21世纪应用型本科系列教材

高等数学（下册）

（应用理工类）

寿纪麟　于大光　张世梅

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪应用型本科系列教材

高等数学（下册）

（应用理工类）

寿纪麟　于大光　张世梅

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
·西　安·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:应用理工类. 下册/寿纪麟等编著. —西安:西安交通大学出版社,2010.2
ISBN 978-7-5605-3378-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①寿… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 006317 号

书　　名	高等数学　下册　(应用理工类)
编　　著	寿纪麟　于大光　张世梅
责任编辑	叶　涛　刘雅洁
出版发行	西安交通大学出版社
	(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址	http://www.xjtupress.com
电　　话	(029)82668357　82667874(发行中心)
	(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真	(029)82668280
印　　刷	西安新视点印务有限责任公司
开　　本	727mm×960mm　1/16　**印张**　15　**字数**　277 千字
版次印次	2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5605-3378-0/O·310
定　　价	23.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

目 录

第 7 章　多元函数微分法及其应用

一元函数微积分研究的对象是仅依赖于一个自变量的一元函数,然而在实际问题中常会遇到依赖于几个自变量的函数,这就提出了多元函数的微分与积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,研究多元函数的微分法及其应用,主要以二元函数为主.

在学习多元函数的导数和微分的概念时,要善于将它与一元函数微分学中的相应概念进行比较.既要注意它们的共同点和相互联系,更要注意它们的一些本质的差别,研究多元函数出现的新情况和新问题.只有理解并区别二者之间的"异中有同,同中有异",才能更深刻理解和融会贯通,而且还会提高学习效率.

7.1　多元函数的基本概念

讨论一元函数时,区间和邻域的概念起着重要的作用.因此在讨论多元函数时,我们首先把区间和邻域概念加以推广,同时还要涉及一些其它概念.

7.1.1　平面上的点集

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点,δ 是某一正数.与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 P_0 的 **δ 邻域**,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

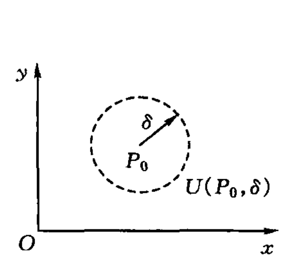

图 7-1

在几何上,$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆内的点 $P(x,y)$ 的全体(如图 7-1).

以后,若不需要强调邻域的半径 δ 时,可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的邻域.通常邻域半径 δ 都取很小的正数,所以

点 P_0 的 δ 邻域表示在平面上点 P_0 的邻近点的集合. 若去掉邻域的中心 P_0，所得到的邻域称为点 P_0 的**去心 δ 邻域**. 记为

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\,\big|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

2. 开集

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**(如图 7-2(a)).

如果 E 中所有点都是内点，则称 E 为**开集**. 例如，点集 $E_1=\{(x,y)\,\big|\,1<x^2+y^2<4\}$ (如图 7-2(b))中每个点都是 E_1 的内点，因此 E_1 为开集. 又如，邻域

$$U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta\}$$

也是开集，故可称为**开邻域**.

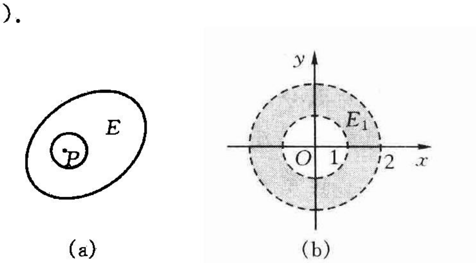

图 7-2

3. 区域

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点(点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E)，则称 P 为 E 的**边界点**(如图 7-3(a)). E 的边界点的全体称为 E 的**边界**. 在图 7-2(b)中，E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$.

设 D 是开集. 如果对于 D 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 D(图 7-3(b))，则称开集 D 是**连通的**. 连通的开集称为**区域**或**开区域**. 例如，$\{(x,y)\,\big|\,x+y>0\}$ 及 $\{(x,y)\,\big|\,1<x^2+y^2<4\}$ 都是开区域. 开区域连同它的边界一起，称为**闭区域**，例如，$\{(x,y)\,\big|\,x+y\geqslant 0\}$ 及 $\{(x,y)\,\big|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 都是闭区域(图 7-4).

