普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学物理方程

尹景学　王春朋　杨成荣　王泽佳

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学物理方程

Shuxue Wuli Fangcheng

尹景学　王春朋　杨成荣　王泽佳

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书用数学分析和实变函数知识来讲解典型的数学物理方程理论。选材少而精，在介绍经典理论的同时，融入了偏微分方程的现代理论。内容安排由浅入深，循序渐进。

全书共分为四章，重点论述偏微分方程中典型方程的求解方法、广义函数空间上的 Fourier 变换方法和古典解性质，此外对于偏微分方程的弱解理论也给予了初步介绍。每章还配置了许多富有启发性的习题。

本书可作为高等学校数学类专业以及物理学、金融数学等相关学科的本科生教材或教学参考书，也可供在实际工作中需要利用偏微分方程基础知识的科研人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学物理方程 / 尹景学等. — 北京: 高等教育出版社，2010. 5

ISBN 978-7-04-029211-4

I. ①数··· II. ①尹··· III. ①数学物理方程 - 高等学校 - 教材 IV. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 054874 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	肥城新华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010 年 5 月第 1 版
印　　张	12.75	印　　次	2010 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	230 000	定　　价	19.20 元

物料号　29211–00

前　言

本书是作者在为吉林大学数学学院本科生开设的数学物理方程课程的讲授讲义的基础上，经过几次修改并适当扩充而形成的，可作为高等学校数学类专业的本科生教材。

传统的数学物理方程教材以介绍经典解法为主，如分离变量法、行波法以及在可积函数框架下建立的 Fourier 变换方法。作为偏微分方程理论的入门知识，这些解法的介绍无疑是十分重要的。本书第一章介绍数学物理方程定解问题的经典解法。除了广泛应用的分离变量法、行波法以外，我们还介绍幂级数解法与相似解解法。值得注意的是，随着偏微分方程的现代理论的形成，以及现代科学技术的迅猛发展，经典分析理论已无法满足各种应用领域的实际需要。例如，作为偏微分方程数值解的重要方法之一的 Galerkin 方法就用到了广义函数的理论，并且成为本科生计算方法课程的一个重要组成部分。基于这种考虑，我们在第二章介绍 Fourier 变换方法和广义函数理论，其中还包括在广义函数框架下建立的 Fourier 变换方法，并于第三章介绍位势方程和热传导方程的弱解的初步理论。本书第四章介绍古典解的性质，包括位势方程和热传导方程解的极值原理和能量估计，以及弦振动方程古典解的能量估计。

本书与其他同类教材相比的特点在于以下几个方面。考虑到广义函数理论的抽象性和本科阶段学习的特点，我们主要以一个空间变量的情形来介绍 Fourier 变换方法和广义函数理论。我们首先选择速降函数空间作为基本空间来引入经典的 Fourier 变换，因为 Fourier 变换及其逆变换都是这个空间上的线性、连续的可逆变换，而且对于各种基本运算，如线性运算、卷积运算、微分运算等，都是封闭的。在这个空间上引入 Fourier 变换还在于没有脱离常义函数的框架但又易于推广到广义函数空间，这样就便于由浅入深地教学。特别地，我们先通过速降函数类和缓增函数类的对偶性质介绍了初值为初等函数的 Cauchy 问题的解法，从而很自然地借助广义函数引入了初等函数的 Fourier 变换。

本书的另一个新的尝试是处理位势方程的求解问题。毫无疑问，使读者了解借助于 Green 函数表示位势方程的解是本课程的一个重要环节。然而，通常我们只能构造出如半空间和球域等特殊区域上的 Green 函数。为了弥补这一缺陷，本书第三章先介绍位势方程的弱解理论，并由此给出了 Green 函数的存在性。不

