现代数学基础丛书 136

流形拓扑学

——理论与概念的实质

马天 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 136

流 形 拓 扑 学

——理论与概念的实质

马 天 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是一部关于流形的拓扑学专著, 较全面和系统地介绍了拓扑学大多数重要领域中的理论与方法. 内容涉及微分拓扑、同调论、同伦论、微分形式与谱序列、不动点理论、Morse 理论，以及向量丛的示性类理论. 同时,书中也介绍了作者新发展的流形共轭结构理论，主要结果包括共轭对称性定理，上、下同调群的几何化定理，最小共轭元球面定理. 在这些定理基础上，同调论和同伦论中许多重要定理与结果，如 Poincaré 对偶, Lefschetz 对偶, Künneth 公式, 上、下同调群，以及 Hurewicz 定理等的实质及直观意义变得更清楚了.

本书适合于数学、理论物理等相关专业的高年级大学生、研究生、教师及研究人员学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

流形拓扑学：理论与概念的实质/马天著. —北京：科学出版社, 2010
(现代数学基础丛书; 136)
ISBN 978-7-03-028550-8

I. ①流… II. ①马… III. ① 流形拓扑 IV. O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 156677 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 10 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)
2010 年 10 月第一次印刷 印张: 34 1/2
印数: 1—2 500 字数: 670 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

拓扑学是数学中最富有成果的学科之一, 主要包括一般拓扑 (点集拓扑)、微分拓扑、代数拓扑、辛拓扑等几个分支. 拓扑学的研究对象是一般拓扑空间, 而流形在拓扑空间中具有特殊的重要性. 这是因为欧氏空间 R^n 与复空间 $\mathbb{C}^n$ 上的所有分析理论与方法都可移植到流形上, 这就使得流形起到将拓扑、几何、分析以及理论物理紧密联系在一起的中心作用. 这些学科的日益融合已成为当今数学发展的主流方向之一. 本书正是在这种大趋势的背景下, 以流形为主要对象, 较为全面和系统地介绍拓扑学的基本理论与方法, 希望能为促进这方面的进一步发展作出一些贡献.

本书主要介绍拓扑学中发展得较为普遍并且成熟的理论、概念与方法. 除了拓扑 K 理论外, 本书涉及微分拓扑和代数拓扑的几乎所有重要领域, 包括微分流形基本理论, 上、下同调论, 同调群的对偶性, 微分形式, de Rham 与 Hodge 理论, 同伦论, 谱序列及其应用, 不动点及其指标公式, 不动点类理论, I 型和 II 型 Morse 理论, 示性类理论等. 此外, 本书还引入作者新发展的一套紧流形的共轭结构理论. 应用该理论我们能够很清楚地理解上、下同调群的本质, 并且可以推出如 Poincaré 对偶定理、Lefschetz 对偶定理、Künneth 公式、同调群万有系数定理, 以及关于同伦群与同调群之间关系的 Hurewicz 定理等许多重要结果. 它的优点是直观性强, 容易理解这些定理的实质. 特别地, 共轭结构理论的对称性定理对理解紧流形的拓扑结构是非常有帮助的. 简要地说, 每个 n 维紧流形 M^n 都含有一组相互配对的 (广义) 紧子流形偶 (Σ^k,Γ^{n-k}), 使得 Σ^k 与 Γ^{n-k} 在 M 中严格地横截相交于一点, 称作共轭偶. 最平凡的共轭偶就是 M^n 与它的一点构成, 即 $(\Sigma^0,M^n),\Sigma^0$ 为 M^n 中一点. 这些配对的 (广义) 紧子流形 Σ^k 称作 k 维共轭元. 我们发现, 所有共轭元可以定义上、下指标:

$$\mathrm{Ind}^S\Sigma^k=(n_1,\cdots,n_r)\ \text{为上指标},$$

$$\mathrm{Ind}_l\Sigma^k=(m_1,\cdots,m_r)\ \text{为下指标}.$$

它们是由一组整数构成. 然后, 对称性定理说, 两个共轭元 Σ^k 与 Γ^{n-k} 可配对成共轭偶必要条件是它们指标上下交错相等:

$$\mathrm{Ind}^S\Sigma^k=\mathrm{Ind}_l\Gamma^{n-k},\quad \mathrm{Ind}_l\Sigma^k=\mathrm{Ind}^S\Gamma^{n-k}.$$

特别地, 若指标不为零, 则上面等式也是成为共轭偶的充分条件. 我们正是应用这个对称性定理, 再结合共轭结构理论的上、下同调群的几何化定理, 可推出这种配

对就是 Poincaré 对偶.

