


高等学校教学用书



# 微积分学教程

第一卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著



高等教育出版社

高等学校教学用书



# 微 积 分 学 教 程

(修 訂 本)

第一卷 第一分册

T. M. 菲赫金哥尔茨著  
叶彦谦等译

高等教育出版社

本書是1954年，原是由叶彦謙等根据苏联国立技术理論書籍出版社(Гостехиздат)出版的非赫金哥尔茨(Г. М. Фихтенгольц)著“微积分学教程”(Курс дифференциального и интегрального исчисления)第一卷(1951年第三版)譯出的，現由本社照原書1958年新版修訂。原書經苏联高等教育部审定为国立綜合大学数学系教学参考書。

本書第一卷中譯本仍分两分册出版，第一分册的內容，比旧版本改动稍大，有些地方重新写过，并增加了一些內容。在第三章末尾增加一节插值法；在第四章里增加了一节凸(凹)函数；其他方面也有一些小的增删。安排的次序基本上和前一版差不多：首先講实数理論，接下去就是極限論，一元函数，导数及微分以及应用导数来研究函数等。

本書可作为我国綜合大学数学专业学生或研究生的教学参考書。

## 微 积 分 学 教 程

(修訂本)

第一卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

叶彦謙等譯

高等教育出版社社北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版业營業許可証出字第054号)

外文印刷厂印裝 新华書店發行

統一書号13010·139 开本850×1168 1/32 印張10 14/16

字数317,000 印数25,501—28,500 定价(6) 1.00

1956年12月新1版

1959年8月第2版 1960年2月北京第6次印刷

# 第一分册目录

## 緒論 实数

§ 1. 有理数域 .....	1
1. 前言(1) 2. 有理数域的順序(2) 3. 有理数的加法及減法(2)	
4. 有理数的乘法及除法(4) 5. 阿基米德公理(6)	
§ 2. 无理数的导入·实数域的順序 .....	7
6. 无理数的定义(7) 7. 实数域的順序(10) 8. 輔助命题(11)	
9. 用无尽小数来表示实数(12) 10. 实数域的連續性(14) 11. 数集的界(16)	
§ 3. 实数的算术运算 .....	18
12. 实数的和的定义(18) 13. 加法的性質(19) 14. 实数的积的定义(21)	
15. 乘法的性質(22) 16. 結論(24) 17. 絕對值(25)	
§ 4. 实数的其他性質及应用 .....	26
18. 根的存在·以有理数为指数的冪(26) 19. 以任意实数为指数的冪(27)	
20. 对数(30) 21. 綫段的度量(31)	

## 第一章 極限論

§ 1. 整序变量及其極限 .....	34
22. 变量、整序变量(34) 23. 整序变量的極限(37) 24. 无穷小量(38)	
25. 例題(39) 26. 关于有極限的整序变量的一些定理(43) 27. 无穷大量(45)	
§ 2. 極限的定理·若干容易求得的極限 .....	47
28. 对等式及不等式取極限(47) 29. 关于无穷小的預备定理(49)	
30. 变量的算术运算(50) 31. 不定式(52) 32. 極限求法的例題(55)	
33. 施篤茲定理及其应用(59)	
§ 3. 單調整序变量 .....	62
34. 單調整序变量的極限(62) 35. 例題(64) 36. 数 $e$ (69)	
37. 数 $e$ 的近似計算法(71) 38. 关于区間套的預备定理(74)	
§ 4. 收斂原理·部分極限 .....	76
39. 收斂原理(76) 40. 部分数列及部分極限(78) 41. 波查諾-魏施德拉斯	
預备定理(79) 42. 上限及下限(81)	