仅如此，位势方程的弱解理论也为本科生后继课程“计算方法”中的有限元方法以及研究生阶段的学习提供了必要的准备。我们还平行地安排了热传导方程弱解的相关理论内容。

为了方便读者学习本书，我们在内容安排上常以最具代表性的简单情形来介绍有关解法和理论，如书中关于经典解法和弱解存在性理论的部分，就只讨论了典型方程。而且，在有的章节里我们还仅仅讨论了低维问题，相应的高维问题留给了读者。此外，本书在广义函数理论的引入过程中，涉及很多实变函数与泛函分析的概念与结论，鉴于读者学习和教师讲授的方便，也为了保证本书内容的完整性，我们有选择地介绍了一些函数空间的基本知识，更深入的内容读者可参考有关实变函数与泛函分析的书籍。

在本书的完成过程中，得到了吉林大学数学研究所很多研究生的支持，其中博士研究生曹杨、李静、郭志昌、张超和王路生等人帮助完成了本书稿的初稿打印工作，在此表示感谢。还要感谢高等教育出版社的各方面支持，特别感谢策划编辑张长虹。

编 者

2009 年秋 长春

目　录

第一章　经典解法

在偏微分方程的研究中, 求解方程是重要的组成部分之一, 但并不存在对所有方程都适用的求解方法. 在本章中, 我们首先介绍三类典型的二阶线性偏微分方程以及它们定解问题的提法, 然后介绍四种常用且有效的求解偏微分方程的经典方法. 为了便于读者领会和掌握, 我们通过一些具体的例子来介绍这四种求解方法. 然而值得注意的是, 多数偏微分方程解的具体形式是得不到的, 而只能针对一些比较规范区域上的特殊方程进行求解.

§1　二阶线性偏微分方程及其定解问题

数学物理方程是数学分析的一个分支, 它的主要研究对象是来自各种数学物理问题的偏微分方程. 所谓偏微分方程, 是指含有未知的多元函数的某些偏导数 (可能同时还含有该未知函数本身) 的一个关系式. 大量的数学物理问题都可以归结为偏微分方程. 本书中, 我们研究二阶线性偏微分方程, 也就是说, 方程中的未知函数的最高阶偏导数是二阶的, 并且方程关于未知函数及其所有偏导数都是线性的.

1.1　典型的二阶线性偏微分方程

在本书中, 我们研究三类不同的二阶线性偏微分方程: 椭圆型方程, 抛物型方程以及双曲型方程; 并且主要研究其典型情形.

Poisson 方程

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

是典型的椭圆型方程, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, f 是 Ω 内的已知函数, u 是未知函数, Δ 是 Laplace 算子, 即

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

方程 (1.1) 可以用来描述定常物理现象和过程, 例如稳定的温度场中温度的分布和静电场中电势的分布. Poisson 方程也常常被称为位势方程. 更一般的椭圆型

方程可表述为

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x), \quad x\in\Omega,$$

其中 a_{ij}, b_i, c 是 Ω 内的函数, a_{ij} 满足

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x), \quad x\in\Omega, \qquad i,j=1,2,\cdots,N,$$

且存在 $\lambda>0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \quad x\in\Omega,\ \xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N.$$

在线性偏微分方程中, 不含未知函数及其偏导数的项称为非齐次项, 不含非齐次项的线性偏微分方程称为齐次线性偏微分方程, 否则称为非齐次线性偏微分方程. 齐次的 Poisson 方程, 即方程

$$-\Delta u=0, \quad x\in\Omega$$

称为 Laplace 方程.

