西安交大考研

2011版 数学考研

考点精讲 方法精练

数学三

主　编　龚冬保

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

(2011版)

数学考研
考点精讲方法精练

(数学三)

主编　龚冬保

编著　(高等教学)龚冬保　王寿生　褚维盘
(线性代数)崔荣泉
(概率统计)周家良

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑，时间：2010 年 7 月下旬至 2011 年 1 月考试前；答疑信箱：glsdy@126. com

图书在版编目(CIP)数据

2011 版 数学考研考点精讲方法精练 数学三/龚冬保主编. —5 版. —西安：西安交通大学出版社，2010. 5
ISBN 978 - 7 - 5605 - 3533 - 3

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①龚… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 070144 号

书　　名 2011 版数学考研考点精讲方法精练(数学三)
主　　编 龚冬保
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www. xjtupress. com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安建科印务有限责任公司

开　　本 787mm×1 092mm　1/16　**印张** 23　**字数** 704 千字
版次印次 2010 年 5 月第 5 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978 - 7 - 5605 - 3533 - 3/O · 331
定　　价 37. 20 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo. cn

2011 版 前 言

—— 兼释 2010 年的部分试题

拿到 2010 年考研的三套数学试卷后，像往年一样，与我们所编写的几本辅导书(《数学考研考点精讲方法精练》《数学考研典型题》《数学考研模拟考试试卷》，分别简称：《精讲精练》、《典型题》、《模拟试卷》") 作了对比，除了考点、题型的覆盖率很高之外，今年的试题与我们书中一些几乎一样的题更多了一些，而且我们书中介绍的一些特殊的解题方法与技巧，可以使这些题做起来又快捷又不易出错. 以下我们选出一部分今年的试题作为例题，讲述于下.

一、客观题

例 1 设函数 $z=z(x,y)$，由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$. 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x (B) z (C) $-x$ (D) $-z$ [ ]

解 令 $F(u,v)=u+v$，则由 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 可得 $z=-y$. 于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-y=z$. 故选(B).

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，$r(\boldsymbol{A})=3$ 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

[ ]

解 由于任何矩阵与自身相似，令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$，便知满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故选(D).

以上是我们介绍的"特殊试验"法，当然只适用于选择题. 平时做题，应将此方法与基本方法结合起来练习.

例 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}$ (B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y)}$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y)}$ (D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}$ [ ]

解 此题属"积分和"型的极限，既可视为二重积分，也可用定积分作. 明显可看出(D)是正确选项.

用二重积分解：就是把正方形：$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1\}$ 均匀分成 n^2 个面积为 $\dfrac{1}{n^2}$ 的小正方形：

$\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{i-1}{n}\leqslant x\leqslant\dfrac{i}{n};\dfrac{j-1}{n}\leqslant y\leqslant\dfrac{j}{n}\right\}$ 中作积分微元：$\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 作

和的极限即得

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)};$$

用定积分解：可由$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$.

分别将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $0\leqslant y\leqslant 1$ 各 n 等分即有

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i};$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}$$

故$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

例 4 函数 $y=\ln(1-2x)=0$，在 $x=0$ 点处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________.

解 此题出在数学二试卷上，根据考试大纲，不能用泰勒级数，故用泰勒公式. 同样比较 x^n 项系数可得

$$\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)=-\frac{2^n}{n}\qquad \therefore\ y^{(n)}(0)=-2^n\cdot(n-1)!$$

即填 $-2^n(n-1)!$

例 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}=3$.

此题与《精讲精练》(数学一和数学二）中例 10.8 和(数学三）中例 7.8 基本一样. 例题要难些.

今年唯一出乎意料的是下面一道“超纲”的题：

例 6 设 m、n 是正整数，则反常积分$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性.

(A) 仅与 m 的取值有关　　(B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m、n 的取值都有关　　(D) 与 m、n 的取值都无关　　[　　]

解 首先，$x=0$ 和 $x=1$ 都是暇点. 在 $x=0$ 点有：$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$，而$\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$，故反常积分总是收敛的；在 $x=1$ 点，由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)^{\varepsilon}\ \sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$. $\varepsilon>0$ 可任意小，故收敛也与 m、n 无关. 故选(D).

