_0 - \frac{y_0^3}{3R_0^4}\right\} \\
C &= \frac{1}{6R_0^2}\sin 2\gamma_0 + \frac{4\eta^2 t}{3R_0^3}y_0\cos 2\gamma_0 \\
D &= \left(\frac{y_0}{R_0^2}\cos\gamma_0\right)^2
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

为了驗証(2)、(3)式之正確，作者曾將 Hristow 根据“複数表示的正形投影条件”所得之公式，加以与(2)、(3)等精度的扩充，得出(2)式中各系数为：

$$
\left.\begin{aligned}
m &= -2t(l_0\cos B_0) - \tfrac{2}{3}t(1-2t^2+3\eta^2+2\eta^4)(l_0\cos B_0)^3 \\
&\quad -\tfrac{1}{15}t(4-22t^2+4t^4+30\eta^2-90\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^5 \\
n &= -1+2t^2(l_0\cos B_0)^2+\tfrac{2}{3}(2t^2-t^4+6\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^4 \\
m_1 &= \frac{3}{N_0}t(1+\eta^2)(l_0\cos B_0)^2+\frac{1}{2N_0}t(1-13t^2)(l_0\cos B_0)^4 \\
n_1 &= \frac{1}{N_0}(1+\eta^2)(l_0\cos B_0)-\frac{1}{6N_0}(1+31t^2-2\eta^2+55\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^3 \\
m_2 &= -\frac{1}{3N_0^2}t(1+5\eta^2)(l_0\cos B_0)-\frac{1}{9N_0^2}t(37-26t^2)(l_0\cos B_0)^3 \\
n_2 &= -\frac{1}{3N_0^2}(3-4t^2+6\eta^2-20\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^2 \\
m_3 &= \frac{5}{4N_0^3}t(l_0\cos B_0)^2 \\
n_3 &= \frac{1}{12N_0^3}(1+6\eta^2-12\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)
\end{aligned}\right\} \quad (3)'
$$

式中 l_0 为“补助点”的經差，$N_0=R_0\sqrt{1+\eta^2}$ 为該点卯酉圈之曲率半徑。应用 y_0、γ_0 之精密的“投影公式”，將(3)式化为$(l_0\cos B_0)$之函数，所得結果与(3)′式相較，仅 n_1 与 n_3 中之微項略有差異，其对于下面(4)式中 y_2 之影响($\triangle y_1=240\ km$时)約为0.5mm。計算“换带表”时，(3)′式远不如(3)式之簡易。

(2)式适用于“补助点”选于分帶子午綫上的任意位置(即 x_0 可为任意值)。但为换算簡便計，应选取一定的“补助点”，以使其 x_0 等于已知点 P_1 之 x_1，此时 $\triangle x_1=0$，于是由(2)式得实用公式如下：

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1+(m+m_1\triangle y_1)\triangle y_1+\delta x = x_1+\left\{m+(m_1+m_2\triangle y_1)\triangle y_1\right\}\triangle y_1+\sigma x \\
\mp y_2 &= y_0+(n+n_1\triangle y_1)\triangle y_1+\delta y = y_0+\left\{n+(n_1+n_2\triangle y_1)\triangle y_1\right\}\triangle y_1+\sigma y
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{array}{l} y_0 \text{ 永为正值，} y_1 \text{ 采用其在坐标系中应有之符号} \\ \text{由}\frac{\text{西}}{\text{东}}\text{帶换至}\frac{\text{东}}{\text{西}}\text{帶时，采用} \mp y_2\text{、} \triangle y_1 = \pm y_1 - y_0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \delta x = m_2\triangle y_1^3 + m_3\triangle y_1^4 & \sigma x = m_3\triangle y_1^4 \\ \delta y = n_2\triangle y_1^3 + n_3\triangle y_1^4 & \sigma y = n_3\triangle y_1^4 \end{array}\right\} \quad (5)$$