## 第二章 一元函数

§ 1. 函数概念 .....	85
43. 变量及其变动区域(85)	44. 变量间的函数关系, 例题(86)
45. 函数概念的定义(87)	46. 函数的解析表示法(90)
47. 函数的圖綫(92)	48. 几类最重要的函数(94)
49. 反函数的概念(99)	50. 反三角函数(101)
51. 函数的叠置·总结(106)	
§ 2. 函数的極限 .....	107
52. 函数的極限的定义(107)	53. 变成整序变量的情形(109)
54. 例题(112)	55. 極限理論的拓广(120)
56. 例题(123)	57. 單調函数的極限(125)
58. 波查諾-柯希的一般判定法(126)	59. 函数的上限及下限(128)
§ 3. 无穷小及无穷大的分級 .....	128
60. 无穷小的比較(128)	61. 无穷小的尺度(129)
62. 等价无穷小(131)	63. 主部的分出(133)
64. 应用題(135)	65. 无穷大的分級(137)
§ 4. 函数的連續性及間断 .....	137
66. 函数在一点处的連續性的定义(137)	67. 連續函数的算术运算(139)
68. 連續函数的例题(140)	69. 單方連續·間断的分类(142)
70. 間断函数的例题(143)	71. 單調函数的連續性及間断(146)
72. 初等函数的連續性(147)	73. 連續函数的叠置(149)
74. 一个函数方程的解(149)	75. 指数函数、对数函数及幂函数的函数特性(151)
76. 三角余弦及双曲余弦的函数特性(152)	77. 函数的連續性在計算極限时的应用(154)
78. 幂指数式(157)	79. 例题(158)
§ 5. 連續函数的性質 .....	160
80. 关于函数取零值的定理(160)	81. 应用于解方程(163)
82. 介值定理(163)	83. 反函数的存在(165)
84. 关于函数的有界性的定理(167)	85. 函数的最大值及最小值(168)
86. 均匀連續的概念(170)	87. 康托定理(172)
88. 海萊尔預备定理(173)	89. 基本定理的新証明(175)

## 第三章 导数及微分

§ 1. 导数及其求法 .....	179
90. 求动点速度的問題(179)	91. 在曲綫上作切綫的問題(180)
92. 导数的定义(182)	93. 求导数的例题(186)
94. 反函数的导数(190)	95. 导数公式一覽表(192)
96. 函数的增量的公式(193)	97. 求导数的几个簡單法則(194)
98. 复合函数的导数(196)	99. 例题(197)
100. 單方导数(203)	101. 无穷导数(204)
102. 特殊情形的例题(205)	
§ 2. 微分 .....	206
103. 微分的定义(206)	104. 可微性与导数存在之間的关系(207)

105. 微分法的基本公式及法则(209)	106. 微分的形式不变性(211)
107. 微分是近似公式的来源(213)	108. 应用微分来估计误差(215)
§ 3. 微分学的基本定理	217
109. 費馬定理(217)	110. 达布定理(219)
111. 洛尔定理(220)	112. 拉格朗奇公式(221)
113. 导数的極限(223)	114. 柯希公式(225)
§ 4. 高阶导数及高阶微分	226
115. 高阶导数的定义(226)	116. 任意阶导数的普遍公式(228)
117. 萊伯尼茲公式(232)	118. 例题(234)
119. 高阶微分(236)	120. 高阶微分的形式不变性的破坏(237)
121. 参变量微分法(238)	122. 有限差分(240)
§ 5. 戴劳公式	242
123. 多项式的戴劳公式(242)	124. 任意函数的展开式·余项的皮亞諾式(244)
125. 例题(247)	126. 余项的其他形式(251)
127. 近似公式(254)	
§ 6. 插值法	260
128. 插值法的最簡單問題·拉格朗奇公式(260)	129. 拉格朗奇公式的余项(261)
130. 有重基点的插值法·埃尔密特公式(263)	
<b>第四章 利用导数研究函数</b>	
§ 1. 函数的动态的研究	265
131. 函数为常数的条件(265)	132. 函数为單調的条件(267)
133. 不等式的証明(270)	134. 極大值及極小值·必要条件(273)
135. 充分条件·第一法则(275)	136. 例题(277)
137. 第二法则(281)	138. 高阶导数的应用(283)
139. 最大值及最小值的求法(285)	140. 应用题(287)
§ 2. 凸(与凹)函数	291
141. 凸(与凹)函数的定义(291)	142. 关于凸函数的簡單命題(292)
143. 函数凸性的条件(295)	144. 顏森不等式及其应用(298)
145. 拐点(301)	
§ 3. 函数的作圖	303
146. 問題的提出(303)	147. 作圖的步驟·例题(304)
148. 无穷間断·无穷区間·漸近綫(307)	149. 例题(310)
§ 4. 不定式的定值法	313
150. $\frac{0}{0}$ 型不定式(313)	151. $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式(319)
152. 其他型的不定式(321)	
§ 5. 方程式的近似解	323
153. 导言(323)	154. 比例法则(弦綫法)(324)
155. 牛頓法则(切綫法)(327)	156. 例题及習題(329)
157. 联合法(334)	158. 例题及習題(334)
字义索引	人名对照表