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T \tag{1.2}$$

是典型的抛物型方程, 其中 $Q_T=\Omega\times(0,T)$, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, $0<T\leqslant+\infty$, f 是 Q_T 内的已知函数, u 是未知函数, Δ 是 Laplace 算子. 方程 (1.2) 可以用来描述占据区域 Ω 的导热物体内部各点在任意时刻的温度分布变化. 更一般的抛物型方程可表述为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}&\\ +c(x,t)u=f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T,&\end{aligned}$$

其中 a_{ij}, b_i, c 是 Q_T 内的函数, a_{ij} 满足

$$a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \qquad i,j=1,2,\cdots,N, \tag{1.3}$$

且存在 $\lambda>0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \quad (x,t)\in Q_T,\ \xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N. \tag{1.4}$$

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{1.5}$$

是典型的双曲型方程, 其中 $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域, $0 < T \leqslant +\infty$, f 是 Q_T 内的已知函数, u 是未知函数, Δ 是 Laplace 算子. 方程 (1.5) 可以用来描述波的运动过程, 例如, 一维的波动方程可以用来描述弦的振动过程, 因此, 一维波动方程又称为弦振动方程; 二维和三维的波动方程可以分别用来描述薄膜的振动过程和声波在空间中的传播过程. 更一般的双曲型方程可表述为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\\ + c(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,\end{aligned}$$

其中 a_{ij}, b_i, c 是 Q_T 内的函数, 并且 a_{ij} 满足 (1.3) 和 (1.4).

关于这三类方程的严格定义和物理意义以及其他一些偏微分方程的介绍, 读者可以参看 [2, 10, 14].

1.2 定解问题

一般说来, 一个偏微分方程常常有许多解, 为了从一个偏微分方程的许许多多解中找出某一特定的解, 就必须引进适当的附加条件, 通常称为定解条件. 一个偏微分方程和附加于它的定解条件合在一起, 称为定解问题. 下面我们介绍 Poisson 方程 (1.1), 热传导方程 (1.2) 以及波动方程 (1.5) 的几种常见的定解问题.

先考虑 Ω 是全空间 $\mathbb{R}^N$ 的情形. 这时, Poisson 方程 (1.1) 不需要加定解条件 (但可能对解的性质加一些限制); 热传导方程 (1.2) 需要加如下的初值条件

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega; \tag{1.6}$$

波动方程 (1.5) 则需要加下面的初值条件

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.8}$$

定解问题 (1.2), (1.6) 和定解问题 (1.5), (1.7), (1.8) 都称为初值问题, 也称为 Cauchy 问题.

下面考虑 Ω 不是全空间 $\mathbb{R}^N$ 的情形, 记 $\partial\Omega$ 为 Ω 的所有边界点构成的集合, 称为 Ω 的边界. 这时, Poisson 方程 (1.1) 需要在 $\partial\Omega$ 上加边值条件; 热传导方程

(1.2) 和波动方程 (1.5) 除了需要加相应的初值条件外, 还需要在 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上加边值条件. 在 $\partial\Omega$ 或 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上直接给出 u 的值的边值条件称为第一边值条件, 也称为 Dirichlet 边值条件; 在 $\partial\Omega$ 或 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上给出 u 的法向导数的边值条件称为第二边值条件, 也称为 Neumann 边值条件; 在 $\partial\Omega$ 或 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上给出 u 的法向导数与 u 本身之间关系的边值条件称为第三边值条件, 也称为 Robin 边值条件.

对于 Poisson 方程 (1.1), 满足第一边值条件

$$u(x)=g(x),\quad x\in\partial\Omega \tag{1.9}$$

的定解问题称为第一边值问题, 也称为 Dirichlet 问题; 满足第二边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)=g(x),\quad x\in\partial\Omega \tag{1.10}$$

的定解问题称为第二边值问题, 也称为 Neumann 问题, 其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量; 满足第三边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)+h(x)u(x)=g(x),\quad x\in\partial\Omega \tag{1.11}$$

的定解问题称为第三边值问题, 也称为 Robin 问题.

对于热传导方程 (1.2), 满足第一边值条件

$$u(x,t)=g(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{1.12}$$

和初值条件 (1.6) 的定解问题称为第一初边值问题; 满足第二边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x,t)=g(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{1.13}$$

和初值条件 (1.6) 的定解问题称为第二初边值问题; 满足第三边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x,t)+h(x,t)u(x,t)=g(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{1.14}$$

和初值条件 (1.6) 的定解问题称为第三初边值问题.