(4)式中包含 δ 之式应用較簡，但若$\triangle y_1$大于80公里，且欲保持 $1mm$ 之精度时，則須应用其 σ 式。

有关本节所述之詳情，可參看拙作“高斯、克吕格坐标的换帶”。

§2 换帶常数的計算

(3)至(5)式中之 y_0、m、n、m_1、n_1、m_2、n_2、δx、δy、σx、σy，命名为“换帶常数”，可按一定間隔之整数 x_0 与分帶子午綫之經差 l_0 編算为表，这就成为“$(2l_0)°$帶换帶表”。这本“3°帶换帶表(表Ⅰ)”，即按 x_0 =偶数公里与 $l_0=1.5°$編成。这种“3°帶换帶表”，可供下列四种坐标换帶之用：(1)3°—3°帶，(2)3°—6°帶，(3)6°—3°帶，(4)6°—6°帶。但第(4)种换帶中，需要兩次3°帶之换帶計算，算工加倍，誤差亦大{参見§3(二)、(三)与§5(一)}，因此我們另編有“6°帶换帶表”，專供这种换帶之用。

玆述編算方法如下：

(一) 內插公式与內插表

“內插法”可減輕計算工作，故常採用。在“换帶常数”的計算中，採用白塞尔內插法。在最后换帶表(表Ⅰ)中制定y_0的內插表时，採用斯提林內插法。

設有表列函数 $f(t)$及其各次差如下表：

列 号	t	$f(t)$	一次差 $\triangle'$	二次差 $\triangle''$	三次差 $\triangle'''$	…
…	…	…				
−2	$t_0-2\omega$	$f(t_0-2\omega)$				
			$\triangle'_{-\frac{3}{2}}$			
−1	$t_0-\omega$	$f(t_0-\omega)$		$\triangle''_{-1}$		
			$\triangle'_{-\frac{1}{2}}$		$\triangle'''_{-\frac{1}{2}}$	
0	t_0	$f(t_0)$		$\triangle''_0$		…
			$\triangle'_{\frac{1}{2}}$		$\triangle'''_{\frac{1}{2}}$	
1	$t_0+\omega$	$f(t_0+\omega)$		$\triangle''_1$		
			$\triangle'_{\frac{3}{2}}$			
2	$t_0+2\omega$	$f(t_0+2\omega)$				
…	…	…				

斯提林式

$$\left.\begin{array}{l} f(t_0+h) = f(t_0) + n\triangle'_0 + \frac{1}{2}n^2\triangle''_0 + \cdots \\ n = \dfrac{h}{\omega}, \qquad \triangle'_0 = \frac{1}{2}(\triangle'_{-\frac{1}{2}} + \triangle'_{\frac{1}{2}}) \end{array}\right\} \quad (6)$$

白塞尔式

$$\left.\begin{array}{l} f(t_0+h)=f(t_0)+n\triangle'_{\frac{1}{2}}+B_2(\triangle''_0+\triangle''_1)+\cdots \\ n=\dfrac{h}{\omega}, \qquad B_2=\frac{1}{4}n(n-1) \end{array}\right\} \quad (7)$$

若二次差相等或其差$\triangle'''$小于60，上两式可仅采用至二次差，此时两式形异而实同。命

$$\delta=\frac{\triangle'_0}{\omega}, \qquad \delta'=\frac{\triangle''_0}{\omega}, \qquad d\delta=\frac{h}{2\omega}\delta' \quad (8)$$

（其中δ为每单位之“平均一次差”，δ'为每单位之“二次差”，亦等于相邻两δ之差。）则斯提林式变为下之形式：

$$f(t_0+h)=f(t_0)+h\left\{\delta+d\delta\right\} \quad (9)$$

按白塞尔式（至$\triangle''$项）之反插式为

$$n=\frac{h}{\omega}=\left\{df+d(df)\right\}\div\triangle'_{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} df=f(t_0+h)-f(t_0) \\ d(df)=-B_2(\triangle''_0+\triangle''_1) \end{array}\right\} \quad (11)$$