由于《考试大纲》中从未提及反常积分收敛判别法，所以本题应属“超纲”题. 希望今后试卷中不要出现这样的题！

二、计算题

例 7 求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

解 我们在《典型题》的附录中讲到不套公式，只用微积分运算的技巧解微分方程的方法. 下面这样来解此题：方程两边同乘 e^{-2x} 得

$$e^{-2x}(y'-y)'-2e^{-2x}(y'-y)=2xe^{-x}$$

即
$$[e^{-2x}(y'-y)]'=2xe^{-x}$$

两边积分得
$$e^{-2x}(y'-y)=-2xe^{-x}-2e^{-x}+C_1$$

再用 e^x 乘上方程两边，得
$$[e^{-x}y]'=-2x-2+C_1e^x$$

积分得
$$e^{-x}y=-x^2-2x+C_1e^x+C_2.$$

即得解
$$y=-(x^2+2x)e^x+C_1e^{2x}+C_2e^x$$

例 8　设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定，$\psi(t)$ 二次可导，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$. 已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求 $\psi(t)$.

解　由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\ddot{\psi}\dot{x}-\dot{\psi}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ 得关于 $\psi(t)$ 的微分方程：$(1+t)\ddot{\psi}-\dot{\psi}=3(t+1)^2$. 由于系数是 t 的多项式，因此，我们可以预知 $\psi(t)$ 是 t 的三次多项式. 故设 $\psi(t)=at^3+bt^2+ct+d$

$$\text{由 } \psi(1)=\frac{5}{2}\quad\text{得}\quad a+b+c+d=\frac{5}{2} \tag{1}$$

$$\psi'(1)=6\quad\text{得}\quad 3a+2b+c=6 \tag{2}$$

及将 $\psi(t)$ 代入方程得：$3at^2+6at+(2b-c)=3t^2+6t+3$.

得　$a=1,2b-c=3$. 代入(1)、(2) 得 $b=\dfrac{3}{2},c=d=0$.

从而解得 $\psi(t)=t^3=\dfrac{3}{2}t^2$.

例 9　求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件：$x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

解　与此题几乎同样的题在我们所编的三种书上均有，而且我们都介绍了用“线性代数”相结合的方法求解这样的题：

设 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2-z^2-10)$.

令
$$L_x=y+2\lambda x=0 \tag{1}$$
$$L_y=x+2z+2\lambda y=0 \tag{2}$$
$$L_z=2y+2\lambda y=0 \tag{3}$$

(1)・x＋(2)・y＋(3)・z 得 $2(xy+2yz)+2\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$.

由 $x^2+y^2+z^2=10$，知 $xy+2yz\Big|_{\text{极值}}=-10\lambda$.

所以求出 λ 便可求得最值. 回到方程组(1)、(2)、(3) 是关于 x、y、z 的一次齐次方程组. 而 $x^2+y^2+z^2=10$ 说明此方程组有非零解. 故系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2\lambda & 2\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2\lambda & 2\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(4\lambda^2-5)=0$$

而 $\lambda\neq0$，故得 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故最大值为 $5\sqrt{5}$，最小值为 $-5\sqrt{5}$.

这里用到连续函数 $xy+2yz$ 在闭域 $x^2+y^2+z^2=10$ 上必能达到最大值和最小值. 且最值即极值，这时 λ 只有两个值故对应大的 $5\sqrt{5}$ 最大，$-5\sqrt{5}$ 最小.

对于这道平凡的题，用微积分与线性代数综合的方法来解，过程显得快捷简便；而对于下面的这道综合性的例题，我们却要用平凡的方法去解.

解 10　设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|\,y-2z\,|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解　设 P 点坐标为 (x,y,z)，则切平面法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y-z,2z-x\}$，与 z 轴垂直，得 $2z-x=0$.

故 P 点轨迹为 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=0\\ 2z-x=0\end{cases}$ 或 $C:\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\ 2z-y=0\end{cases}$. 所以 Σ 在 xOy 上投影是 $x^2+\dfrac{3}{4}y^2\leqslant1$.

而 $dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{-2x}{2z-y}\right)^2+\left(\dfrac{2y-z}{2z-y}\right)^2}dxdy=\dfrac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-4yz}}{|\,2z-y\,|}dxdy$

$$= \frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|2z-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ （结果是看着被积函数化来的!）

$\therefore\ I = \iint\limits_{x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$.（其中$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$）.

基本功好，并能灵活运用，像以上计算题是不用“草稿”就能做出的!所以平时一定要反复练习基本题，方能作到“熟能生巧”，解题时定能游刃有余.

例 11 （这是唯一非今年的考题，是我们《模拟试卷》第 2 套中的(21) 题)：已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f = 2y_1 - y_2^2 - y_3^2$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$，求 $f(x_1,x_2,x_3)$.