对于波动方程 (1.5), 满足第一边值条件 (1.12) 和初值条件 (1.7), (1.8) 的定解问题称为第一初边值问题; 满足第二边值条件 (1.13) 和初值条件 (1.7), (1.8) 的定解问题称为第二初边值问题; 满足第三边值条件 (1.14) 和初值条件 (1.7), (1.8) 的定解问题称为第三初边值问题.

除了这三类定解问题, 还常有这样的情况, 在一部分边界上给定一种边值条件, 而在另一部分边界上给定不同种类的边值条件, 这样的定解问题称为混合边值问题 (对椭圆型方程) 和混合初边值问题 (对抛物型方程和双曲型方程).

1.3 解的空间与定解问题的适定性

作为偏微分方程的解, 自然需要具有相应的光滑性 (也称为正则性). 例如, Poisson 方程 (1.1) 的解需要在 Ω 内二次连续可微, 即 $u \in C^2(\Omega)$; 热传导方程 (1.2) 的解需要在 Q_T 内关于 x 二次连续可微, 关于 t 一次连续可微, 即 $u \in C^{2,1}(Q_T)$; 波动方程 (1.5) 的解需要在 Q_T 内关于 x 和 t 二次连续可微, 即 $u \in C^2(Q_T)$. 这里, 我们用 $C^{m,k}(Q_T)$ 表示在 Q_T 内关于 x 变量 m 次连续可微, 关于 t 变量 k 次连续可微的函数构成的集合, 其中 m 和 k 是非负整数. 对于定解问题, 还需要在边界上满足适当的光滑性, 例如

(i) 第一边值问题 (1.1), (1.9) 的解需要满足 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;

(ii) 第二边值问题 (1.1), (1.10) 和第三边值问题 (1.1), (1.11) 的解需要满足 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$;

(iii) 第一初边值问题 (1.2), (1.12), (1.6) 的解需要满足 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$;

(iv) 第二初边值问题 (1.2), (1.13), (1.6) 和第三初边值问题 (1.2), (1.14), (1.6) 的解需要满足 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times (0,T)) \cap C(\overline{Q}_T)$;

(v) 第一初边值问题 (1.5), (1.12), (1.7), (1.8) 的解需要满足 $u \in C^2(Q_T) \cap C^{0,1}(\Omega \times [0,T)) \cap C(\overline{Q}_T)$;

(vi) 第二初边值问题 (1.5), (1.13), (1.7), (1.8) 和第三初边值问题 (1.5), (1.14), (1.7), (1.8) 的解需要满足 $u \in C^2(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times (0,T)) \cap C^{0,1}(\Omega \times [0,T)) \cap C(\overline{Q}_T)$.

这些具有适当光滑性的解有时也统称为古典解.

应该指出, 对于初边值问题, 要得到具有适当光滑性的解, 初值和边值还需要在角点 $\partial\Omega \times \{t=0\}$ 处满足适当的条件, 这些条件称为相容性条件. 例如, 第一初边值问题 (1.2), (1.12), (1.6) 的 $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ 解的相容性条件为

$$g(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

第一初边值问题 (1.5), (1.12), (1.7), (1.8) 的 $C^2(\overline{Q}_T)$ 解的相容性条件为

$$g(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial g}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \partial\Omega$$

和

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,0) - \Delta\varphi(x) = f(x,0), \quad x \in \partial\Omega,$$

这里, 函数在角点 $\partial\Omega \times \{t=0\}$ 处的值都是相应的极限, 即对 $x \in \partial\Omega$, 有