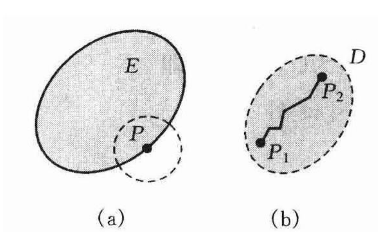

图 7-3

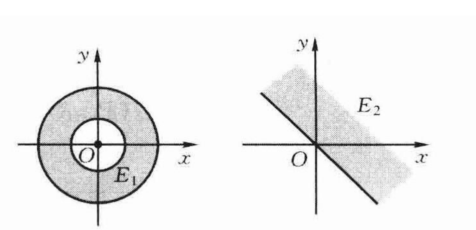

图 7-4

4. 有界集

对于平面上的点集 E，如果存在正数 K，使一切点 $P\in E$ 与某一定点 A 间的距离 $|AP|$ 不超过 K，即对一切 $P\in E$，$|AP|\leqslant K$ 都成立，则称 E 为**有界集**，否则就称

为**无界集**. 例如,$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$是有界闭区域,$\{(x,y)\mid x+y>0\}$是无界开区域.

7.1.2　多元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中,经常遇到多个变量之间的依赖关系,举例如下.

引例 7.1　考察底半径为 r、高为 h 的圆柱体. 它的体积 V 和底圆半径 r、高 h 之间具有关系 $V=\pi r^2 h$. 当 r、h 在集合$\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$内任取一对值(r,h)时,变量 V 的值就随之确定.

引例 7.2　由物理学知,一定量的理想气体的压强 P、体积 V 和绝对温度 T 之间具有如下关系

$$P=\frac{RT}{V}$$

其中 R 为常数. 这里,当 V、T 在集合$\{(V,T)\mid V>0,T>0\}$内任取一对值时,变量 P 的值就随之确定.

上面两个例子的具体意义虽各不相同,但它们却有共同的性质,抽象出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 7.1　设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x,y)\in D$,变量 z 按照一定法则总有确定的值与它对应,则称 z 是变量 x、y 的**二元函数**(或**点 P 的函数**),记为

$$z=f(x,y)\ (\text{或 } z=f(P))$$

点集 D 称为该函数的**定义域**,x、y 称为**自变量**,z 称为**因变量**. 数集

$$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的**值域**.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$以及三元以上的函数. 一般地,把定义 7.1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D,则可类似地定义 n 元函数:$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. n 元函数也可简记为 $u=f(P)$,其中,点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数就统称为**多元函数**.

与一元函数类似,我们也要讨论多元函数的定义域与图像.

关于多元函数的定义域,也要作如下约定:在讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$时,总是以使这个算式有确定值 u 的自变量所确定的点集为这个函数的定义域. 例如,函数 $z=\ln(x+y)$的定义域为$\{(x,y)\mid x+y>0\}$,它是一个无界开区域.

又如,函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,它是一个有界闭区域(图 7-5).

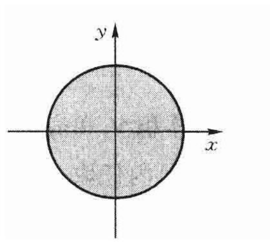

图 7-5

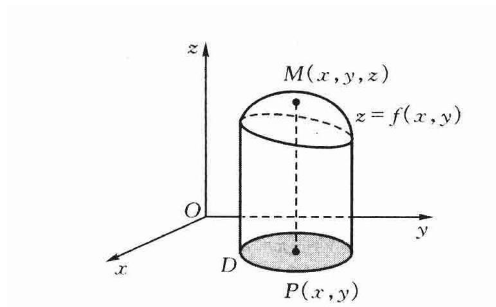

图 7-6

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样,以 x 为横坐标,y 为纵坐标,$z=f(x,y)$ 为竖坐标,就在空间直角坐标系中确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 上的一切点时,得到一个空间点集:

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称这个空间点集为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**图像**(图 7-6). 在几何上,一元函数的图像通常是平面上的一条曲线;而二元函数的图像通常是空间中的一个曲面. 在一些实际问题中,二元函数的图像对揭示函数的整体变化规律有很重要的作用. 对于较复杂的函数,可以借助于数学软件 Matlab 作出它们的图像(参见附录).

7.1.3 多元函数的极限

仿照一元函数极限的概念和有关性质来讨论多元函数的极限概念及其相应的性质. 这里只讨论二元函数的极限.

定义 7.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义,若 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 无限趋近于某一常数 A,即 $|f(x,y)-A|$ 无限趋近于零,则称 A 为 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的**极限**,或者说,当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ **收敛于 A**,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A \quad (P\to P_0)$$

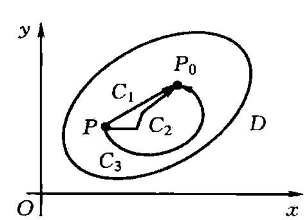

图 7-7

若不存在这样的常数 A,则当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不存在. 这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以

任何方式趋于点 P_0（如图 7－7），即点 P 与点 P_0 间的距离趋于零：

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0$$

注　多元函数的极限概念与一元函数的极限概念相同之处：如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近一个确定的常数 A，就说 A 是函数当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限. 与一元函数的极限概念不同之处在于：在一元函数的极限中，x 以任何方式趋于点 x_0 可以归纳为左、右极限，即 $x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$ 两种方式，而在二元函数中，P 以任何方式趋于点 P_0 的途径要复杂得多，难以一一枚举，此时用点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即 $|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$ 来刻画更清楚、更准确.

