丛书主编：陈兰荪

7

生物数学丛书

王克 著

随机生物数学模型

科学出版社
www.sciencep.com

生物数学丛书 7

随机生物数学模型

王 克 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书介绍了种群生态学研究中建立随机数学模型的方法、某些重要的随机模型以及它们的理论分析、已经得到的一些结果和一些尚未解决的问题，涉及生物数学中的许多重要问题，包括随机环境中单种群和多种群系统的持久性、灭绝性、吸引性、有界性、随机稳定性；依分布稳定性；可更新生物资源的开发、利用；随机环境下的生物保护区模型；污染环境中的生态系统的生存与灭绝问题；流行病的传播规律问题；神经网络的性质；随机均衡解和随机周期解的存在性、唯一性和稳定性的研究以及带有时滞的生态系统的研究等问题。某些模型和相关问题是作者及其合作者首次提出的，并由此得到一些全新的结果。

本书可供高等院校数学系、生物系以及农、林、医等有关专业的大学生、研究生、教师和科研人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机生物数学模型/王克著；—北京：科学出版社，2010
ISBN 978-7-03-028237-8
(生物数学丛书；7)

Ⅰ. 随… Ⅱ. 王… Ⅲ. 随机-生物数学-数学模型 Ⅳ. Q-332

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 128776 号

责任编辑：王丽平　房　阳／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第　一　版　开本：B5(720 × 1000)
2010 年 7 月第一次印刷　印张：19 3/4
印数：1—2 500　字数：377 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《生物数学丛书》编委会

《生物数学丛书》序

传统的概念：数学、物理、化学、生物学，人们都认定是独立的学科. 然而，从 20 世纪后半叶开始，这些学科间的相互渗透、许多边缘性学科的产生，使得各学科之间的分界渐渐变得模糊了，学科的交叉更有利于各学科的发展，正是在这个时候，数学与计算机科学结合逐渐地形成生物现象 —— 建模和模式识别. 特别是在分析人类基因组项目等这类拥有大量数据的研究中，数学与计算机科学成为必不可少的工具. 迄今，生命科学领域中的每一项重要进展，几乎都离不开严密的数学方法和计算机的利用，数学对生命科学的渗透使生物系统的刻画越来越精细，生物系统的数学建模正在演变成生物实验中必不可少的组成部分.

生物数学是生命科学与数学之间的边缘学科，早在 1974 年就被联合国教科文组织的学科分类目录中作为与"生物化学"、"生物物理"等并列的一级学科."生物数学"是应用数学理论与计算机技术研究生命科学中数量性质、空间结构形式，分析复杂的生物系统的内在特性，揭示在大量生物实验数据中所隐含的生物信息. 在众多的生命科学领域，从系统生态学、种群生物学、分子生物学到人类基因组与蛋白质组即系统生物学的研究中，生物数学正在发挥巨大的作用，2004 年 *Science* 杂志在线出了一期特辑，题为"科学下一个浪潮 —— 生物数学"，其中英国皇家学会院士 Lan Stewart 预测，21 世纪最令人兴奋、最有进展的科学领域之一必将是生物数学.

回顾生物数学的发展已有近百年的历史：从 1798 年 Malthus 人口增长模型，1908 年遗传学的 Hardy-Weinberg"平衡原理"，1925 年 Voltera 捕食模型，1927 年 Kermack-Mckendrick 传染病模型到今天令人瞩目的"生物信息论"，生物数学经历了百年迅速的发展，特别是 20 世纪后半叶，从那时期连续出版的杂志和书籍就足以反映出这个兴旺景象；1973 年左右，国际上许多著名的生物数学杂志相继创刊，其中包括*Math Biosci*, *J. Math Biol* 和*Bull Math Biol*；1974 年左右，由*Springer-Verlag*出版社开始出版两套生物数学丛书：*Lecture Notes in Biomathermatics* (20 多年共出书 100 册) 和*Biomathematics* (共出书 20 册)；新加坡世界科学出版社正在出版*Book Series in Mathematical Biology and Medicine*丛书.