本书的另一特点就是如副标题所示那样, 重视对抽象理论与概念的本质进行直观的揭示. 换句话说, 我们强调形式与直观的互补与统一. 数学的形式化是保障数学严谨性与正确性所必须的, 但同时也带来抽象与理解的困难. 作者对所涉及的所有领域都下了很大功夫, 试图理解它们的本质, 然后采用严格的形式化语言表述, 并尽可能使用几何直观的语言解释. 虽然不能全部达到理想的程度, 但是相信已经使本书达到独具风格的效果. 事实上, 书中的多数重要理论的证明与阐述都是经过作者的融会贯通后以不同的方式重新独立给出的.

借此机会, 关于数学 (或者科学) 的发展作者发表一些观点与看法. 科学毫无疑问对人类产生既有正面也有负面的影响, 而事实上, 科学对人类的正面影响更主要还是在精神层面上, 因为科学与文学、艺术以及其他人文知识一样, 都具有精神升华的作用, 使人类摆脱愚味和低级的状态. 然而, 今天的科学发展越来越物质化了, 功利化倾向已占据了主流地位. 数学好坏的判据已偏离了它自身精神领域所具有的两种价值: 美学价值, 即数学所特有的一种艺术价值, 以及科学价值, 即能帮助我们理解自然的功能. 当社会上普遍采用论文数量、期刊级别、检索因子, 以及研究工作的难易程度作为科学的判别标准时, 直接的后果就是科学素质的下降. 这将导致知识基础狭窄、水平低下、急功近利的状态. 一个社会群体, 如果缺乏独立和高水平的科学鉴赏力 (这是以基础知识的宽度和深度作支撑的), 那么这个社会的科学注定不会高水平发展, 科学的创新精神和献身精神将被窒息.

最后, 作者要表达对导师陈文嫄教授的深深敬意. 早年, 当作者处在科学研究的困境中时, 是陈先生提供了实质性的帮助. 没有陈文嫄先生就没有本人今天的成绩. 本书得到国家自然科学基金 (10971148) 和四川大学人才引进基金的资助, 对此表示感谢. 此外, 作者对科学出版社的支持也表示感谢.

马 天

2010 年 5 月 20 日

目　　录

第 1 章　微 分 流 形

微分流形的内容属于微分拓扑范围, 它是拓扑学的基础. 本章主要介绍流形的概念、Whitney 嵌入定理、Frobenius 定理, 以及关于映射正则值的 Sard 定理, 同时也讨论向量丛与纤维丛的一些基本知识.

1.1　基 本 概 念

1.1.1　流形的概念

首先介绍“拓扑结构”这一术语的数学含义. 图 1.1 给出三个一维图形, 其中 (a) 和 (b) 都是两个圈, 而 (c) 是一个 8 字图形. 虽然 (a) 和 (b) 这两圈的几何形状不同, 但是图形结构相同, 因为它们可以在平面上连续地从一个形变到另一个并与之重合, 不需要扯破或相交. 但是它们显然与图形 (c) 不同, 数学上称 (a) 与 (b) 的拓扑结构是相同的, 或者称它们是同胚的, 但是与 (c) 不相同.

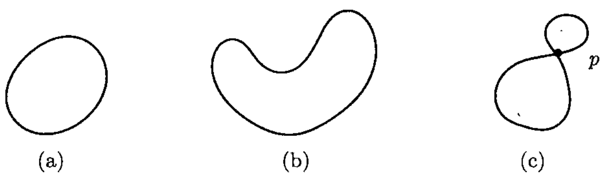

图 1.1　(a) 与 (b) 具有相同拓扑结构, 但与 (c) 不同

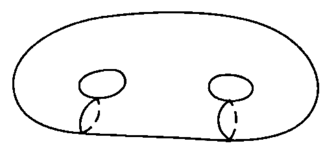

图 1.2　一个 $k=2$ 个孔的二维环面

现在我们再从这些图形的直观对比引出流形的概念. 容易看到, 图 1.1 中的 (a) 与 (b) 比 (c) 简单, 它们没有交点. 而 (c) 中图形有一个交点 p. 这种没有交点的一维曲线就称为一维流形. 从拓扑结构上讲, 不含交点的一维曲线只有两种: 直线 R^1 和圈 S^1, 因为任何开线段 (a,b) 与 R^1 拓扑结构相同 (即同胚). 类似地, 所有二维曲面, 就如图 1.2 中所示那样不含交点和交线的图形便称为二维流形, 而如图 1.3 所示的那些图形就不是流形.