# 緒論 实数

## § 1. 有理数域

1. 前言 讀者对于有理数及其性質，从中学的教材內便很熟悉了。在那时，初等数学的要求，已趋向于必需扩大数的領域。的确，在有理数中即使是正整数(自然数)的根，例如 $\sqrt{2}$ ，也常常并不存在。就是說，并没有这样的有理数 $\frac{p}{q}$ (式中 $p$ 及 $q$ ——自然数)，其平方能等于2。

为了証明，試假定其反面：設有分数 $\frac{p}{q}$ ，其平方为 $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ 。我們可以假設 $\frac{p}{q}$ 是既約分数，即 $p$ 和 $q$ 是沒有公約数的。因 $p^2 = 2q^2$ ，故 $p$ 为偶数： $p = 2r$ ( $r$ ——整数)，于是 $q$ 为奇数。用 $p$ 的式子代入，得： $q^2 = 2r^2$ ，由此推得 $q$ 为偶数。所得的矛盾便証明了我們的命題。

同时，若我們仅停留在有理数的範圍內，那末在几何学上便已显然知道，并非一切的綫段都能有一个長度。例如考察边長为單位長度的正方形，其对角綫就不可能有有理長度 $\frac{p}{q}$ ，因若不然，依畢达哥拉定理，这長度的平方应等于2，而我們已看到这是不可能的。

在本緒論內，我們要做这样一件工作：在有理数域中添上新的数——无理数，以扩大有理数域的范围。同时，我們要証明，对有理数施行算术运算及用等号、不等号結合它們等普通性質，在扩大的領域內仍然是真实的。为着要对扩大后的数域来驗證上述性質，需选出为数最少的基本性質，使其余的一切性質都能作为形式邏輯的結果而从之推出：所要驗證的便仅限于这些基本性質了。

因此，我們列举有理数域的下列一些基本性質。同时我們將用一

些例子來證明，它們的另一些眾所周知的性質是怎樣從基本性質推導出來的。我們這裡所說的“數”，總是指的有理數，用字母  $a, b, \dots$  等來表示它們。

**2. 有理數域的順序** 首先讓我們約定：所謂相等的數就是同一數的各種不同形式。換言之，“相等”(=)的概念即指“恆等”。因此，我們不再列舉相等的數的性質。

有理數域的順序得自“大於”(>)的概念，與之有關的是第一組性質。

I1° 每一對數  $a$  與  $b$  之間必有且僅有下列關係之一

$$a = b, a > b, a < b;$$

I2° 由  $a > b$  及  $b > c$  推得  $a > c$  (> 的傳遞性)；

I3° 若  $a > b$ ，則必能求得一數  $c$ ，使

$$a > c, \text{ 且 } c > b \textcircled{1}$$

(稠密性)。

“小於”( < ) 的概念作為派生的而引入。說  $a < b$ ，當且僅當  $b > a$  時。顯而易見，由  $a < b$  及  $b < c$ ，即得  $a < c$  (< 的傳遞性)。實則，由假設，不等式  $a < b$  及  $b < c$ ，相當於不等式  $b > a$  及  $c > b$ ；由此推得  $c > a$  (I2°)，或即  $a < c$ 。