"丛书"的出版，既反映了当时生物数学发展的兴旺，又促进了生物数学的发展，加强了同行间的交流，加强了数学家与生物学家的交流，加强了生物数学学科内部不同分支间的交流，益于对年轻工作者的培养.

从 20 世纪 80 年代初开始，国内对生物数学感兴趣的人越来越多，他们有来

自数学、生物学、医学、农学等多方面的科研工作者和高校教师, 并且从这时开始, “生物数学” 方向的硕士生、博士生不断被培养出来, 从事这方面研究、学习的人数之多已居世界之首. 为了加强交流, 提高我国生物数学的研究水平, 我们十分需要有计划、有目的地出版一套 “生物数学丛书”, 其内容应该包括专著、教材、科普以及译丛, 例如: ① 生物数学、生物统计教材; ② 数学在生物学中的应用方法; ③ 生物建模; ④ 生物数学的研究生教材; ⑤ 生态学中数学模型的研究与使用等.

中国数学会生物数学学会与科学出版社经过很长时间的商讨, 促成了 “生物数学丛书” 的问世, 同时也希望得到各界的支持, 出好这套丛书, 为发展 “生物数学” 研究、培养人才作出贡献.

陈兰荪

2008 年 2 月

序

在现实世界生物的生长过程中，各种各样随机因素的干扰无时不在、无处不在，不同程度地影响到生物生长的各个方面。虽然在许多情况下忽略掉这些随机干扰，使用确定性的数学模型来描述生物的增长，仍然可以得到生物行为的本质属性和基本的变化趋势，但在某些情况下，如保护濒危物种、研究生物的灭绝性时，由于样本空间太小，忽略掉随机因素的作用可能会产生较大的偏差。这时使用随机模型来分析生物的行为会和实际情况符合得更好一些。所以，随机数学模型的研究可以和确定性数学模型的研究相辅相成，使得人们对于生物在发展过程中的行为有更加全面、更为深刻的了解和认识。

近年来，随机生物数学 (特别是随机种群生态学) 的研究工作取得了很大的进展。对随机生物数学模型的研究已经成为生物数学研究中充满活力、富有成效的研究方向。王克教授几十年来从事生物数学的研究与教学工作，积累了丰富的经验，在确定性生物数学模型的研究上取得了许多重要的成就。近年来，王克教授和他的学生们又在随机生物数学的研究方面作了不少努力和尝试，得到了一些新的、有意义的研究成果。王克教授以这些结果为基础，结合现有文献中的材料，详细地介绍了随机生物数学模型建模的一些注意事项、随机模型研究的一些主要方法、已经取得的结果和一些有待解决的问题。该书文笔流畅，条理清晰，相信那些对随机生物数学有兴趣的读者会从中了解到这个方向的基本动态和方法上的特色，从而有所裨益，同时也很适合生物数学方向的科研人员和研究生们阅读参考。我相信，该书的面世将会对我国生物数学研究的发展起到进一步的推动作用。

陈兰荪

2010 年 2 月 20 日于北京

前　言

以数学模型作为工具来研究生物学和生态学中的重要问题，使得人们对生物发展变化的规律有了更加全面、更加深刻的认识，并由此使得生物数学和数学生态学作为重要的边缘学科而得到长足的发展 (Murry，1998；陈兰荪，1991；马知恩，2000；王克等，2009)。但是现有的大多数工作主要是基于确定性的数学模型，其主要依据是假设生物种群的个体数量足够大，于是根据大数定律，系统的行为会呈现出比较平稳的统计规律，从而把系统近似地看成是确定性的。这样做的好处是把问题大大地简化了，为研究带来了方便。例如，液体对容器壁的压力是由液体分子对容器壁的撞击而产生的。虽然每个分子撞击容器壁的速度和角度都是随机的，但是因为分子的数量巨大，所以实际上把液体对容器壁的压力问题当成是确定性的问题来处理，得到了简单易用的物理定律：液体的压强与液体的深度成正比。于是压力微元就等于压强乘上面积微元，这样液体对容器壁的压力问题就化为简单的积分问题，并得到了令人满意的结果。