直观地说, 这种不含相交点的 n 维图形在数学上就称为 n 维流形. 但是当 $n>3$ 时我们就无法观察到这种拓扑空间的图形, 所谓相交点也不能表示出来. 然

而，细心观察就可发现所谓不含相交点的基本特征就是，例如在一个二维球面 S^2 上任一点 p，存在 p 的一个邻域 $U \subset S^2$，使得 U 与 R^2 的一个开盘 D(或开球体) 同胚，见图 1.3 所示. 而这一性质对于图 1.4 中所示图形的相交点就不成立.

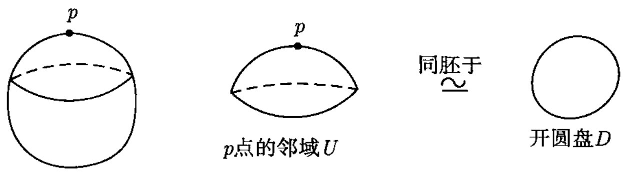

图 1.3

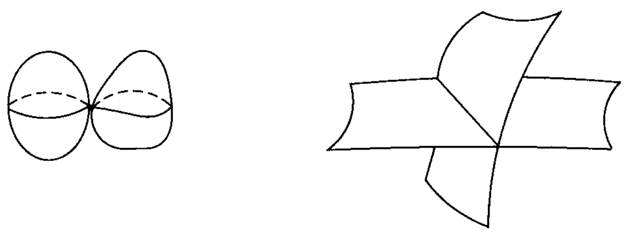

图 1.4　两个图形都不是流形

将这一现象抽象成数学语言推广到一个 n 维拓扑空间上，更严格地说一个 Hausdorff 空间，就引出下面 n 维流形的定义. 所谓 Hausdorff 空间是指其任两个不同点必含不相交的邻域.

定义 1.1　令 M 是一个 Hausdorff 空间. 若对任一点 $p \in M$，都存在 x 在 M 中的一个邻域 $U \subset M$，使得 U 同胚于 n 维欧氏空间 R^n(或 R^n 中一个开集)，则 M 就称为是一个 n 维流形.

从上面的定义我们可以看到，R^n 中任一开集都是一个 n 维流形. 定义 1.1 给出的流形是不带边界的，即或者 $\partial M = \varnothing$ 或者 $\partial M \not\subset M$. 下面引入带边流形的概念，其定义如下.

定义 1.2　令 M 是一个 Hausdorff 空间. 若对任一点 $p \in M$，存在一个邻域 $U \subset M$，使得 U 同胚于 R^n_+ 中的一个开集. 特别地，存在这样的点 $p_0 \in M$，使得它的一个邻域 U 同胚于 R^n_+，则 M 称为是一个 n 维带边流形，这里

$$R^n_+ = \{x \in R^n \mid \ x = (x_1, \cdots, x_n), \ \ x_n \geqslant 0\}.$$

通俗地讲，一个 n 维带边流形 M 的边界 ∂M 一定是一个 $n-1$ 维流形. 若 R^n 中一个开集 A 的边界 ∂A 是一个 $n-1$ 维流形，则其闭包 $\bar{A}$ 是一个带边流形，否则 $\bar{A}$ 就不是.

在流形中，有一类非常重要，称为紧流形 (也称为闭流形). 这类流形的基本特

征就是有界但是没有边界. 直观地想象紧流形图像是掌握拓扑与几何学的一个重要环节. 下面介绍一些简单的紧流形. 一维紧流形只有一种即 S^1(圆圈). 二维紧流形有四个典型种类：二维球面 S^2、轮胎面 $T^2(k=1$ 个孔的环面)、Klein 瓶 K^2 和二维实投影空间 P^2. 因为 Klein 瓶 K^2 和实投影空间 P^2 不能够嵌入到现实空间 R^3 中, 因而我们无法看到它们, 但是可以按下面方式想象和观察.