在對有理數施行算術運算時所要牽涉到的“大於”這一概念的其他性質，將在以後隨時指出之。

**3. 有理數的加法及減法** 第二組性質是關於加法的，即關於求兩數之和的運算的。對於每一對數  $a$  及  $b$ ，存在着一個(唯一的)數，被稱為  $a$  及  $b$  的和(記成  $a + b$ )。這概念具有下列的性質：

II 1°  $a + b = b + a$  (加法的交換性)；

II 2°  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (加法的結合性)。

① 在這條件下也說成：數  $c$  位於數  $a$  與  $b$  之間；顯然，這樣的數有無限個之多。



零这个数比较特殊,它具有下列特性:

$$\text{II } 3^\circ \quad a+0=a;$$

此外,

II 4° 对每一数  $a$  存在着(与它对称的)数  $-a$ , 使  $a+(-a)=0$ .

在这些性质的基础上,首先解决了加法的逆运算,减法的问题。通常称使  $c+b=a$ ① 的数  $c$  为数  $a$  及  $b$  的差,假若如此,便发生这样的数的存在及其唯一性的问题。

设  $c=a+(-b)$ , 则得 [II 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+[b+(-b)]=a+0=a,$$

如此,这  $c$  满足于差的定义。

反之,令  $c'$  为数  $a$  及  $b$  的差,则有  $c'+b=a$ 。在这等式两边各加  $(-b)$ , 并变换其左边 [II 2°, 4°, 3°]:

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

结果得  $c'=a+(-b)=c$ 。

这样,就证明了数  $a$  及  $b$  的差的存在及单值性;把它记成  $a-b$ 。

由差的单值性可以推得一系列的推论。首先,由 II 3° 推得  $0=a-a$ , 因而得出结论:除去数 0 以外,具有相似于 II 3° 的性质的数不存在。其次,由此推得与所给数对称的数的唯一性:  $-a=0-a$ 。

因为由  $a+(-a)=0$  可推得  $(-a)+a=0$  [II 1°], 所以  $a=-(-a)$ , 即数  $a$  及  $-a$  为互相对称的数。我们再来证明对称数满足下述性质:

$$-(a+b)=(-a)+(-b),$$

为此,只须证明

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

而这由 II 1°, 2°, 4°, 3°, 便可推得。

最后,再引进联系  $>$  与加号的一个性质,

II 5° 由  $a>b$  推得  $a+c>b+c$ .

① 依 II 1° 定义差的这个等式可写成:  $b+c=a$ 。

它使我們得以在不等式的兩邊各加上一個等量；用它又可證明兩不等式

$$a > b \text{ 和 } a - b > 0$$

是相當的。其次，由  $a > b$  推得  $-a < -b$ 。實則，由  $a > b$  引致  $a - b > 0$ ；但  $a - b = a + (-b) = (-b) + a = (-b) + [-(-a)] = (-b) - (-a)$ ，因此這不等式可改寫成： $(-b) - (-a) > 0$ ，由此  $-b > -a$  或  $-a < -b$ 。

特別是，由  $a > 0$  推得  $-a < 0$ ，由  $a < 0$  推得  $-a > 0$ 。若  $a \neq 0$ ，則在兩個互相對稱的數  $a$  及  $-a$  中，必有一個（且僅一個）將大於 0；它即稱為數  $a$  或數  $-a$  的絕對值，記成

$$|a| = |-a|.$$

零的絕對值就定為零： $|0| = 0$ 。

根據性質 II 5°，可以逐項地合并不等式：由  $a > b$  及  $c > d$  推得  $a + c > b + d$ 。實因，由  $a > b$  推得  $a + c > b + c$ ；仿此，由  $c > d$  推得  $c + b > d + b$ ，或 [II 1°]  $b + c > b + d$ ，然後由 I 2°，最後即得  $a + c > b + d$ 。

4. 有理數的乘法及除法 第三組性質是關於乘法的，即關於求兩數之乘積的運算的。對於每一對數  $a$  及  $b$  存在着一個（唯一的）數，被稱為  $a$  及  $b$  的乘積（記成  $a \cdot b$  或  $ab$ ）。這概念具有下列性質：

