



高职高专教育“十一五”规划教材

ECONOMIC
MATHEMATICS

经济 数学

王洪明 周秀君 主 编



科学出版社
www.sciencep.com

高职高专教育“十一五”规划教材

经济数学

王洪明 周秀君 主 编

安伯香 郑希锋 宋学林 副主编
刘金荣 王小琴

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是在认真总结、分析、吸收全国高职高专院校经济管理类专业经济数学教学改革经验的基础上编写的。本书从高职高专人才培养目标出发,结合经济管理类专业特点,设计了教学内容。在编写中注重理论联系实际,紧密结合专业,适当降低了难度,遵循循序渐进的教学原则,同时,每节精心配置了例题、案例与习题,每章配有综合训练,便于学生对有关知识的掌握与应用。

本书的主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分学及其应用、线性代数初步、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步、数学软件 Mathematica 等。本书加 * 部分是供教师根据专业及课时情况作为选学内容。

本书适用于高职高专院校及本科院校经济管理类专业经济数学的教学,也可以作为经济管理人员参考用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

经济数学/王洪明,周秀君主编. —北京:科学出版社,2010

(高职高专教育“十一五”规划教材)

ISBN 978-7-03-027605-6

I. ① 经… II. ① 王… ② 周… III. ① 经济数学—高等学校:技术学校—教材 IV. ① F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 089276 号

策划:姜天鹏 李洪旺

责任编辑:王纯刚 隽青龙 / 责任校对:耿 耘

责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方人华平面设计部

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年6月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2010年6月第一次印刷 印张:19 1/4

印数:1—5 000 字数:436 000

定价:33.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135517-2037

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

本书是在充分研究当前高职高专教育现状,认真分析、总结、吸收高职高专院校经济管理类专业经济数学教学教改经验,结合高职高专学生特点和市场需求的基础上编写的。本书从高职高专教育人才培养目标出发,充分考虑了高职高专经济管理类专业学生的知识需求和接受能力,以及不同专业或专业方向的要求,精心设计了内容。

本书在编写过程中力求做到条理清晰、通俗易懂,基本内容表述清楚,层次清晰,结构合理,重点突出,例题、习题、案例针对性强,特别注意培养学生用数学概念、方法、思想消化吸收经济概念、经济问题的能力,侧重培养学生将实际问题转化为数学模型的能力,突出了学生数学应用技能的训练与培养。本书取材合适,深度适宜,富有启发性,有利于激发学生的学习兴趣。

本书每节都配有一定数量的习题和案例,每章后面还配有综合训练。这些习题可以帮助学生加深对基本内容的理解,提高学生分析问题的能力,逐步培养学生自学的能力。

本书具有以下特色:

1. 每章均采用目标导学的方法,有利于学生对学习目标的把握;
2. 精选例题、案例和习题,注重结合专业特点,理论联系实际,突出学科之间的交叉性;
3. 特别注重教学概念与经济问题的联系,给出了许多问题的经济解析;
4. 减弱了理论推导与证明,不追求理论上的系统性;
5. 教材内容涵盖面广,为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间;
6. 本书介绍了数学软件 Mathematica 及应用,有利于培养学生利用计算机及相关数学软件求解数学模型的能力。

本书由王洪明、周秀君主编,安伯香、郑希锋、宋学林、刘金荣、王小琴副主编。其中第1章、第9章、第10章由周秀君编写;第2章由宋学林编写;第3章由王小琴编写;第4章由刘金荣编写;第5章由王洪明编写;第6章由安伯香编写;第7章、第8章由郑希锋编写。由王洪明负责全书的统稿工作。由宋立温教授担任本书的主审工作。