按图 1.5 所给出的方式想象 Klein 瓶. 在该图的 (a) 中先将管子的一端弯入管内, 再在 (b) 中想象着将此端从第 4 维空间中拉出来, 此时完全可以避免与自己相交, 然后就如 (c) 中所示的那样将此端与另一端粘合起来. 这样我们就从三维空间中观察到 Klein 瓶的样子.

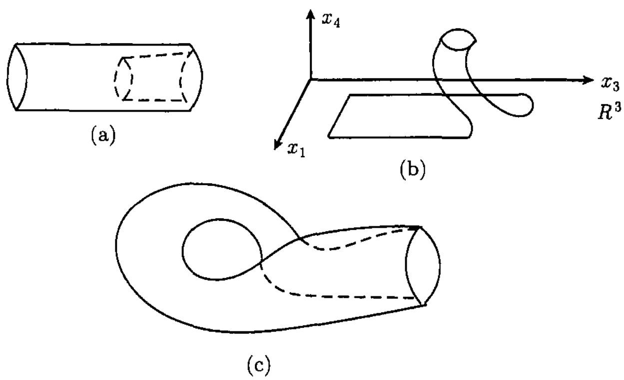

图 1.5 在 R^3 中观察 K^2 的三个步骤：(a) 管形的一端弯入管内; (b) 管内的那端从 R^4 的 x_4 方向出来; (c) 两端相粘合

我们还可以采用另一种方式来看 Klein 瓶和实投影空间. 在图 1.6 中, 将矩形上下两边 ab 和 $a'b'$ 视为相同, 再将左边 aa' 与右边 bb' 按箭头所示等同起来, 也就是说将 ab 与 $a'b'$ 粘合起来, 再将 aa' 与 $b'b$ 按箭头方向粘合起来, 所得流形即为 K^2. 二维实投影空间 P^2 是将球面 S^2 按对径点等同 (粘接) 起来的流形. 就如图 1.7 所示的那样, 它也可表现为将一个圆盘的两边 ab 和 ba 按箭头所指方向等同 (粘接) 起来所得流形.

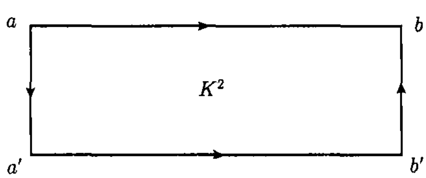

图 1.6 将 ab 与 $a'b'$ 粘接, 再将 aa' 与 $b'b$ 粘合, 即得 Klein 瓶

二维紧流形的分类定理告诉我们, 所有二维紧流形, 如果不是一个球面 S^2, 那

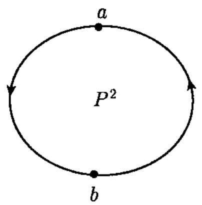

图 1.7　将圆盘对径点粘合，即将 ab 与 ba 按箭头所示粘合即为投影空间

么都可由轮胎面 T^2 和实投影空间 P^2 通过挖去一个圆盘然后沿边界 S^1 粘合而成，就如图 1.8 所示那样. Klein 瓶 K^2 就是由 P^2 和 P^2 粘接而成，记为 $K^2 = P^2\#P^2 = 2P^2$. 更精确地说，任何一个二维可定向紧流形 M 一定同胚于某 k 个孔的环面 $M = kT^2$，当 $k = 0$ 时 M 为球面，而不可定向流形则同胚于某 n 个投影空间的粘接，记为 $M = nP^2$. 后面我们还将提到该定理.

图 1.8　两个 T^2 粘接成 2 个孔的环面

三维以上的紧流形无法直接观察到，也没有像 $n = 1$ 和 2 维那样完整的分类. 但是可以按某种方式想象高维流形. 下面给出三个例子：

- 将一个 n 维球体 (或者 n 维方体) 的边界视为一点，也就是说捏成一点，这样得到一个 n 维紧流形. 该流形就是 n 维球面.
- 将一个 n 维球形环体 (即 n 维球体内挖去一个小球体) 的外球面边界与内球面边界等同粘合起来，所得流形为 $S^{n-1} \times S^1$.
- 分别将一个立方体的上下、前后和左右两面等同粘合起来就得到一个三维轮胎面 $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. 特别地，将一个 n 维方体的每一对平行面等同粘合得到 n 维轮胎面 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$.