III 1°  $ab = ba$ （乘法的交換性）；

III 2°  $(ab)c = a(bc)$ （乘法的結合性）。

壹這個數比較特殊，它具有下列特性：

III 3°  $a \cdot 1 = a$ ；

此外，

III 4° 對於每一異於 0 的數  $a$ ，必有數  $\frac{1}{a}$ （其倒數），使  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ 。

關於除法的問題，作為乘法的逆運算，亦可根據乘法的性質來解決，正如前面根據加法的性質來解決關於減法的問題一樣。倒數在這裡的作用正如對稱數在那裡的作用一樣。

如果一數  $c$  滿足關係

$$c \cdot b = a \text{ ①}$$

其中  $b$  常预先假定异于 0), 则  $c$  称为  $a$  及  $b$  的商。

令  $c = a \cdot \frac{1}{b}$ , 就可以满足这定义。因 [III 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

反之, 若数  $c'$  满足数  $a$  及  $b$  的商的定义, 于是  $c' \cdot b = a$ , 则在这等式两边乘以  $\frac{1}{b}$ , 以变换左边 [III 2°, 4°, 3°]:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = c' \cdot 1 = c',$$

就得到  $c' = a \cdot \frac{1}{b} = c$ 。

这样, 就证明了数  $a$  及  $b$  (设  $b \neq 0$ ) 的商的存在及单值性; 把它记成  $a:b$  或  $\frac{a}{b}$ 。

由商的单值性可知, 除了 1 以外, 再没有什么数能具有类似于 III 3° 的性质。由此, 如前所述, 推得倒数 (看成 1 及  $a$  的商) 的唯一性; 此外, 容易证明数  $a$  及  $\frac{1}{a}$  是互为倒数。

下列性质于算术的基本运算——加法及乘法双方都有关系:

$$\text{III } 5^\circ \quad (a+b)c = a \cdot c + b \cdot c \text{ (乘法关于和的分配性)}.$$

由此很易导出关于乘法关于差的分配性:

$$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

依差的定义, 这可以直接由下式推出

$$(a-b) \cdot c + b \cdot c = [(a-b) + b] \cdot c = a \cdot c.$$

再应用性质 III 5°, 可证

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0.$$

实因 [II 3°]

$$a + 0 = a, (a + 0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

① 依 III 1°, 定义商的这个等式也可写成:  $b \cdot c = a$ 。

由此推得  $0 \cdot b = 0$ , 再由 [III 1°] 得  $b \cdot 0 = 0$ .

反之, 若  $a \cdot b = 0$  又  $b \neq 0$ , 則必須  $a = 0$ . 實因,  $a = \frac{0}{b}$ , 但同時又有  $0 = \frac{0}{b}$  (因  $b \cdot 0 = 0$ ), 因為商是唯一的, 故  $a = 0$ .

最後, 我們指出聯系符號  $>$  與乘號的一個性質:

III 6° 由  $a > b$  及  $c > 0$  推得  $a \cdot c > b \cdot c$ .

據此可以用正數乘不等式的兩邊。由此可知, 當  $a > 0$  及  $b > 0$  時, 亦必有  $a \cdot b > 0$ .

注意,  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ ; 這由下面推得

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

現在不難看出, 若  $a < 0, b > 0$ , 於是  $a = -|a|, b = |b|$ , 則

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot |b| = -(|a| \cdot |b|) < 0;$$

當  $a > 0, b < 0$  時亦如此, 又若  $a < 0, b < 0$ , 則

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (-|a|)(-|b|) = -[|a| \cdot (-|b|)] = \\ &= -[-(|a| \cdot |b|)] = |a| \cdot |b| > 0. \end{aligned}$$

這樣, 我們已完全重新建立了關於乘法的符號規則, 這些符號規則現在已成為有理數的上述性質的邏輯推論了。換言之, 如果有理數要滿足上述諸性質, 就必定要遵守這些符號規則。關於乘以 0 的規則, 也可以這樣說(如上所述)。

在處理了加法和乘法的性質以後, 我們現在能夠證明在前面數的基本性質 [I 3°] 中已述及的有理數域的稠密性了。就是, 可以用它們證明, 例如, 由  $a > b$  推得  $a > \frac{a+b}{2} > b$ .