鉴于我们的研究能力和学术水平有限,加之时间仓促,书中难免有疏漏之处,恳切期望读者批评指正,以便进一步修改和完善。

编 者

2010年4月

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 函数的概念	1
1.1.1 函数的概念	1
1.1.2 函数的表示	2
1.1.3 反函数	3
1.1.4 函数的性质	3
习题 1.1	5
1.2 初等函数	5
1.2.1 基本初等函数	5
1.2.2 复合函数	7
1.2.3 初等函数	7
习题 1.2	8
1.3 利息、贴现及常用经济函数	8
1.3.1 单利、复利与贴现	8
1.3.2 需求函数与供给函数	9
1.3.3 成本、收入和利润函数	10
习题 1.3	12
本章小结	12
综合训练	14
第 2 章 极限与连续	17
2.1 极限	17
2.1.1 数列的极限	17
2.1.2 函数的极限	18
2.1.3 函数极限的性质	20
2.1.4 函数极限的四则运算法则	21
习题 2.1	21
2.2 两个重要极限与无穷小、无穷大	22
2.2.1 两个重要极限	22
2.2.2 无穷小量 (简称无穷小)	23
2.2.3 无穷大量 (简称无穷大)	24
2.2.4 无穷小与无穷大的关系	24
2.2.5 无穷小的比较	25
习题 2.2	26
2.3 函数的连续性	27
2.3.1 函数连续的定义	27
2.3.2 连续函数的运算	28

2.3.3 闭区间上连续函数的性质	29
2.3.4 函数的间断点	29
习题 2.3	30
本章小结	31
综合训练	33
第 3 章 导数与微分	36
3.1 导数的概念	36
3.1.1 两个引例	36
3.1.2 导数的定义	37
3.1.3 利用定义求导数	38
3.1.4 导数的几何意义	40
3.1.5 导数的经济应用	40
3.1.6 可导与连续的关系	41
习题 3.1	41
3.2 求导法则	41
3.2.1 函数的和、差、积、商求导法则	42
3.2.2 复合函数的求导法则	43
* 3.2.3 反函数的求导法则	44
3.2.4 基本初等函数的求导公式	45
* 3.2.5 几个常用的求导方法	46
3.2.6 高阶导数	48
习题 3.2	49
3.3 函数的微分及应用	50
3.3.1 微分的概念	50
3.3.2 微分的几何意义	51
3.3.3 微分基本公式与运算法则	51
3.3.4 微分在近似计算中的应用	53
习题 3.3	54
本章小结	54
综合训练	57
第 4 章 导数的应用	59
* 4.1 微分中值定理	59
4.1.1 罗尔定理	59
4.1.2 拉格朗日中值定理	60
4.1.3 柯西中值定理	62
习题 4.1	62
4.2 洛必达法则	62
4.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的极限	63
* 4.2.2 可化为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的“ $0 \cdot \infty$ ”与“ $\infty - \infty$ ”型的极限	65
* 4.2.3 “ 1^∞ 、 0^0 、 ∞^0 ”型的极限	66

习题 4.2	67
4.3 函数单调性的判别	68
习题 4.3	71
4.4 函数的极值与最值	71
4.4.1 函数的极值	71
4.4.2 函数的最值	74
习题 4.4	76
4.5 函数图形的凹向与拐点	76
4.5.1 曲线的凹向与拐点	76
* 4.5.2 曲线的渐近线	78
* 4.5.3 函数图形的描绘	78
习题 4.5	80
4.6 导数在经济分析中的应用	80
4.6.1 边际分析	80
4.6.2 弹性分析	82
习题 4.6	83
本章小结	84
综合训练	86
第 5 章 积分学及其应用	92
5.1 不定积分	93
5.1.1 原函数的概念	93
5.1.2 不定积分的概念	93
5.1.3 不定积分的几何意义	95
5.1.4 不定积分的性质	95
5.1.5 基本积分公式	96
5.1.6 直接积分法	96
习题 5.1	98
5.2 不定积分的积分法	99
5.2.1 第一换元积分法 (凑微分法)	99
5.2.2 第二换元积分法	103
5.2.3 积分表续	104
5.2.4 分部积分法	104
习题 5.2	106
5.3 定积分的概念与性质	106
5.3.1 引例	107
5.3.2 定积分的概念	108
5.3.3 定积分的性质	111
习题 5.3	113
5.4 微积分的基本定理及定积分的计算	113
* 5.4.1 积分上限的函数及其导数	113
5.4.2 牛顿-莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式	115