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} \varphi(y), \quad \Delta\varphi(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} \Delta\varphi(y), \quad \psi(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} \psi(y),$$

$$g(x,0)=\lim_{\substack{(y,t)\to(x,0)\\(y,t)\in\partial\Omega\times(0,T)}} g(y,t),\quad \frac{\partial g}{\partial t}(x,0)=\lim_{\substack{(y,t)\to(x,0)\\(y,t)\in\partial\Omega\times(0,T)}}\frac{\partial g}{\partial t}(y,t),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,0)=\lim_{\substack{(y,t)\to(x,0)\\(y,t)\in\partial\Omega\times(0,T)}}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(y,t),\quad f(x,0)=\lim_{\substack{(y,t)\to(x,0)\\(y,t)\in Q_T}} f(y,t).$$

本章接下来的内容里，我们将介绍求解偏微分方程的几个经典方法. 在介绍这些方法之前，我们给出两点说明. 一方面，和常微分方程不同，偏微分方程的通解一般都求不出来，而且即使求出了通解，也往往难以从它得到定解问题的解，因为通解中一般包含着任意函数，而不是任意实数. 所以，对于偏微分方程，一般只能就具体的定解问题作具体的分析，个别求解. 另一方面，求解偏微分方程一般分两步走：第一步，假定所有已知和未知的函数都具有很好的性质，以致无论进行何种运算（例如逐项微分和级数展开等）都是合理的，甚至进行一些没有定义的形式推导，由此得到一个所谓的“形式解”；第二步，严格验证所求得的形式解就是定解问题的解，这里通常需要对定解条件加上适当的条件.

作为本节的结束，我们最后介绍定解问题的适定性概念. 从一个具体的数学物理问题抽象出来的偏微分方程定解问题，如果抽象得正确的话，它应该有解，应该只有一个解，并且当定解数据（即出现在方程和定解条件中的已知函数）变动很小时相应的解变化也很小. 这三个方面，即解的存在性、唯一性和稳定性，合在一起，通常称为定解问题的适定性. 从应用的角度来看，要求一个定解问题存在唯一解是十分自然的，要求解具有稳定性也是理所当然的.

§2 分离变量法

本节我们介绍求解偏微分方程的经典方法之一 —— 分离变量法，它的基本思想是设法把解偏微分方程的问题转化为解常微分方程的问题. 我们主要以三类典型的二阶线性偏微分方程为例，介绍利用分离变量法求解偏微分方程的基本步骤. 针对不同的方程定解问题，我们分四小节来分别讨论.

2.1 第一初边值问题

我们首先针对一维波动方程和热传导方程的第一初边值问题来介绍应用分离变量法求解的思路与步骤.

例 2.1 求解如下定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<\pi,\ t>0, \tag{2.1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\qquad t>0, \tag{2.2}$$

$$u(x,0)=0, \qquad 0<x<\pi, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\pi x-x^2, \qquad 0<x<\pi. \tag{2.4}$$

解 我们先利用分离变量法求解上述定解问题的形式解, 然后再验证形式解是定解问题的解. 分离变量法的基本思想是寻找定解问题形如

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t) \tag{2.5}$$

的解. 如果 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是某适当函数空间的基底或者完备的直交集合 (即 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 正规化后是一个基底), 则定解问题可以找到形如 (2.5) 的解. 实际上, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可通过求解相应的齐次方程满足相应的零边值条件的所有变量可分离形式的非零解来构造.

求解过程分为三步.