然而在现实的生态系统中，各种形式的随机干扰无处不在。May (2001) 曾指出，环境噪声会不同程度地影响到增长率、环境容量、竞争系数和系统的其他参数，生物种群个体的数目一般也远没有通常容器中液体分子的数目那样多。几乎所有的实际观测资料都表明，生物生长过程的随机波动是明显的，并且这种随机波动很大的概率一般并不小。因此，在某些实际情况下，忽略掉系统的随机性，用确定性模型对系统行为所作的描述和预测并不总是令人满意的。在有些情况下，如研究如何保护濒危物种时，则完全不适宜使用确定性的模型。因此为了适应不同的实际需要，对客观实际有更加全面的了解和认识，在某些情况下，有必要使用随机的数学模型来描述生态系统。近年来，涌现出了不少的文献都致力于这方面的研究工作 (Mao，1997；Mao et al.，2002，2003；Luo et al.，2007；Li et al.，2009；Zhu et al.，2009；Liu et al.，2009；Jiang et al.，2005，2006)，取得了丰富的研究成果。这些成果进一步深化了人们对生物发展规律的认识。一些新的随机模型被建立起来，许多经典的确定性模型的结果被推广到随机的情况，但是处理随机模型的思想方法和研究方法与确定性模型有较大的区别。由于问题本身的复杂性，这个方向上的研究工作方兴未艾，仍有大量的工作有待进一步开展。据我们所知，到目前为止，国内也好，国外也好，还没有一本专著来介绍随机生物数学这个方向的特点、主要的研究方法和取得的成果。

我国生物数学的研究工作从 20 世纪 80 年代起，在陈兰荪、马知恩等学者的倡

导和组织下，得到了蓬勃的发展，不少年轻学者脱颖而出，大量的研究成果不断涌现。为了进一步推动生物数学在我国的发展，作者以自己团队的研究工作为主，结合现有文献中的成果，介绍了种群生态学中建立随机数学模型的方法，并介绍了某些重要的随机生物数学模型和它们的主要的处理方法，以及由随机模型所得到的结论与通常确定性模型所得到的结论有什么相同和不同之处。希望本书的面世能够帮助有兴趣的读者了解这个方向的概况、动态、思想方法和研究方法上的特点，以及已经取得的结果和尚未解决的问题，能够对我国的生物数学研究起到推动促进和抛砖引玉的作用。

作者感谢范德军、李文学、苏欢、吕敬亮、胡贵新、刘蒙、邹晓玲、贾小青、吴穹、李千洋，本书的大多数内容是作者与他们合作完成的。范德军完成了第 6 章的一部分，李文学完成了第 4 章的一部分和第 8 章的一部分，苏欢完成了第 8 章的一部分，吕敬亮完成了第 2 章的一部分和第 4 章的一部分，胡贵新完成了第 3 章的大部分，刘蒙完成了第 2 章的一部分和第 5 章的大部分，邹晓玲完成了第 2 章的一部分和第 7 章的大部分，贾小青完成了第 8 章的一部分，吴穹完成了第 6 章的一部分，李千洋完成了第 8 章的一部分，并对数值模拟工作做出了贡献，李文学、胡贵新和邹晓玲在文字整理方面给作者提供了很大帮助。实际上，他们也是本书的作者。作者对于团队成员的辛苦付出和愉快合作再次致以深深的谢意，但对于本书可能出现的问题和错误，则由作者负完全责任。

阅读本书需要具有扎实的本科数学基础。为了读者阅读方便起见，作者把本书需要而又超出大学数学范围的一些知识在第 1 章列出。在本书的编排上，作者根据内容的不同分成不同的章节，可是各个部分的内容是密切相关的，往往是你中有我，我中有你，所以这种编排和划分也不是绝对的，只是为了读者阅读方便而作的安排。在文献的选取上，作者以自己比较熟悉的材料为主，难免会有以偏概全、挂一漏万的弊端。