5.4.3	定积分换元积分	116
5.4.4	定积分的分部积分法	117
	习题 5.4	119
* 5.5	广义积分	119
5.5.1	无穷区间的广义积分	119
5.5.2	无界函数的广义积分	121
	习题 5.5	122
* 5.6	常微分方程	122
5.6.1	微分方程的基本概念	123
5.6.2	可分离变量的微分方程	125
5.6.3	一阶线性微分方程	128
	习题 5.6	132
* 5.7	定积分的应用	132
5.7.1	定积分的微元法	133
5.7.2	平面图形的面积	133
5.7.3	旋转体的体积	135
5.7.4	定积分在经济中的应用	136
	习题 5.7	137
	本章小结	137
	综合训练	140
第 6 章	线性代数初步	145
6.1	行列式的概念与运算	145
6.1.1	二、三阶行列式的定义	145
6.1.2	n 阶行列式的概念	147
6.1.3	行列式的性质	148
6.1.4	行列式的计算	149
	习题 6.1	151
6.2	克莱姆法则	152
6.2.1	克莱姆法则	152
6.2.2	齐次线性方程组	154
	习题 6.2	155
6.3	矩阵的概念与运算	155
6.3.1	矩阵的概念	155
6.3.2	矩阵的运算	157
	习题 6.3	161
6.4	矩阵的逆	162
6.4.1	可逆矩阵与逆矩阵的判别	162
6.4.2	用初等行变换求逆矩阵	163
	习题 6.4	164
6.5	矩阵的秩	165
6.5.1	矩阵秩的概念	165

6.5.2 满秩矩阵	166
习题 6.5	167
* 6.6 消元法	167
6.6.1 线性方程组	167
6.6.2 高斯消元法	168
习题 6.6	171
* 6.7 线性方程组解的判定	171
习题 6.7	174
* 6.8 线性方程组的通解	175
习题 6.8	178
6.9 简单的线性规划问题	179
6.9.1 线性规划问题的数学模型	179
6.9.2 线性规划问题的图解法	181
习题 6.9	183
本章小结	184
综合训练	186
第 7 章 随机事件与概率	189
7.1 随机事件	189
7.1.1 随机事件的概念	189
7.1.2 事件间的关系及运算	190
习题 7.1	191
7.2 随机事件的概率	192
7.2.1 概率的统计定义	192
7.2.2 古典概型	193
7.2.3 概率的加法公式	194
习题 7.2	195
7.3 条件概率和全概率公式	195
7.3.1 条件概率	195
7.3.2 乘法公式	196
7.3.3 全概率公式	197
习题 7.3	198
7.4 事件的独立性与伯努利概型	198
7.4.1 事件的独立性	198
7.4.2 伯努利概型	199
习题 7.4	200
本章小结	201
综合训练	202
第 8 章 随机变量及其数字特征	206
8.1 随机变量	206
8.1.1 随机变量的定义	207
8.1.2 随机变量的分类	207

习题 8.1	208
8.2 分布函数	209
8.2.1 分布函数的定义	209
8.2.2 分布函数的计算	209
习题 8.2	211
8.3 几种常见随机变量的分布	211
8.3.1 几种常见离散型随机变量的分布	211
8.3.2 几种常见连续型随机变量的分布	212
习题 8.3	215
8.4 随机变量的数字特征	215
8.4.1 数学期望	216
8.4.2 方差	217
8.4.3 常用分布的期望和方差	217
习题 8.4	218
本章小结	218
综合训练	219
第9章 数理统计初步	221
9.1 总体 样本 统计量	221
9.1.1 总体与样本	221
9.1.2 统计量	222
习题 9.1	223
9.2 常用统计量的分布	223
9.2.1 样本均值的分布	223
9.2.2 χ^2 分布	224
9.2.3 t 分布	224
9.2.4 F 分布	225
习题 9.2	225
9.3 参数的点估计	226
9.3.1 矩估计法	226
9.3.2 极大似然估计法	228
9.3.3 估计量的评价标准	230
习题 9.3	231
9.4 参数的区间估计	231
9.4.1 置信区间与置信水平	231
9.4.2 正态总体均值的区间估计	232
9.4.3 方差的区间估计	233
习题 9.4	234
9.5 参数的假设检验	235
9.5.1 假设检验的基本思想与步骤	235
9.5.2 U 检验法	236
9.5.3 t 检验法	237