下面用“$\varepsilon-\delta$”语言描述这个极限概念.

***定义 7.2′**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，$P_0(x_0,y_0)\in D$，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于满足不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)\in D$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

或 $f(x,y)\to A\ (\rho\to 0)$，这里 $\rho=|PP_0|$.

为了区别于一元函数的极限，把二元函数的极限叫做**二重极限**.

***例 7.1**　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$(x^2+y^2\neq 0)$，求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

证　因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| = |(x^2+y^2)|\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant x^2+y^2$，

所以对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$$

成立，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

必须注意，所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于 A. 因此，如果 $P(x,y)$ 以某一种特殊方式，例如沿着一条直线或某特定的曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使函数值无限接近于某一确定的数，还不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同的值，那么就可以断定该函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

例 7.2　试证明当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ 的二重极限不存在.

证　若点(x,y)沿路径$y=x$趋向于原点$(0,0)$时(如图 7-8),有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot x}{x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0$$

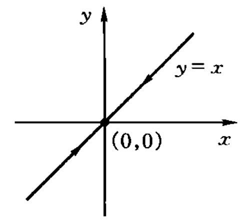

图 7-8

若点(x,y)沿路径$y=x^2-x$趋向于原点$(0,0)$时(如图 7-9),有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\frac{x(x^2-x)}{x+(x^2-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-1)}{x^2}=-1$$

以上两式表明,点(x,y)以两种特殊的路径趋近于原点$(0,0)$时,函数的极限值不相等.所以由二重极限的定义知,极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}$不存在.

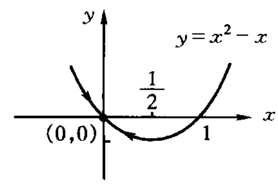

图 7-9

二重极限的定义在形式上与一元函数极限定义并无多大差别,因此,一元函数极限的有关性质(如四则运算,唯一性,局部保号性,夹逼准则等)都可以推广到二重极限中去,从而可利用它们来研究二重极限,举例如下.

例 7.3　求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}$.

解　注意到函数$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$在开区域$D_1=\{(x,y)\mid x<0\}$和开区域$D_2=\{(x,y)\mid x>0\}$内都有定义,而$P_0(0,2)$同时为$D_1$及$D_2$的边界点.但无论在$D_1$内还是在$D_2$内,当$x\to 0,y\to 2$,因而$xy\to 0$时,均有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\times 2=2$$

所以,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}$的极限为 2.

例 7.4　求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

解　已知当$\theta\geqslant 0$时,有不等式$\sin\theta\leqslant\theta$,所以对函数$\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$有下列的不等式

$$0\leqslant\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}=\frac{|x+y|\cdot|x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2}$$

$$\leqslant\frac{|x+y|\cdot(|x^2+y^2|+|xy|)}{x^2+y^2}\leqslant\left(1+\frac{1}{2}\right)|x+y|=\frac{3}{2}|x+y|$$

而当 $x\to0,y\to0$ 时，$\frac{3}{2}|x+y|\to0$. 由函数极限的夹逼准则，有 $\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\to0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$.

7.1.4　多元函数的连续性

讨论了多元函数的极限概念，就不难引进多元函数连续性的概念了.

定义 7.3　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，$P_0(x_0,y_0)\in D$，如果当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在，并且等于点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的函数值 $f(x_0,y_0)$，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ **在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续**. 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称函数 $f(x,y)$ 在 P_0 处**间断**，并称 P_0 为 $f(x,y)$ 的**间断点**.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 内的每一点都连续，那么就称函数 $f(x,y)$ **在 D 内连续**，或者称 $f(x,y)$ 是 D 内的**连续函数**.

以上关于二元函数的连续性概念，可相应地推广到 n 元函数上去.

例 7.5　设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

试证明原点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的间断点.