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 及 $|\boldsymbol{A}| = 2$ 知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于特征值 2 的特征向量，故 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 由于其它两个特征值都是 -1，故 $\boldsymbol{Q}$ 的第二、三列可以取与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交又彼此正交的任意两个单位向量如 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\alpha}_3 = (\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$. 于是 $\boldsymbol{Q} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，它的逆变换是

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad 即 \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2-x_3) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+x_3) \\ y_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1-x_2+x_3) \end{aligned}$$

故 $f = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = \frac{2}{3}(x_1+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2+x_3)^2 - \frac{1}{6}(2x_1-x_2+x_3)^2$

$= 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

举这个例子是说我们这道模拟题与今年一道考题几乎一样，考题稍容易些：

例 12 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 此题比上题容易处在直接告之$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$ 是对应特征值为 0 的特征向量，记为 $\boldsymbol{\alpha}_3$，如上例可取 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$. 于是逆变换为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad 即 \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_3) \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

$$f = y_1^2+y_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3. 故\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

三、证明题

例 13 设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$ 内二阶可导，且 $2f(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f(2)+f(3)$. 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi) = 0$.

证 这里我们略去了问题(Ⅰ)，使问题略难一点. 将已知条件 $f(0) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(2)+f(3)}{2}$.

由连续函数的平均值定理，知存在 $\eta_1\in[0,2]$，$\eta_2\in[2,3]$，使 $f(0)=f(\eta_1)=f(\eta_2)$. 要往下走必须有 $\eta_1\in(0,2)$. 所以积分中值定理得用微分中值定理来证明. 即设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(F(2)-F(0))=F'(\eta_1)=f(\eta_1)$. 故 $\eta_1\in(0,2)$. 因此在 $[0,\eta_1]$，$[\eta_1,\eta_2]$ 上对 $f(x)$ 用罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(0,\eta_1)$，$\xi_2\in(\eta_1,\eta_2)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 用罗尔定理得存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$. 使 $f''(\xi)=0$

与这道类似的题近年来数学三考得很多，可参看《典型题》的附录.

例 14 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$，证明存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2},1)$. 使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

证 将结论改成 $f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$. 便很容想到作辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$. 问题变成 $F'(\xi)+F'(\eta)=0$. 下面证明方法再自然不过了.

$$0=F(1)-F(0)=[F(1)-F(\frac{1}{2})]+[F(\frac{1}{2})-F(0)]=\frac{1}{2}[F'(\eta)+F'(\xi)]$$

不必我们往下写了，结论已得证明！

2010 年证明题比较容易，但估计得分率不高，原因是在平时数学中推理能力的训练很少. 所以读者仍要重视做证明题的思路和方法. 做题最好能一题多变和坚持一题多解. 如本题可变为：

例 15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{1+m}$，证明存在 $\xi_i\in(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$ $(i=1,2,\cdots,n)$，使 $\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^m$

证 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{m+1}x^{m+1}$，则有

$0=F(1)-F(0)=[F(1)-F(\frac{n-1}{n})]+[F(\frac{n-1}{n})-F(\frac{n-2}{n})]+\cdots+[F(\frac{1}{n})-F(0)]$，用拉氏公式得，存在 $\xi_i\in(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$，使 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)=0$，即可得本题的证明.

总之，分析每一次的考试题，都会给我们带来一些启发，对准备今后的考试有利. 我们分析了 2010 年的部分试题，并就大多数题提出了一些快捷解题方法. 但仍要强调每位考生对您未来的考试要坚持做到“凡是考试的基本题都会作，凡是会作的题一定不错”. 我们以上分析也是抛砖引玉，希望考生在复习迎考时要像这样去分析近年的所有考题，对今后的考试肯定会有帮助.

和往年一样，我们将于 2010 年 7 月下旬至 2011 年元月考试前，在网上回答阅读我们书的读者提出的问题. 答疑信箱：glsdy@126.com.

编　者

2010 春于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多，却没有一本专门指导考研复习使用的教材，广大考生很希望有这样的教材。为此，我们尝试编写了本教材，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》，全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分，本书采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，创立了一种新的体系，在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次，更加适合于高效的复习。如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，本书针对考研主要是考核解题能力的特点，安排了大量的例题，采用一题多解，一题多变的方式，侧重讲解题的思路、方法和技巧，培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按《数学考试大纲》，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中 70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导等略去不讲，如果想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目 录

第 1 章　一元函数微积分(一)

1.1　微积分的基本方法

本书为何从微、积分法开始，而不从函数、极限开始?这正是本书的特点.我们认为,“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手，而不是从头再学一遍，这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1　微积分的基本公式

定义 1.1　在某个区间 I 上，若 $F'(x)=f(x)$，便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为$\int f(x)\mathrm{d}x$.