在内插計算中，編制下述之“內插表”—“数域之函数”表，最利实用。編制之法：先“反解”函数$z=f(t)$为$t=\Phi(z)$，使z等于拟定的某一“等差級数”z_1、z_2、$z_3\cdots$（如0.5、1.5、2.5…），求其相应之t_1、t_2、$t_3\cdots$，然后将各相邻两z之“中数”（如1、2、3、…）列为下表：

$$\left.\begin{array}{lllll} t= & t_1 & t_2 & t_3 & t_4\cdots \\ z=f(t)= & \dfrac{z_1+z_2}{2} & \dfrac{z_2+z_3}{2} & \dfrac{z_3+z_4}{2}\cdots & \end{array}\right\} \quad (12)$$

就得“t数域之函数$f(t)$”表。用此表內插时：看出已知t位于某两个表列t值之間后，可立即查得$z=f(t)$之値，其最大誤差为等差級数之“半差”，而此誤差（即半差）乃編制此表时所应事先拟定者。（8）、（11）式的$d\delta$、$d(df)$，皆可編成“数域之函数”表，編算本换带表时，曾多次用之。例如：若备有B_2表以查n，則由下式就可編成“df数域之函数$d(df)$”表：

$$B_2=-d(df)/(\triangle''_0+\triangle''_1), \qquad df=n\triangle'_{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

在“换带常数”的直接計算中，尹引数間隔(ω)之选择，均遵守下之原則：力求ω甚大，但以仅需要簡单的二次差插算为限。

（二）B_0、y_0、γ_0、m、n的計算

y_0、γ_0以及求R_0、$\eta_2 t$所需之B_0的决定，利用下述資料：

（1）“緯度0°—30°的高斯克吕格投影表”的原始計算数值（較精密）。

（2）緯度30°—55°者：有关計算x之項，采用“苏联投影表”；有关計算y、γ之各項，另算得緯度每5′之精密值。

（3）緯度15°—55°的R_0，根据“苏联大地位置計算表”；緯度0°—15°的R_0，按$R_0=\dfrac{c}{V^2}$算得，而V为編算（1）項投影表中已算得者。

上述投影表均以緯度B为引数，但本換帶表拟以“补助点”（經差$l_0=1°.5$）的x_0（偶数公里）为引数，开始計算时，仅已知(x_0, l_0)，而不知B_0。故用下法利用投影表：
首先根据前述(1)、(2)項投影表之精密值，按$l_0=1°.5$以及間隔$5'$的B算出x、y、γ；然后根据(10)式，按偶公里数之x_0“反插”緯差所相应的“內插引数”n，且求B_0；並用(7)式內插y_0、γ_0，用(3)式計算m、n。

此处所得与x_0相应的B_0、y_0、γ_0，为以下其余“換帶常数”的“起算数据”。

前述各投影表，均系採用克拉索夫斯基橢球体；因此，这本換帶表，仅适用于以該橢球体为依据的高斯、克呂格坐标的換帶。

（三） m_1 n_1 的 計 算

根据(3)式，按x_0每20公里直接計算m_1、n_1，然后用(7)式內插x_0每2公里之相应值。

（四） m_2、n_2、m_3、n_3 的 計 算

根据(3)式，按x_0每40公里同时直接計算m_2、n_2、m_3、n_3，然后用比例內插法（即仅用(7)式中之$\Delta'_{\frac{1}{2}}$項），插算x_0每2公里之m_2、n_2，並插算x_0每百公里中央(50公里)之m_3、n_3，以供計算δ、σ之用。

（五） σx、σy、δx、δy 的 計 算

將σ、δ編成“Δy_1数域之函数表”，应用最便。反解(5)式之Δy_1，得出編算此表之公式：

$$(\Delta y_1)_x=(10^{15}m_3)^{-\frac{1}{4}}(\sigma x)^{\frac{1}{4}}, \quad (\Delta y_1)_y=(10^{15}n_3)^{-\frac{1}{4}}(\sigma y)^{\frac{1}{4}} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}(\Delta y_1)_x&=(10^4 m_2^{\frac{1}{3}})^{-1}(\delta x)^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{3}m_3(10m_2^{\frac{1}{3}})^{-5}(\delta x)^{\frac{2}{3}}+\frac{m_3^2}{3(10^6 m_2^3)}\delta x\\(\Delta y_1)_y&=(10^4 n_2^{\frac{1}{3}})^{-1}(\delta y)^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{3}n_3(10n_2^{\frac{1}{3}})^{-5}(\delta y)^{\frac{2}{3}}+\frac{n_3^2}{3(10^6 n_2^3)}\delta y\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