5. 阿基米德公理 我們用下列的簡單而重要的論證, 來結束我們的有理數基本性質一覽表。這一性質是不能由上述的諸性質里推得的。

IV 1° 不論  $c > 0$  是怎樣的數, 總有大于  $c$  的自然數  $n$  存在着(《阿基米德公理》)。

实际上，阿基米德曾說明一个几何的命題，即为众所周知的«阿基米德公理»：

若在直線上給定任意兩綫段  $A$  及  $B$ ，則  $A$  重复相加若干次后，其和总可以大于  $B$ 。

$$\underbrace{A + A + \cdots + A}_{n \text{次}} = A \cdot n > B.$$

若将这論証轉而对正数  $a$  及  $b$  来叙述，它便肯定有这样的自然数  $n$  存在使

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{次}} = a \cdot n > b.$$

若应用已研究过的有理数的性質，則这不等式相当于  $n > \frac{b}{a}$ ；把商  $\frac{b}{a}$  記成  $c$ ，我們便得出上面所叙述的 IV 1°。

## § 2. 无理数的导入·实数域的順序

**6. 无理数的定义** 有理数集及其在第一节內列举的一切性質，作为是已給的。

*无理数是非循环的无尽小。*

我們仿效戴狄金 (R. Dedekind) 来叙述无理数的理論。有理数域內的分划的概念是这理論的基础。若将有理数全体所成的集合分拆为两个非空集合(即至少包含一个数的)  $A, A'$ 。我們把这样的分拆叫做分划，只要滿足条件：

1° 任一有理数，必在且仅在  $A$  及  $A'$  二集之一<sup>①</sup> 中出現；

2° 集  $A$  內的任一数  $a$ ，必小于集  $A'$  內的任一数  $a'$ 。

集  $A$  称为分划的下組，集  $A'$  为上組。分划記成  $A | A'$ 。

由分划的定义推得，小于下組內的数  $a$  的一切有理数也都属于下

① “任一有理数仅在二集之一中出現”这一事实亦可由 2° 推得。

組。仿此，大于上組內的數  $a'$  的一切有理數亦都屬於上組。

例 1. 一切有理數  $a$ ，滿足不等式  $a < 1$  的，定為集  $A$ ，一切  $a'$ ，滿足  $a' \geq 1$  的，都算入集  $A'$ 。

很易驗證，這樣，我們實際上已得出分劃了。數 1 屬於  $A'$  組，且顯然成為其中最小的數。由另一方面看，在  $A$  組內並無最大數，因不論我們在  $A$  內取怎樣的數  $a$ ，恒能在  $a$  與 1 之間指出有理數  $a_1$  來，因而它必大于  $a$  並且屬於  $A$  組。

例 2. 取小于或等于 1 的一切有理數  $a$ ， $a \leq 1$ ，歸入下組  $A$ ；取大于 1 的一切有理數  $a'$ ， $a' > 1$ ，歸入上組。

則亦得一分劃，且其中在上組無最小數，而在下組有最大數（即 1）。

例 3. 取使  $a^2 < 2$  的一切正有理數  $a$ ，數 0 及一切負有理數歸入  $A$  組，使  $a'^2 > 2$  的一切正有理數  $a'$  歸入  $A'$  組。

很易證明，我們亦已得出分劃。此處，在  $A$  組內既無最大數，在  $A'$  組內亦無最小數。我們將證明，例如，這論斷的第一點（第二點同樣可以證明）。設  $a$  為  $A$  組內的任意正數，則  $a^2 < 2$ 。再證，必能得這樣的正整數  $n$ ，使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

於是  $a + \frac{1}{n}$  亦屬於  $A$ 。

這不等式相當於：

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2,$$

若  $n$  滿足不等式  $\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$ ，則上面第二個不等式也自然能滿足了。為此，只須取