作者感谢哈尔滨工业大学和东北师范大学对本书写作的支持，感谢国家自然科学基金对本书的支持，感谢科学出版社 (特别是王丽平同志) 对本书的支持，感谢加拿大阿伯塔大学 M. Y. Li 教授和哈尔滨工业大学崔明根教授对本书的支持，感谢我国生物数学的启蒙者和组织者、中国科学院陈兰荪研究员对本书写作的鼓励和支持。

限于作者的水平，书中的纰漏和不足之处在所难免，恳请读者和专家们不吝赐教。

王　克

2010 年 3 月

目　　录

第1章　准备知识

1.1　引　　言

对随机模型的分析所需要的知识超出了大学数学的范围，为了读者阅读方便，尽量把那些可能超出范围而又在本书中要用到的知识在本章列出。因篇幅关系，只列出重要的结论而略去证明，但尽量注明出处，以便于读者查证。这些知识主要包括：理论概率论的有关概念和结论；随机过程，特别是 Brown 运动的概念和相关结论；连续时间的 Markov 链的相关结论；随机积分，主要是 Itô 积分的定义和相关知识；随机微分方程的概念和主要结论；Itô 公式；一些要用到的重要不等式；随机比较定理。因为随机模型是确定性模型的深化和推广，所以本书把最重要的确定性的种群模型也作一简要介绍。一些更专业的知识在以后用到时随时介绍。本章在材料选取时，以“够用、方便”为原则，不追求所引结论的深刻和广泛，更多地考虑简洁、易用的因素，希望能给读者带来方便，同时尽量节省篇幅。

本章的内容参考或转引自文献 (Murry，1998；陈兰荪，1991；马知恩，2000；马知恩等，2007；Mao et al.，2006；黄志远，2001；Øksendal，2003；龚光鲁，2000；林元烈，2002；陈希孺，2003；Gardiner，2004)，谨向相应的作者表示感谢。

1.2　基本的概率论知识

概率论，通俗地说，就是用数学方法来研究随机事件发生的“机会”或“可能性”大小的学科。但要在数学上对其加以精确的描述，则远非易事。下面由最基本的概念开始。

某个随机试验的所有可能的基本结果或基本随机事件 ω 所构成的集合记为 Ω，称为样本空间。Ω 的满足下面三个条件的子集族 $\mathcal{F}$ 称为样本空间 Ω 的一个σ 代数：

(1) $\varnothing \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $D \in \mathcal{F}$，则其补集 $D^c = \Omega - D \in \mathcal{F}$;

(3) 若 $D_i \subset \mathcal{F}\ (i = 1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{F}$。

$\mathcal{F}$ 中的元素称为 Ω 的 $\mathcal{F}$ 可测集或随机事件。若 $\mathcal{C}$ 是样本空间 Ω 的一个子集族，则存在一个 Ω 的包含 $\mathcal{C}$ 的最小的 σ 代数，记为 $\sigma(\mathcal{C})$，称为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数。由 $\mathbb{R}^n$ 的所有开集所生成的 σ 代数称为 Borel σ 代数，记为 $\mathcal{B}^n$，其中的元素称为

$\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集。定义在样本空间 Ω 上的 $\mathcal{F}$ 可测的实值函数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 称为随机变量。类似地，定义在样本空间 Ω 上的 m 维 $\mathcal{F}$ 可测的向量值函数 $X:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 称为 m 维随机向量, 或 $\mathbb{R}^m$ 值随机变量。

设 X 是 $\mathbb{R}^m$ 值随机变量，则由集合族 $\{X^{-1}(B)\in\mathcal{F}|B\in\mathcal{B}^m\}$ 所生成的最小 σ 代数，称为由 X 生成的 σ 代数，记为 $\sigma(X)$。

定义在 $\mathcal{F}$ 上的函数 $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$ 称为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度, 如果它满足:

(1) $\mathbb{P}(\Omega)=1$;

(2) 若 $A_i\in\mathcal{F}\ (i=1,2,\cdots)$ 且 $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$, 则 $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$。