从运算的角度讲，不定积分是微分的逆运算.因此，微积分运算的基础在于微分法.利用熟悉的微分，来做不太熟悉的积分，是复习微积分运算基本功的好方法.

例 1.1　求$\int \sin 3x\mathrm{d}x$.

解　这样想：$\cos 3x$ 求导能得到 $\sin 3x$，于是求导：$(\cos 3x)'=-3\sin 3x$，从而得$\int \sin 3x\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

这就是我们说的用微分做积分题的方法，非但快，还不会出错，因为我们已经用求导验证了所得到的结果.下一个例题更能看出将微积分联系起来的好处.

例 1.2　验证表 1.1 中的基本公式(13)′，即

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

解　做此题有一个巧妙方法

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \overset{②}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{③}{=} \int \frac{\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \overset{④}{=} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

这个方法是怎样得到的呢?原来它来自于求导的逆运算

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]' \overset{④'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(x+\sqrt{x^2+a^2})' \overset{③'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$\overset{②'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①'}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

上面求导的倒数第 1 步即等式 ①′ 与积分的第 1 步即等式 ① 倒过来看是一样的；同样 ②′ 与 ②、③′ 与 ③、④′ 与 ④ 是对应的.即，将求导的流程倒过来做，便得出这个积分的方法.

通过微分方法做积分题，可以让我们取得复习微积分的主动权，可以自己编题，先做微分，再反过来从微分的结果做积分.

例 1.3　我们目的是练习分部积分法，因此，编出一个题：$x^2\mathrm{e}^{-x}$，求导得$(x^2\mathrm{e}^{-x})'=(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}$；再求积分：

$$\int(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}+2\int(1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}-2(1-x)\mathrm{e}^{-x}-2\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$=x^2\mathrm{e}^{-x}+C.$$

因为是自己编的题，先求导，再积分，既练了微分，又练了积分，不用课本也不用老师、自编、自导、自演练，何乐而不为呢！我们提倡这样的复习方法：抓住内容间的联系，把书读薄，这样能够提高复习效率，增强复习效果.

为了练习微积分基本功，先要熟悉基本公式和运算法则，而且还是将微分和积分相对照更好.（见表 1.1 和表 1.2）.

表 1.1　微积分基本公式对照表

基本导数公式	对应的不定积分公式
① $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	①′ $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$
② $(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$	②′ $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\|x\|+C$
③ $(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0,a\neq1)$	③′ $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq1)$
④ $(\sin x)'=\cos x$	④′ $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
⑤ $(\cos x)'=-\sin x$	⑤′ $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
⑥ $(\tan x)'=\sec^2x$	⑥′ $\int\sec^2x\mathrm{d}x=\tan x+C$
⑦ $(\cot x)'=-\csc^2x$	⑦′ $\int\csc^2x\mathrm{d}x=-\cot x+C$
⑧ $(\arcsin\frac{x}{a})'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$	⑧′ $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑨ $(\arctan\frac{x}{a})'=\frac{a}{a^2+x^2}\quad(a>0)$	⑨′ $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑩ $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$	⑩′ $\int\mathrm{ch}x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}x+C$
⑪ $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$	⑪′ $\int\mathrm{sh}x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}x+C$
⑫ $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$	⑫′ $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2x}=\mathrm{th}x+C$
⑬ $(\ln\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\|)'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad(a>0)$	⑬′ $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\|+C\quad(a>0)$
⑭ $(\ln\|\frac{a+x}{a-x}\|)'=\frac{2a}{a^2-x^2}\quad(a>0)$	⑭′ $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\|\frac{a+x}{a-x}\|+C\quad(a>0)$

对此表中 14 对公式，务必记牢；以导数公式为基础，做到倒背如流.

由于紧扣微积分的联系，考虑到读者对微分熟悉，对积分较生疏，因此，我们以下主要先讲四种基本积分方法，读者应养成用微分检验积分结果的习惯.