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2},$$

而這是恒為可能的。[依《阿基米德公理》IV 1°]，因此，不論  $a$  為  $A$  組內的怎樣的正數，在這  $A$  組內終能求得大于它的數；又因為當  $a \leq 0$  時

这论证显也成立,故在  $A$  组内没有任何数能成为最大的。

很易明了,不可能有这样的分划存在,在它的下组内有最大数  $a_0$ ,同时在上组内又有最小数  $a'_0$ 。实际上,假设这样的分划存在着。则应用有理数域的稠密性[13°],必能取得一个位于  $a_0$  与  $a'_0$  之间的有理数  $c: a_0 < c < a'_0$ 。数  $c$  不能属于  $A$  组,因否则,  $a_0$  就不是此组的最大数,仿此,  $c$  亦不能属于  $A'$  组,但这是与定义分划的概念的性质 1° 相矛盾的。

这样,分划仅能有三种类型,如刚才例 1, 2, 3 所表明的:

- 1) 在下组  $A$  内无最大数,而在上组  $A'$  内有最小数  $r$ ;
- 2) 在下组  $A$  内有最大数  $r$ ,而在上组  $A'$  内无最小数;
- 或 3), 在下组内既无最大数,在上组内亦无最小数。

在前两种情形,我们说,分划由有理数  $r$  所产生( $r$  成为  $A$  与  $A'$  之间的界数),或说分划定义有理数  $r$ 。在例 1, 2 中, 1 便是这样的数。在第三种情形界数并不存在,分划并不定义任何有理数。今引入新的对象——无理数。让我们约定,任一 3) 型的分划定义某一无理数  $\alpha$ 。这个数  $\alpha$  便代替缺少的界数,我们好象把它插入在  $A$  组的一切数  $a$  与  $A'$  组的一切数  $a'$  中间。在例 3 中,这新创的数,很易推想而知,即是  $\sqrt{2}$ 。

我们并不引入无理数的任何同一式样的记法①,我们总是把无理数  $\alpha$  理解为有理数域中确定它的分划  $A|A'$ 。

为了一致起见,同样来理解有理数  $r$  也常是很方便的。但对于任一有理数  $r$  存在着确定它的两种分划: 在两种情形中,数  $a < r$  总是属于下组,数  $a' > r$  总是属于上组,而数  $r$  本身可以任意包含在下组(这时  $r$  为下组的最大数),或包含在上组( $r$  为上组的最小数)。为了确定起见,我们约定:凡说到确定有理数  $r$  的分划时,常把这数放在上组内。

① 这里说的是有尽的记法,对于无尽的记法,读者在 9 中会熟悉它。个别给定的无理数我们经常总是用这数所产生的关系式来记它,如  $\sqrt{2}$ ,  $\log 5$ ,  $\sin 10^\circ$  等。

有理數及無理數總稱為實數。實數的概念，為數學分析的基本概念之一。

7. 實數域的順序 由分划  $A|A'$  及  $B|B'$  所確定的二無理數  $\alpha$  及  $\beta$ ，當且僅當二分划為恒等時，始認為相等。實際上只要下組  $A$  及  $B$  互相重合就夠了，因為這時  $A'$  與  $B'$  亦必互相重合。這定義在數  $\alpha$  及  $\beta$  為有理數時，仍可保持不變。換言之，若二有理數  $\alpha$  與  $\beta$  相等，則確定它們的分划相重合，反之，由分划的重合推得數  $\alpha$  與  $\beta$  相等。在這裡，自然仍須注意到，以分划來確定有理數時的上述約定<sup>①</sup>。

現在轉而建立關於實數“大於”的概念。關於有理數這概念早已建立了。對於有理數  $r$  與無理數  $\alpha$  之間，“大於”的概念實際上在 6 中已建立了：即，若  $\alpha$  由分划  $A|A'$  所確定，我們便算作  $\alpha$  大於  $A$  組中的一切有理數，同時  $A'$  組中的一切有理數大於  $\alpha$ 。