三元组 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 称为概率空间。若一个概率空间的 $\mathcal{F}$ 包含 Ω 的所有 $\mathbb{P}$ 零外测集，也就是说, 如果

$$\mathbb{P}^*(G):=\inf\{\mathbb{P}(F)|F\in\mathcal{F},G\subset F\}=0,$$

则 $G\subset\mathcal{F}$, 此概率空间称为完备的。任何一个概率空间都可以通过把其所有 $\mathbb{P}$ 零外测集加入 $\mathcal{F}$ 中，并重新定义概率测度来完备化。本书总假设所涉及的概率空间为完备的。

如果随机变量 X 关于概率测度 $\mathbb{P}$ 可积，则积分 $\displaystyle\int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ 称为随机变量 X 的均值或数学期望, 记为 $\mathbb{E}X$。此时，该随机变量称为可积的。对随机变量 X，如果积分 $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$ 存在，则称之为随机变量 X 的方差，记为 DX 或 $\mathrm{Var}(X)$。$\mathbb{E}|X|^p\ (p>0)$ 称为随机变量 X 的 p 阶矩。所有 p 阶矩有限的 m 维随机变量所构成的空间记为 $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$。如果 Y 也是实值随机变量，则积分

$$\mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\big]$$

称为 X 和 Y 的协方差，记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

若 X 是 $\mathbb{R}^n$ 值的随机变量，则 X 在 Borel 可测空间 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n)$ 上，按如下方式诱导出一个概率测度 F_X：

$$F_X(B)=\mathbb{P}\left(\omega:X(\omega)\in B\right),\quad B\in\mathcal{B}^n。$$

此概率测度 F_X 称为 X 的分布或分布函数。

如果存在定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数 $\phi(x)$，使得对任意的 $B\in\mathcal{B}^n$ 有

$$F_X(B)=\int_B\phi(x)\mathrm{d}x,$$

则 $\phi(x)$ 称为随机变量 X 的密度函数 (或密度)。一个随机变量未必有密度函数，可是一定有分布函数。

当 $n=1$ 时，实值随机变量 X 的分布函数可以表示为

$$F_X(x)=\mathbb{P}\left(\omega: X(\omega)<x\right)。$$

X 的均值可以表示为 $\mathbb{E}X=\int_{\mathbb{R}^n} x\mathrm{d}F_X(x)$。更一般地，若 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是 Borel 可测的，则有 $\mathbb{E}g(X)=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}F_X(x)$。

随机事件族 $B_j\in\mathcal{F}$ ($j\in J$, 其中 J 是指标集) 称为独立的，如果对任意有限个不同的指标 $j_1,\cdots,j_k\in J$ 有 $\mathbb{P}(B_{j_1}\cap\cdots\cap B_{j_k})=\mathbb{P}(B_{j_1})\cdots\mathbb{P}(B_{j_k})$。

σ 代数族 $\mathcal{F}_j$ ($j\in J$, 其中 J 是指标集) 称为独立的，如果对任意有限个不同的指标 $j_1,\cdots,j_k\in J$ 和任意的 $B_{j_1}\in\mathcal{F}_{j_1},\cdots,B_{j_k}\in\mathcal{F}_{j_k}$ 有 $\mathbb{P}(B_{j_1}\cap\cdots\cap B_{j_k})=\mathbb{P}(B_{j_1})\cdots\mathbb{P}(B_{j_k})$。

随机变量族 Y_j ($j\in J$) 称为独立的，如果由它们所生成的 σ 代数族 $\sigma(Y_j)$ ($j\in J$) 是独立的。

如果随机变量族 Y_j ($j=1,\cdots,m$) 是独立的且它们的均值都存在，则有

$$\mathbb{E}(Y_1Y_2\cdots Y_m)=\mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)\cdots\mathbb{E}(Y_m);$$

若它们的方差都存在，则有

$$D(Y_1+Y_2+\cdots+Y_m)=D(Y_1)+D(Y_2)+\cdots+D(Y_m)。$$

若 $A,B\in\mathcal{F}$ 且 $\mathbb{P}(B)>0$, 定义条件概率

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}。$$

引理 1.2.1 (全概率公式) 如果 $A,B_1,\cdots,B_n\in\mathcal{F}$ 且 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k=\Omega, B_i\cap B_j=\varnothing\,(i\neq j), \mathbb{P}(B_k)>0(k=1,\cdots,n)$, 则有 $\mathbb{P}(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)$。