1.1.2　物理背景的流形

流形之所以重要在于它没有自相交点. 正是由于这一点才使得自然界的系统都是以流形作为其运动的背景空间. 也是由于这一点，才能在数学上赋予流形各种代数、几何和微分结构，从而在数学上能够以流形的概念为核心将拓扑、几何、分析和代数融为一体产生丰富的理论，这一节将从物理的角度给出一些具有运动背景的流形例子.

(1) 我们的宇宙空间是一个三维流形. 可以想象，在这个宇宙中每一处都会感受到这个世界是一个 R^3 空间. 事实上，这种感知是局部性的，它只能说明这个宇宙每一点的邻域都同胚于 R^3，因而是一个三维流形，但并不意味着它一定就是平直的三维欧氏空间 R^3. 从广义相对论的角度，这个世界到处分布着物质和能量，它们产生的引力场造成空间弯曲. 因而这种弯曲有可能强得足以使它封闭成一个三

维球面 S^3. 但是我们现在仍然不知道我们的宇宙究竟是一个什么样的流形.

(2) 考察一个连杆运动. 如图 1.9 所示, 两根刚性的杆被铰接在 B 点, 其中一根杆的端点被固定在 A 点. 而该杆可绕 A 点作平面运动, 另一根杆可绕铰接点 B 作球面运动. 如果用 θ 表示 B 点的极坐标角度, (φ, ψ) 表示 C 点以 B 为心的球面坐标, 则 (θ, φ, ψ) 就是用来描述端点 C 在三维紧流形 $S^1 \times S^2$ 上运动的坐标.

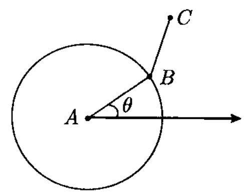

图 1.9 连杆运动, 自由端点 C 被限制在流形 $S^1 \times S^2$ 上运动

(3) 令 n 个行星绕一个恒星作天体运动. 每个行星有 $2 \times 3 = 6$ 个自由度, 其中 3 个是位置坐标 $x = (x_1, x_2, x_3)$, 另外 3 个是速度坐标 $y = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$. 将第 k 个行星的位置和速度坐标记为

$$\{x_{k1},\ x_{k2},\ x_{k3},\ y_{k1},\ y_{k2},\ y_{k3}\}.$$

若将这 n 个行星视为 R^{6n} 中运动的质点 A, 那么这个质点的坐标为

$$A = \{x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ y_{11},\ y_{12},\ y_{13},\ \cdots,\ x_{n1},\ x_{n2},\ x_{n3},\ y_{n1},\ y_{n2},\ y_{n3}\}.$$

当知道 A 在 R^{6n} 中的坐标时, 也就知道这 n 个行星在 R^3 中具体位置和速度. 也就是说, 质点 A 在 R^{6n} 中的轨道完全描述了这 n 个行星的运动状态. 如果这 n 个行星都是绕着恒星作周期圆周运动, 那么代表这 n 个行星的质点 A 就是在 R^{6n} 中的一个 $2n$ 维轮胎面 $T^{2n} = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ 上进行运动. 因此一个作周期环绕运动的恒星系, 其背景空间是 T^{2n}. Hamilton 系统中著名的 KAM 理论就是通过研究一个控制具有 n 个行星的恒星系运动微分方程的不变轮胎面 T^{2n} 及其稳定性来证明太阳系, 或更一般的恒星系, 其行星的周期运动是稳定的. 换句话说, 在一个小扰动下, 太阳系的行星仍然会绕着太阳作周期运动, 只是周期轨道会发生微小的变形.

(4) 前面三个例子都是无边流形. 我们知道大气运动是在大气层的对流层中发生. 对流层就是一个以地球表面及对流层顶部这两个球面所围区域. 这个区域与边界一起就是一个带边流形. 该流形是一个三维球面环体, 它同胚于 $S^2 \times [0,1]$. 控制大气运动的模型是由称为 Boussinesq 方程的一组偏微分方程构成, 它是由控制流体的 Navier-Stokes 方程与热扩散方程耦合而成. 这些偏微分方程定义在弯曲的流形 $S^2 \times [0,1]$ 上意味着必须将微积分的概念从平直的欧氏空间 R^n 推广到流形上, 这方面就是微分几何的内容.

1.1.3 坐标系与微分结构

在物理世界中, 一般被观察和研究的对象都是以流形为其存在和演化的背景空