表 1.2　微积分基本运算法则对照表

微分法(设 $F'(x)=f(x),G'(x)=g(x)$)	积分法
① 和的微分 $\mathrm{d}[F(x)+G(x)]=f(x)\mathrm{d}x+g(x)\mathrm{d}x$	①′ 分项积分法 $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$
② 复合微分法 $\mathrm{d}F(u(x))=f(u)\mathrm{d}u=f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$	②′ 第一类换元积分法 $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u$
③ 复合微分法 $\mathrm{d}F(x(t))=f(x)\mathrm{d}x=f(x)\dot{x}(t)\mathrm{d}t$	③′ 第二类换元积分法 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(x(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t$
④ 乘积微分法 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$	④′ 分部积分法 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$

1.1.2　分项积分法

例 1.4　$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$

例 1.5　$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=x-\arctan x+C.$

例 1.6　$\int\tan^2x\mathrm{d}x=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

分项积分法是最基本却又是容易被忽视的积分法，在复习中值得留意.

1.1.3　第一类换元积分法(凑微分的积分法)

例 1.7　计算$\int\sin2x\mathrm{d}x$.

解 1　原式$=\frac{1}{2}\int\sin2x\mathrm{d}(2x)=\frac{-1}{2}\cos2x+C.$

注　这里，实际上是令 $2x=u$，但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时，不必写出新的积分元 u，大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u，而是将被积表达式凑成微分形式，即如 $\sin2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\frac{1}{2}\cos2x)$，故也称凑微分法.

解 2　原式$=2\int\sin x\cos x\mathrm{d}x=2\int\sin x\mathrm{d}(\sin x)=\int\mathrm{d}\sin^2x=\sin^2x+C.$

解 3　原式$=2\int\cos x\sin x\mathrm{d}x=-2\int\cos x\mathrm{d}(\cos x)=-\cos^2x+C.$

复合求导是最重要的微分法则，因此，**凑微分法是积分的最重要的方法.**

例 1.8　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 1　$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\boxed{\ln|\tan x+\sec x|+C}$

解 2　$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2x}=\boxed{\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C}$

解 3　$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\boxed{\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C}$

解 4 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)} = \int \frac{d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} = \int \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} d(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$

$$= \boxed{\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right| + C}$$

以上 4 个方框的结果都是计算$\int \frac{dx}{\cos x}$ 的公式,读者可用微分还原.

例 1.9 求$\int \frac{dx}{1+e^x}$.

解 1 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$

解 2 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int (\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}) e^x dx = x - \ln(1+e^x) + C$

解 3 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$

1.1.4 第二类换元积分法

这一类是地道的换元法,第一类换元是凑微分,可以不作"换元",第二类是假设被积函数 $f(x)$ 的原函数不易看出,而令 $x = x(t)$. 这样

$\int f(x)dx = \int f(x(t))\dot{x}(t)dt$,使 $F(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$ 比较简单. 通常,**这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式.**

例 1.10 求$\int x\sqrt{1-2x}dx$.

解 令 $1-2x = t^2$. 则 $x = \frac{1}{2}(1-t^2)$, $dx = -tdt$.

原式$= \frac{1}{2}\int (t^2-1)t^2 dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3 + C$

$= \frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2} - 5(1-2x)^{3/2}] + C$

例 1.11 求$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

解 1 令 $x = a\sin t$,则 $dx = a\cos t dt$.

原式$= a^2\int \cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$

$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$(可以当成基本公式).

解 2 (分部积分法).

$I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (移项,解出 I)

$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

解 3 (主要也是分部积分法).

$$I = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - I \quad (移项)$$

故 $$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 1.12 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

解 1 (第一类换元).

原式 $=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$

解 2 原式 $=-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}}=-2\arcsin\sqrt{1-x}+C=2\arccos\sqrt{1-x}+C.$

注 遇到函数,首先要想到定义域.本题被积函数的定义域是(0,1),故我们只是在(0,1)内求它的原函数.

解 3 (直接用公式).

原式 $=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}=\arcsin(2x-1)+C.$

解 4(换元积分法) 令 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t$

原式 $=\int\mathrm{d}t=t+C=\arcsin(2x-1)+C.$

解 5 由 $0<x<1$ 知,可令 $x=\sin^2t, 1-x=\cos^2t, \mathrm{d}x=2\sin t\cos t\mathrm{d}t.$

原式 $=2\int\mathrm{d}t=2t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$

解 6(有理化变换)考虑被积函数.

由 $$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

令 $\frac{x}{1-x}=t^2$, 则 $x=\frac{t^2}{1+t^2}, \mathrm{d}x=\frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

原式 $=2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$

1.1.5 分部积分法

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分,化为 $v(x)u'(x)$ 的积分.要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.13 求$\int\ln x\mathrm{d}x$.

解 原式 $=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$

例 1.14 求$\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x$.

解 原式$=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{x^3}{3}\arcsin x+\frac{1}{6}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)-\frac{1}{6}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$