证　事实上，二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 是不存在的. 因为若取过原点 $(0,0)$ 的路径 $y=kx$（k 为任意实数）（如图 7-10 所示），则在这条特殊的路径上取得极限值为

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,kx)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

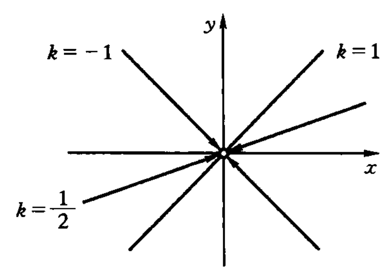

图 7-10

这个极限值与参数 k 的取值有关，随着 k 的取值不同，相应的极限值也不同，就是说函数 $f(x,y)$ 沿着不同路径的极限值是不一样的，因此二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，故点 $(0,0)$ 是该函数的间断点.

像一元连续函数的性质一样，二元连续函数的和、差、积、商（除去分母为零的

点)仍为二元连续函数.

在一元函数的讨论中,初等函数的概念起到重要的作用,在多元函数中也有类似的概念. 例如,二元初等函数是可用一个算式表示的二元函数,而这个式子是由二元多项式①及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的(应当指出,基本初等函数是一元函数,在构成二元初等函数时,它必须与至少一个二元函数作四则运算或复合运算). 例如,$\frac{x^2-y^2}{1+x^2}$是两个多项式之商,因为分子部分是二元函数,所以它是二元初等函数. 又如 $\sin(x+y)$是由基本初等函数 $\sin\mu$ 与二元多项式 $\mu=x+y$ 复合而成,故它也是二元初等函数.

一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的. 由多元初等函数的连续性,如果要求它在连续点 P_0 处的极限,则其极限值就是函数在该点的函数值,即

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$$

例如,函数 $z=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$ 上是由两个连续函数 $z=\sin u$ 和 $u=\frac{1}{x^2+y^2-1}$ 复合而成,因而该二元函数在 D 上处处连续. 又因为该二元函数在圆周 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上没有定义,所以该圆周上各点都是函数的间断点,称为二元函数的**间断线**.

例 7.6 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 先对二元函数 $\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 的分子有理化得

$$\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$$

于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$$

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质.

性质 1(最大值和最小值定理) 设多元连续函数 $z=f(P)$定义在有界闭区域 D 上,则函数 f 在 D 上能取得它的最大值和最小值.

性质 2(介值定理) 设多元连续函数 $z=f(P)$定义在有界闭区域 D 上,m 与

---

① 二元多项式是形如 $\sum\limits_{i,j}C_{ij}x^iy^j$ 的二元函数,其中 i,j 为非负整数,$\sum$ 中对 i,j 的有限项求和.

M 分别为 f 在 D 上最小值与最大值，如果常数 μ 为介于 m 与 M 之间的任一数，则必在 D 上存在一点 Q，使得 $f(Q)=\mu$.

习题 7－1

1. 求下列函数的定义域并画定义域的示意图：

(1) $z=\sqrt{x}+y$　　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

(3) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$　　(4) $z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$

2. 已知 $f(x+y,x-y)=xy+y^2$，求 $f(x,y)$.

3. 已知 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$.

4. 设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{e^x}{e^y\ln x^x}$，求 $f(x,y)$.

5. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}$ 是否存在？

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{x^2y}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$

7. 函数 $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

8. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性.

7.2　偏导数

在研究一元函数时，我们从研究函数的变化率引入了导数的概念. 在实际问题中，常常需要了解一个受多种因素制约的因变量，在其他因素固定不变的情况下，该因变量只随某一个特定因素变化的变化率问题，反映在数学上就是多元函数在其他自变量固定不变时，随某一个特定的自变量变化的变化率问题，这就引出了偏

导数的概念.

7.2.1 偏导数的定义与计算法

由于多元函数的自变量不止一个,因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多.本节仅以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例,研究二元函数对其中一个自变量的变化率问题.

设在二元函数 $z=f(x,y)$ 中,只让自变量 x 变化,而自变量 y 不变(即把 y 看作常量),这时函数 $z=f(x,y)$ 实际上就成了只以 x 为自变量的一元函数,这时函数 z 对 x 的导数,就是所谓二元函数 z 对于 x 的偏导数.

1. 偏导数的定义

定义 7.4 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0,而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,从而对应的函数值就有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$,并称它为**对 x 的偏增量**.如果该偏增量与自变量增量之比的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{7.1}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 x 的偏导数**,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad f_x(x_0,y_0)$$

因而极限式(7.1)可以表示为

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{7.2}$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 y 的偏导数**定义为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{7.3}$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\left.z_y\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数还是 x、y 的函数,它就称为函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 x 的偏导函数**,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x\quad 或\quad f_x(x,y)$$

类似地,可以定义函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 y 的偏导函数**,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z_y\quad 或\quad f_y(x,y)$$

由偏导函数概念可知,$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$,其实