9.5.4 X^2 检验法	238
习题 9.5	239
9.6 单因素方差分析	239
习题 9.6	243
9.7 一元线性回归分析	244
9.7.1 一元线性回归	244
9.7.2 最小二乘法	245
9.7.3 检测与预测	246
习题 9.7	248
本章小结	249
综合训练	251
第 10 章 数学软件 Mathematica 应用	254
10.1 Mathematica 系统的简单操作	254
10.1.1 Mathematica 安装与启动	254
10.1.2 Mathematica 退出	255
10.1.3 建立与保存文件	255
10.2 数、变量与数学函数	255
10.2.1 算术运算	255
10.2.2 函数及其运算	257
习题 10.2	260
10.3 Mathematica 在方程与图形中的应用	260
10.3.1 解方程	260
10.3.2 绘图	261
习题 10.3	264
10.4 Mathematica 在微积分中的应用	264
10.4.1 极限与连续	264
10.4.2 导数与微分	266
10.4.3 积分运算及简单应用	269
习题 10.4	271
10.5 Mathematica 在线性代数中的应用	271
10.5.1 Mathematica 中矩阵的相关计算	271
10.5.2 用 Mathematica 求解线性方程组	274
习题 10.5	276
10.6 Mathematica 在统计中的应用	276
10.6.1 数据的统计与分析	276
10.6.2 线性回归	277
习题 10.6	278
附录 1 课后习题答案	279
附录 2 标准正态分布函数数值表	294
主要参考文献	295

第1章 函 数



学习目标:

- 理解函数的概念, 熟练掌握函数定义域和值域的求法, 了解分段函数的特点.
- 掌握函数的基本性质和表示方法.
- 熟练掌握六类基本初等函数的概念、表达式、图形和性质. 了解复合函数、初等函数的概念和性质, 掌握复合函数的分解方法.
- 了解常用经济函数的概念及相关运算, 会建立简单的函数关系式.

函数是微积分学的主要研究对象, 它的实质是变量之间的对应关系. 本章将在中学数学知识的基础上, 进一步研究函数的概念与性质, 为学习微积分知识打下必要的基础.

1.1 函数的概念

1.1.1 函数的概念

引例1 自由落体运动 设物体下落的时间为 t , 下落距离为 s , 假定开始下落的时刻 $t = 0$, 那么 s 与 t 之间的依赖关系由

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给出, 其中 g 为重力加速度. 在这个关系中, 距离 s 随着时间 t 的变化而变化. 其特点是, 当下落的时间 t 取定一个值时, 对应的距离 s 的值也就确定了.

引例2 医师用药 医师给儿童用药和成年人不一样, 用药量可由儿童的体重来确定. 要计算 1~12 岁的儿童的体重可用经验公式 $y = 2x + 7$, 其中 x 代表年龄(岁), y 代表体重(公斤), 年龄确定了, 相应的体重也就确定了.

上述两个引例的变化过程中, 出现的变量不都是独立变化的, 而是按照一定的规律相互制约. 分析这种变量间的对应关系, 可抽象出“函数”的概念. 函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联, 到了 1837 年, 德国数学家狄利克雷(1805~1859)抽象出了直至今日仍为人们易于接受, 并且较为合理的函数概念.

函数的定义

定义1 设 x, y 是同一变化过程中的两个变量, 若当 x 取其变化范围内任一值时, 按照某种对应规则, 总能唯一确定变量 y 的一个值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

x 叫做自变量, y 叫做因变量. x 的取值范围叫做函数的定义域, 与 x 的值对应的 y 的值的集合叫做函数的值域.

当自变量 x 取数值 x_0 时, 因变量 y 按照对应法则 f 所对应的数值, 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $y = f(x_0)$.

为区别同一问题中的不同函数关系, 可采用不同的函数记号来表示这些函数. 如 $F(x)$ 、 $G(x)$ 、 $g(x)$ 等.

由函数定义可知, 当函数的定义域和函数的对应法则确定后, 这个函数就完全确定了. 因此, 把函数的定义域和对应法则叫做函数的两个要素. 两个函数只有它们的定义域和对应关系完全相同时, 这两个函数才是相同的. 而与变量符号无关. 如 $y = |x|$ 与 $z = \sqrt{v^2}$ 就是相同的函数.

例 1.1 设 $f(x) = 2x^2 - 3$, 求 $f(-1)$, $f(x_0)$.

解 $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 = -1$

$$f(x_0) = 2(x_0)^2 - 3 = 2x_0^2 - 3$$

例 1.2 求函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ 的定义域.

解 要使分式有意义, 必须分母 $x^2 + 2x - 3 \neq 0$, 即 $x \neq -3$ 且 $x \neq 1$, 所以这个函数的定义域是 $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$.