引理 1.2.2 (Borel-Cantelli 引理) 如果 $B_k\in\mathcal{F}$ ($k=1,2,\cdots$) 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_k)<\infty$，则 $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=i}^{\infty}B_k\right)=0$。

也就是说，若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_k)<\infty$，则对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 都存在一个随机整数 $k(\omega)>0$, 使得当 $k>k(\omega)$ 时，所有的随机事件 B_k 都不会发生。

设 X 是一个随机变量且其均值存在，$\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个 σ 子代数，一般来说，X 未必是 $\mathcal{H}$ 可测的。由 Radon-Nikodym 定理，存在唯一的 $\mathcal{H}$ 可测的随机变

量 Y，使得

$$\int_H Y(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_H X(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega), \quad \forall H \in \mathcal{H}。$$

随机变量 Y 称为在条件 $\mathcal{H}$ 之下 X 的条件均值，或条件数学期望，记为 $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$。若 Z 是随机变量，$\mathcal{H} = \sigma(Z)$，则通常写成 $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|Z)$。

定义 $\mathbb{P}(A|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(I_A|\mathcal{H})$, 其中 I_A 表示随机事件 A 的指标函数。

条件均值有如下重要性质:

(1) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})) = \mathbb{E}(X)$;

(2) $|\mathbb{E}(X|\mathcal{H})| \leqslant \mathbb{E}(|X||\mathcal{H})$;

(3) 若 $X \geqslant Y$，则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) \geqslant \mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$;

(4) 若 $X = c =$ 常数，则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = c$;

(5) 若 $a, b \in \mathbb{R}$，则 $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{H}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$;

(6) 若 X 是 $\mathcal{H}$ 可测的，则 $\mathbb{E}(XY|\mathcal{H}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$;

(7) 若 $\sigma(X)$ 与 $\mathcal{H}$ 独立，则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}X$;

(8) 若 $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{F}$，则 $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H}_2)|\mathcal{H}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}_1)$。

1.3　随机过程和 Brown 运动

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间。一个关于 t 递增的 $\mathcal{F}$ 的 σ 子代数族 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为滤子。也就是说，若 $0 \leqslant t < s < \infty$，则 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$。在一个完备的概率空间里，若一个滤子 $\mathcal{F}_t$ 满足 $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$ $(t \geqslant 0)$ 且 $\mathcal{F}_0$ 包含所有的 $\mathbb{P}$ 零集，则此滤子称为满足通常条件。本书总假设所涉及的概率空间是完备的，并且相应的滤子满足通常条件。一个 $\mathbb{R}^n$ 值的随机变量族 $\{X_t\}_{t\in I}$ 称为是一个随机过程，I 称为其参数集或指标集，$\mathbb{R}^n$ 称为其状态空间。在本书中，I 总是取为 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 或非负整数族。

对每个给定的 $t \in I$，X_t 是一个随机变量，所以随机过程可以看成是一个定义在 I 上的随机变量值的函数。

对每个给定的 $\omega \in \Omega$，$X_t(\omega)$ $(t \in I)$ 可以看成是一个定义在 I 上的确定性的 $\mathbb{R}^n$ 值函数，称为该随机过程对应于 ω 的样本轨道。随机过程又可以看成是它的所有样本轨道的集合。同时，一个随机过程也可以看成是定义在 $I \times \Omega$ 上的 (t, ω) 的二元函数 $X(t, \omega)$。

给定 n 维向量值随机过程 X_t $(t \geqslant 0)$，定义在 $\mathbb{R}^{n\times k}(k = 1, 2, \cdots)$ 上的概率测度族

$$\begin{aligned}&\{\mu_{t_1,\cdots,t_k} | \mu_{t_1,\cdots,t_k}(B_1 \times \cdots \times B_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, \cdots, X_{t_k} \in B_k), t_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k\}\end{aligned}$$