上兩式的σ、δ∧皆以(mm)为單位，Δy_1以(km)为單位。此項“σ、δ表”，依x_0每百公里編一表，且按“σ、$\delta=0.5$、1.5、$2.5\cdots$”編算而得。編算时，m_2、n_2、m_3、n_3均採用x_0每百公里中央(50公里)之相应值。为保証換帶計算之精度，用(15)式編算“δ表”时，Δy_1仅算至80公里，Δy_1自此值起至240公里，則用(14)式編算“σ表”。为簡化上兩式之計算，应先編好$(0.5)^i$、$(2.5)^i\cdots$之表，其$i=\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$。

(15)式为由“逐漸趋近法”解得的无穷級数之主項，当$(10^3\frac{m_3}{m_2}\Delta y_1)$、$(10^3\frac{n_3}{n_2}\Delta y_1)$大于1时，級数不收斂，此式不再适用。但其中$\Delta y_1$在其最大值80公里的情况下，$(10^3\frac{m_3}{m_2}\Delta y_1)$均不超过0.0012，仅$(10^3\frac{n_3}{n_2}\Delta y_1)$在$x_0=4450$、4550公里处之值大于1，此时$\delta y=0$。

（六） 計 算 采 用 的 小 数 位 数

各“換帶常数”的計算，完全使用計算机，除(14)、(15)式中各項因子外，均未使用对数。

对于最后换帶表(表Ⅰ)所列之小数而言：求 m、n 之 γ_0 以及与 δ、σ 相应之 $\triangle y_1$ 均多算一位，m_1、n_1、m_2、n_2 均多算兩位。至于 y_0：因投影公式之精度不足且为避免(二)項中劳而无益之高次差內插，故仅算至与“列表位数”相同的米以下四位小数；实则 y_0 列表至四位小数，並非在求第四位之完全正確，仅在于避免換帶計算中內插时发生过大的“湊整誤差”，以免加倍影响于 y_2，內插所得的 y_0 最后仍湊整至三位小数。

各“换帶常数”之計算过程中所用之小数位数，均已力求其不影响上述“計算小数位数”之精度。

§3 换帶表的編制与校核

(一) 换帶表中各項的說明

表Ⅰ中各換帶常数的符号和單位，均已載于其数列的上方。各常数右旁之 δ_m、δ_n、δ_{m_1}、δ_{n_1}，各为相应常数的“每公里一次差”，供“比例內插”之用。δ_{y_0} 为 y_0 的“每公里的平均一次差”，各页並載“$\triangle x$ 数域之函数 $d(\delta_{y_0})$”表，以供按下式(参見(9)式)进行內插之用：

$$\left.\begin{aligned} y_0\text{之內插值} &= y_0+\triangle x\left\{\delta_{y_0}+d\left(\delta_{y_0}\right)\right\} \\ \triangle x &= x_1-x_0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中 x_1 为“换帶点”的縱坐标，x_0 为略小于 x_1 的“表列引数”。“$\triangle x$ 数域之函数 $d(\delta_{y_0})$”表，按下式(参見(8)式)編得：

$$\triangle x=\frac{4000}{(\delta_{y_1}-\delta_{y_0})}d(\delta_{y_0})\text{公尺} \tag{17}$$

其中 δ_{y_1}、δ_{y_0}、$d(\delta_{y_0})$ 均以 0.1mm 为單位，δ_{y_1}、δ_{y_0} 依次代表“內插間隔”下端与上端之 δ_{y_0}。每頁“$d(\delta_{y_0})$表”中表头上之数値，就是 $(\delta_{y_1}-\delta_{y_0})$ 之值。