第一步, 构造基底. 寻找方程 (2.1) 满足边值条件 (2.2) 的变量可分离形式的非零解. 设

$$u(x,t)=X(x)T(t), \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0$$

是方程 (2.1) 满足边值条件 (2.2) 的非零解, 将 u 的表达式代入方程 (2.1), 得

$$X(x)T''(t)=X''(x)T(t), \quad 0<x<\pi,\ t>0.$$

将上式改写成

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}, \quad 0<x<\pi,\ t>0.$$

由于 x 和 t 是两个相互独立的变量, 为使上式成立, 两端必然等于某个常数, 设这个常数为 $-\lambda$, 则有

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda, \quad 0<x<\pi,\ t>0.$$

结合边值条件 (2.2) 可知, $X(x)$ 和 $T(t)$ 分别满足

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<\pi, \tag{2.6}$$

$$X(0)=X(\pi)=0 \tag{2.7}$$

和

$$T''(t)+\lambda T(t)=0, \quad t>0. \tag{2.8}$$

常微分方程两点边值问题 (2.6), (2.7) 并不是对所有的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 都有非零解的, 我们称使问题 (2.6), (2.7) 有非零解的 λ 为这个问题的特征值, 相应的非零解称

为对应于此特征值的特征函数, 寻求问题 (2.6), (2.7) 的所有特征值和特征函数的问题称为特征值问题.

我们首先断言特征值 $\lambda > 0$. 在 (2.6) 的两端同乘 $X(x)$, 然后在 $[0,\pi]$ 上积分, 得

$$-\int_0^\pi X''(x)X(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^\pi X^2(x)\mathrm{d}x.$$

通过分部积分, 并利用边值条件 (2.7), 我们可以得到

$$\int_0^\pi X'^2(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^\pi X^2(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $X(x)$ 是非零解, 根据边值条件 (2.7) 可知 $X(x)$ 不能是常数函数, 则必有 $\lambda > 0$.

下面我们来求问题 (2.6), (2.7) 的特征值和特征函数. 由常微分方程的理论可知, 当 $\lambda > 0$ 时, 方程 (2.6) 的通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

其中 A 和 B 是任意实数. 代入边值条件 (2.7), 可得

$$0 = X(0) = A, \quad 0 = X(\pi) = A\cos\sqrt{\lambda}\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\pi.$$

从而

$$A = 0, \qquad \lambda = n^2, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这表明, 特征值问题 (2.6), (2.7) 的所有特征值为

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

相应的特征函数 (不考虑常数因子) 为

$$X_n(x) = \sin nx, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

容易验证 $\{X_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是一个直交系统, 即

$$\int_0^\pi X_m(x)X_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin mx\sin nx\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n,\ m, n = 1, 2, \cdots.$$

根据 Fourier 级数理论, $\{X_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $L^2((0,\pi))$ 中还是完备的. 也就是说, 对任意的 $w \in L^2((0,\pi))$, 存在数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^2$ 收敛, 且

$$w(x) = \sum_{n=1}^\infty a_nX_n(x), \quad \text{a.e. } x \in (0,\pi).$$

这里, $L^2((a,b))\,(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ 表示满足条件

$$\int_a^b w^2(x)\mathrm{d}x<+\infty$$

的 Lebesgue 可测函数 w 所构成的线性空间. 这表明, $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 正规化后就是 $L^2((0,\pi))$ 的一个基底.

第二步, 求解问题 (2.1)—(2.4) 的形式解. 将 λ_n 的值代入 (2.8), 可得其通解为

$$T_n(t)=A_n\cos nt+B_n\sin nt,\quad t\geqslant 0,\qquad n=1,2,\cdots,$$

其中 A_n 和 B_n 是任意实数. 设

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx(A_n\cos nt+B_n\sin nt),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0$$

是问题 (2.1)—(2.4) 的形式解, 其中 A_n 和 B_n 是待定系数. 利用初值条件 (2.3) 可以推出

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx=0,\quad 0<x<\pi,$$

故

$$A_n=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

于是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx\sin nt,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0.$$

代入初值条件 (2.4), 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\sin nx=x(\pi-x),\quad 0<x<\pi.$$

直接运算, 可得

$$\int_0^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^3}[1-(-1)^n],\quad n=1,2,\cdots.$$

因此

$$B_n=\frac{4}{n^4\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{8}{(2k-1)^4\pi}, & \text{当 } n=2k-1,\\ 0, & \text{当 } n=2k,\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots.$$