現在設有二無理數  $\alpha$  及  $\beta$ ， $\alpha$  由分划  $A|A'$ ， $\beta$  由分划  $B|B'$  所確定。我們將稱有較大下組的那個數為較大數。更準確些說，若  $A$  組整個包含着  $B$  組，並且不與它重合，則算作  $\alpha > \beta$ 。（這條件，顯然，相當於： $B'$  組整個包含着  $A'$  組，並且不與它重合）。很易驗證，當  $\alpha, \beta$  之一是或甚至二者都是有理數時，這定義仍可保持。

現在證明實數均能滿足性質 I1° 及 2°。

I1° 任一對(實)數  $\alpha$  與  $\beta$  之間必有且僅有下列三種關係之一：

$$\alpha = \beta, \alpha > \beta, \beta > \alpha.$$

若確定  $\alpha$  的分划  $A|A'$  與確定  $\beta$  的分划  $B|B'$  相重合，則  $\alpha = \beta$ 。若這二分划不相重合，則或  $A$  整個包含  $B$ （這時  $\alpha > \beta$ ），或不是這樣。在後一情形， $B$  組內有元素  $b_0$ ，落在  $A'$  組內。則對於  $A$  組內的任何元素  $a$ ，必有  $a < b_0$ 。因此  $B$  組整個包含  $A$  組，且不與它重合，於是我們有  $\beta > \alpha$ 。

① 沒有這條件，例如，在 6 的例 1 及 2 內所考察的分划，雙方都定義數 1，但非恒等。



12° 由  $\alpha > \beta, \beta > \gamma$  推得  $\alpha > \gamma$ 。

設數  $\alpha, \beta, \gamma$  (它們中間可能有有理數) 是由分划  $A|A', B|B', C|C'$  來確定的。若  $\alpha > \beta$ , 則依“大於”的定義,  $A$  組包含  $B$  組, 且並不與它重合。但因  $\beta > \gamma$ , 故  $B$  組包含  $C$  組, 且並不與它重合。因此,  $A$  組亦包含  $C$  組, 並且並不與它重合, 即  $\alpha > \gamma$ 。

如在 2 中一樣現在可以建立“小於”的概念: 若  $\beta > \alpha$ , 則我們說  $\alpha < \beta$ 。 < 號亦與 > 號一樣具有傳遞性。

8. 輔助命題 現在我們來建立實數域的稠密性(比較 13°); 準確些說, 我們將證明下列論斷:

預備定理 1. 對於不論怎樣的兩個實數  $\alpha$  及  $\beta$ , 其中  $\alpha > \beta$ , 恒有一個位於它們中間的有理數  $r: \alpha > r > \beta$  (因此, 這種有理數無窮多個)。

因  $\alpha > \beta$ , 故確定數  $\alpha$  的分划的下組  $A$  整個包含確定  $\beta$  的下組  $B$ , 且並不與  $B$  重合。因此在  $A$  內必有有理數  $r$ , 它不包含在  $B$  內, 於是必屬於  $B'$ ; 對於它

$$\alpha > r > \beta$$

(只有在  $\beta$  為有理數時始能成立等式)。但因為在  $A$  內無最大數, 故在必要時, 把  $r$  取得大一些就可以取消等式。

附注 我們事實上已證明了比實數域的稠密性還要強的性質: 即在實數  $\alpha$  與  $\beta$  (若  $\alpha > \beta$ ) 之間必定存在着有理數(不僅是實數)。以後我們將引用這個更強的稠密性。

由此直接推得

預備定理 2. 設給定兩個實數  $\alpha$  和  $\beta$ 。如果任取一個數  $\epsilon > 0$ , 數  $\alpha$  及  $\beta$  都能位於同一對有理數  $s$  與  $s'$  之間:

$$s' > \alpha > s, \quad s' > \beta > s,$$

這對數的差小於  $\epsilon$ :

$$s' - s < \epsilon,$$

則數  $\alpha$  與  $\beta$  必須相等。