表列小数之位数，不宜偏多偏少；偏多則編表与內插均感困难，偏少則精度不够。权衡得失，决定列表小数位数如表Ⅰ。

(二) 换帶表之校核計算与統計

換帶常数全系二人对算，編成表Ⅰ后又作最后校核；其法：除全部檢算 δ_{y_0}、δ_m、δ_n、δ_{m_1}、δ_{n_1} 相隣項之差是否均匀外，又用下法：

选取 $l=3^\circ.5$ 之各点，其緯度 B 为每度(0°—55°)之3′、20′、40′。据此 $(3^\circ.5, B)$ 以及 $(0^\circ.5, B)$、$(-2^\circ.5, B)$，用§2(二)項所述之投影表，算得各該点在本坐标帶与隣帶及其下一隣帶之坐标 $(x_1、y_1)$、$(x_2'、y_2')$、$(x_2''、y_2'')$。然后，根据本換帶表(表Ⅰ)將 $(x_1、y_1)$ 換算为隣帶之坐标 $(x_2'、y_2')$，繼將此 $(x_2'、y_2')$ 再換算为其隣帶之坐标 $(x_2''、y_2'')$。比較兩法所得之 $(x_2'、y_2')$、$(x_2''、y_2'')$ 是否相差过大，$(x_2'、y_2')$ 相差超过 $3mm$ 或 $(x_2''、y_2'')$ 相差超过 $5mm$ 时，則依次將上述之“校核計算”以及有关的換帶常数与投影表之計算，全部进行檢查。若檢查証其无誤，則略变 B 之分数，按上法另作“校核計算”，以驗 $(x_2'、y_2')$、$(x_2''、y_2'')$ 之相差。下表中 $(x_2''、y_2'')$ 的差数超过上述限制的一点(緯度6°3′)，略变緯度后另作“校核計算”，$(x_2'、y_2')$、$(x_2''、y_2'')$ 之差数均已不超过上述限制。变更緯度前后的差異情况之不同，应归因于兩点之投影与換帶計算中各种誤差之数值及其符号不尽相同，因而其累积之大小亦異。

上述“校核計算”之法，又可同时收取“校核新編投影表”之利。茲將“校核計算”中兩

法所得(x_2'、y_2')、(x_2''、y_2'')之差異情況統計如下表：

差異之毫米数 (m m)	x_2'之差異情况		y_2'之差異情况		x_2''之差異情况		y_2''之差異情况	
	个 数	百分数	个 数	百分数	个 数	百分数	个 数	百分数
0	69	41.8	43	26.1	35	21.2	19	11.5
1	86	52.1	65	39.4	78	47.3	53	32.1
2	10	6.1	43	26.1	33	20.0	40	24.3
3			14	8.4	17	10.3	29	17.6
4					1	0.6	19	11.5
5					1	0.6	4	2.4
6							1	0.6
共 計	165	100.0	165	100.0	165	100.0	165	100.0

应注意：上述差異数，包含投影与換帶計算的兩种誤差在內。而(x_2''、y_2'')的差異数又包含(x_2'、y_2')的誤差在內，它也就是用“3°帶換帶表”进行“6°帶坐标”換帶时之差異数。

（三） 換帶計算結果的誤差分析

換帶結果之誤差的來源，分析如下：

（1） 公 式 誤 差

根据推演換帶公式(2)、(4)式时所保持的精度标准，在最不利情况下，換帶公式的誤差当在 1mm 以內。

（2） 換帶常数的計算誤差

y_0、γ_0 的誤差中，包含其算式及其計算誤差。在 §2(二)欵所述y_0、γ_0之直接計算中，由于采用投影表之精密值，其誤差不超过0.09mm与0.″00009。就§2(二)欵所述y_0、γ_0之內插計算而言，按緯度每5′間隔計算的y_0、γ_0 ，各算至0^m0001与0.″0001，其三次差已接近于0(以第四位小数为單位而言)，內插时均已顧及其二次差，其所略而未計的高次差，不致影响第四位小数。总之：y_0之計算誤差当不致超过0.1mm，γ_0之計算誤差不致超过0.″0001，而由γ_0計算之m、n，自必能保証第八位小数之正確。

其他各常数的計算，对其所用之算式而言，均能保証足够之精度。

（3） 換帶結果中由換帶表引起之誤差

这种誤差，包含下述兩部份：

a. 列表誤差—算得之常数列为表 I 时，含有“湊整誤差”，在最不利情况下，其所能引起換帶公式中各項之最大誤差略如下表：

x_2之各項最大誤差(mm)			y_2之各項最大誤差(mm)		
項　　目	用δ_x式	用σ_x式	項　　目	用δ_y式	用σ_y式
			$2y_0$	±0.10	±0.10
$m\triangle y_1$	±0.40	±1.20	$n\triangle y_1$	±0.40	±1.20
$m_1\triangle y_1^2$	±0.03	±0.29	$n_1\triangle y_1^2$	±0.03	±0.29
$m_2\triangle y_1^3$		±0.69	$n_2\triangle y_1^3$		±0.69
δ_x	±0.50		δ_y	±0.50	
σ_x		±0.50	σ_y		±0.50
同符号之累积	±0.93	±2.68	同符号之累积	±1.03	±2.78

b. 內插誤差—是由內插換帶常数时所得增量的"湊整誤差"以及使用內插表不符的誤差所引起。在最不利情况下，其所能引起换帶公式中各項之最大誤差略如下表：

x_2之各項最大誤差(mm)			y_2之各項最大誤差(mm)		
項　　目	用δ_x式	用σ_x式	項　　目	用δ_y式	用σ_y式
			$2y_0$	±0.80	±0.80
$m\triangle y_1$	±0.40	±1.20	$n\triangle y_1$	±0.40	±1.20
$m_1\triangle y_1^2$	±0.03	±0.29	$n_1\triangle y_1^2$	±0.03	±0.29
$m_2\triangle y_1^3$		±0.69	$n_2\triangle y_1^3$		±0.69
δ_x	±0.92		δ_y	±0.15	
σ_x		±0.10	σ_y		±0.17
同符号之累积	±1.35	±2.28	同符号之累积	±1.38	±3.15

应当注意：上兩表中"同符号之累积"之数值，仅为就換帶公式表面上看来所能出現之"最大誤差"，並非表示实际換帶結果中可能出現之值。就事实說：上表所載(δ_x、σ_x)与(δ_y、σ_y)之最大誤差，分別出現于x_0为0与6100公里处(且在$\triangle y_1$达到最大值时)，但0公里处之m、m_1、m_2以及在6100公里处之n、n_1、n_2，均非同时发生同符号的最大誤差；亦可確信：在x_0之任一值处，亦决无"如此湊巧"之可能。

§4 換帶簡表的編制

为便利地图測繪所需以及其他精度要求不高之換帶計算，另据表Ⅰ編成"換帶簡表"如表Ⅱ。用此表之換算公式如下：

$$\left.\begin{array}{ll} x_2=x_1+m\triangle y_1+\varepsilon x, & \mp y_2=y_0+n\triangle y_1+\varepsilon y \\ \multicolumn{2}{l}{y_0\text{永为正，}y_1\text{採用其在坐标系中应有之符号}} \\ \multicolumn{2}{l}{\text{由}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{西}}{\text{东}}\text{帶換至}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{东}}{\text{西}}\text{帶时，採用}\mp y_2\text{、}\triangle y_1=\pm y_1-y_0} \end{array}\right\} \quad (18)$$

其中

$$\varepsilon x=m_1\triangle y_1^2, \qquad \varepsilon y=n_1\triangle y_1^2 \qquad (19)$$

簡表Ⅱ的y_0、m、n由表Ⅰ摘录，δ_{y_0}、δ_m、δ_n各为其"每公里一次差"。每頁表中載有按

(19)式編算的“εx表”，其所需之m_1、n_1取自表Ⅰ：m_1采用x_0每千公里中500公里之相应值，n_1採用間隔約为10×10^{-11}的兩个n_1之中数，而“εy表”之表头上所載x_0的“界限值”（公里数），即为相应于这兩个n_1者，每“界限值”下方之一行，仅适用于x_1在此“界限值”內者。

簡表Ⅱ可供3°与3°帶以及3°与6°帶互相換帶之用，但仅能用于$\triangle y_1$不大于百公里之情况，$\triangle y_1$大于百公里时，則需应用表Ⅰ。应用簡Ⅱ表換帶的結果，在最不利的情况下，其誤差不超过一米。

§ 5 換帶計算的示例与說明

（一）使用換帶表Ⅰ

換帶算式有兩种：在$\triangle y_1$不超过表Ⅰ中“δ表”之$\triangle y_1$的最大值（80公里）时，使用(4)式中包含δ之式，否則使用其包含σ之式。在实际換帶計算的作业中：可用下例中的“格式”並用計算机进行；作业中应由兩人对算；或由一人計算，而用“所得換帶結果（x_2、y_2）反算至原坐标帶”的方法以校核之，此时（x_2、y_2）应作为（x_1、y_1）。

現列举(4)式中兩种算式的換帶及其反算之算例如下表，表中“x_1、y_1”欄之值，即为所欲換帶之坐标值。由於第二例之（x_1、y_1）即为第一例之（x_2、y_2），而且与第一例同为“由西帶換至东帶”，故第一第二兩例合併，即为“由西6°帶換至东6°帶”之情况。每一算例及其反算均为“3°→3°帶”之換帶情况；而第一例及其反算，亦为“6°→3°帶”与“3°→6°帶”之換帶情况；第二例及其反算亦为“3°→6°帶”与“6°→3°帶”之換帶情况。

計算次序	計算項目	P　点	（反算校核）	P　点	（反算校核）
1	x_1	1945 024.114	1943 759.616	1943 759.616	1947 536.527
16	$M\triangle y_1$	— 1 264.464	+ 1 264.464	+ 3 776.908	— 3 776.914
9	δ_x或σ_x	— 34	+ 34	+ 3	+ 3
17	x_2	1943 759.616	1945 024.114	1947 536.527	1943 759.616
8	$\triangle y_1=\pm y_1-y_0$	+ 79 985.011	— 79 959.842	— 238 556.238	+ 238 780.416
2	y_1	+ 239 233.054	— 79 298.198	— 79 298.198	— 398 008.577
3	y_0	159 248.043	159 258.040	159 258.040	159 228.161
15	$N\triangle y_1$	— 79 949.838	+ 79 975.006	+ 238 750.511	— 238 526.387
10	δ_y或σ_y	— 7	+ 7	+ 26	+ 26
18	$\mp y_2$	+ 79 298.198	+ 239 233.053	+ 398 008.577	— 79 298.200
4	$M\begin{cases} m \\ M_1\triangle y_1 \end{cases}$ m	— 0.0158 1623	— 0.0158 0628	— 0.0158 0628	— 0.0158 3600
14	$M_1\triangle y_1$	+ 747	— 746	— 2608	+ 1848
5	$N\begin{cases} n \\ N_1\triangle y_1 \end{cases}$ n	— 0.9998 7491	— 0.9998 7507	— 0.9998 7507	— 0.9998 7461
13	$N_1\triangle y_1$	+ 3 1466	— 3 1458	— 9 3930	+ 9 3847
6	$M_1\begin{cases} m_1\ 10^{-14} \\ m_2\triangle y_1 \end{cases}$ $m_1\ 10^{-14}$	+ 9335	+ 9330	+ 9330	+ 9345
12	$m_2\triangle y_1$	——	——	+ 1603	— 1607
7	$N_1\begin{cases} n_1\ 10^{-14} \\ n_2\triangle y_1 \end{cases}$ $n_1\ 10^{-14}$	+ 393 398	+ 393 423	+ 393 423	+ 393 347
11	$n_2\triangle y_1$	——	——	+ 320	— 320

現扼要說明計算方法如下：—

按“格式”中之“計算次序”进行时最为有利。

求出已知值x_1与表Ⅰ中略小的x_0之差$\triangle x$后，將$\triangle x$置于計算机的“定数盤”上，分别乘以表Ⅰ中相应的$\left\{\delta_{y_0}+d(\delta y_0)\right\}$、$\delta_m$、$\delta_n$…等，加其积之代数值于各相应的常数中，則得格式中“3至7”欄中之內插值。$d(\delta_{y_0})$之値，以$\triangle x$为引数由“$d(\delta y_0)$表”查得，其符号与δy_0同，若$\triangle x$小于表中之$\triangle x$的最小値时，則$d(\delta y_0)$为零。

求出格式中“8”欄之$\triangle y_1$后，首先据以查表得出“9、10”欄之δx、δy或σx、σy(查表时应注意$\triangle y_1$、δ之符号，σ永为正；若$\triangle y_1$小于表中之$\triangle y_1$的最小値时，則δ、σ为零)，然后將此$\triangle y_1$置于計算机的“定数盤”上，依次計算“11至16”欄中各乘积。格式中所需之“加法”，見(4)式自明，其M、N、M_1、N_1各代数和，可用“心算”而不写出。

于此应說明“$\triangle y_1=\pm y_1-y_0$”与“$\mp y_2$”中符号的决定：($i$)当換帶点($x_1$、$y_1$)位于其所欲換算之兩隣帶的中央子午綫之間时，($\pm y_1$)永为正值，而$y_2$与$y_1$之符号相反；($ii$)当換帶点位于其所欲換算之兩隣帶的中央子午綫之外时，($\pm y_1$)永为負值，而y_2与y_1之符号相同。以上(i)、(ii)兩种情况之符号决定，可完全由(4)式中之規則总括之。例如：第一例中，換帶点为(i)种情况，或亦为“由西帶換至东帶”之情况，于是，$\triangle y_1=+y_1-y_0=+(+239233.054)-159248.043=+79985.011$，$-y_2=+79298.198$，此$y_2$即为第二例中之$y_1$。第二例中，换帶点为($ii$)种情况，或亦为“由西帶換至东帶”之情况，于是，$\triangle y_1=+y_1-y_0=+(-79298.198)-159258.040=-238556.238$，$-y_2=+398008.577$。第一、二例之“反算”，依次为($i$)、($ii$)之情况，同时均为“由东帶換至西帶”之情况，故应採用“$\triangle y_1=-y_1-y_0$”与“$+y_2$”。

(二) 使用換帶簡表Ⅱ

使用簡表Ⅱ进行換帶之例見下表(已知x_1、y_1之值与前例同)，其算法可参考前例的說明，但有下列特点应予指出：

(1) 二次差項$d(\delta y_0)$在此处視为0。

(2) 以$\triangle y_1$查“εy表”时，应注意“表头”上x_0的“界限值”，应按x_1在此“界限值”內之一行的$\triangle y_1$以查εy。如本例$x_1=1945.0$公里，应按“$x_0=1376—1954$公里”之一行查表，以$\triangle y_1=79.98$公里为引数查得$\varepsilon y=+25.5$公尺。

(3) εx、εy永为正值。

計算次序	計算項目	P 点	(反算校核)
1	x_1	1945 024.1	1943 759.6
10	$m\triangle y_1$	− 1 265.0	+ 1 263.9
7	εx	+ 0.5	+ 0.5
11	x_2	1943 759.6	1945 024.0
6	$\triangle y=\pm y_1-y_0$	+ 79 985.2	— 79 959.7
2	y_1	+ 239 233.1	— 79 298.2
3	y_0	159 247.9	159 257.9
9	$n\triangle y_1$	— 79 975.2	+ 79 949.7
8	εy	+ 25.5	+ 25.5
12	$\mp y_2$	+ 79 298.2	+ 239 233.1
4	$m \quad 10^{-6}$	— 15 816	— 15 807
5	n	— 999 875	— 999 875

上表算例及其反算中所得之x_2、y_2，与（一）款之精密計算值相較，可見其最大差未超过0.1米。

(表 I)

3° 帶

高斯、克吕格坐标

换帶表