求函数定义域时应遵守以下原则:

- (1) 代数式中分母不能为零;
- (2) 偶次根式内表达式非负;
- (3) 基本初等函数要满足各自的定义要求;
- (4) 对于表示实际问题的解析式, 还应保证符合实际意义.

1.1.2 函数的表示

常用的函数表示方法有表格法、图像法、解析法.

(1) 将自变量的值与对应的函数值列成表格以表示函数的方法叫表格法, 如三角函数表、对数表及许多的财务报表等.

(2) 用图像来表示自变量值与函数值的关系的方法叫图像法, 它的特点是较直观.

(3) 用数学表达式表示自变量和因变量的对应关系的方法叫解析法, 如 $y = \sin x$, $y = 2x + 1$ 等, 它的特点是便于推理与演算.

以下几种是我们以后常遇到的函数.

分段函数

引例 3 乘坐火车时, 铁路部门规定: 随身携带物品不超过 20 千克免费, 超过 20 千克部分, 每千克收费 0.2 元, 超过 50 千克部分, 再加收 50%, 应如何计算携带物品所交的费用.

解 设物品的重量为 x , 应交费用为 y , 则有

$$y = \begin{cases} 0 & x \leq 20 \\ 0.2(x - 20) & 20 < x \leq 50 \\ 0.3(x - 50) + 6 & x > 50 \end{cases}$$

对于分段函数, 要注意以下几点:

- (1) 分段函数是由几个公式合起来表示一个函数，而不是几个函数。
- (2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集。
- (3) 在处理问题时，对属于某一段的自变量就应用该段的表达式。

1.1.3 反函数

定义 如果已知 y 是 x 的函数， $y = f(x)$ ，则由它所确定的以 y 为自变量， x 为因变量的函数 $x = \varphi(y)$ 就是 $y = f(x)$ 的反函数，而 $y = f(x)$ 称为直接函数。

但习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 写成 $y = \varphi(x)$ ，并用 $f^{-1}(x)$ 来表示 ($y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$)，即 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$ 。

函数 $y = f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域和定义域。

函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称。

单调函数存在反函数，且函数与其反函数单调性相同。

例 1.3 求函数 $y = x^2$ ， $x \in [0, +\infty)$ 的反函数。

解 因为函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，所以存在反函数。由 $y = x^2$ 解得 $x = \sqrt{y}$ ， $y \geq 0$ ，于是 $y = x^2$ 的反函数为 $y = \sqrt{x}$ ， $x \in [0, +\infty)$ 求反函数的步骤是从 $y = f(x)$ 中解出 x ，得到 $x = f^{-1}(y)$ ，再将 x 和 y 互换即可。

例 1.4 求 $y = 2x + 1$ 的反函数。

解 由 $y = 2x + 1$ 得 $x = \frac{y-1}{2}$ ，互换字母 x, y 得所求反函数为 $y = \frac{x-1}{2}$ 。

1.1.4 函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即 $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ ，

若 $f(-x) = f(x)$ ， $x \in D$ ，则称 $f(x)$ 为偶函数；

若 $f(-x) = -f(x)$ ， $x \in D$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数。

例如： $y = x^2$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，是偶函数，其图像如图 1-1 所示； $y = x^3$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，是奇函数，其图像如图 1-2 所示。

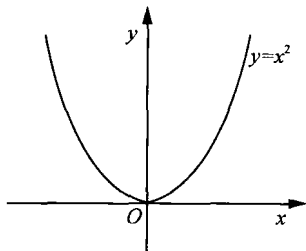


图 1-1

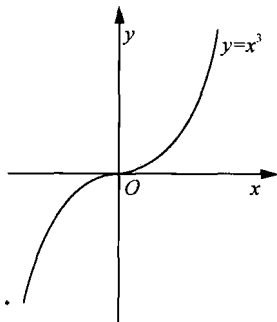


图 1-2

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称。

两个偶函数之和、差、积、商仍是偶函数，两个奇函数之和、差仍是奇函数，两个奇函数之积、商是偶函数，奇函数与偶函数之积、商是奇函数。

例 1.5 判断下列函数的奇偶性。

$$(1) f(x) = x^4 - x^2 + 8 \qquad (2) f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

解 (1) 因为 $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 8 = x^4 - x^2 + 8 = f(x)$ ，即 $f(-x) = f(x)$ 。

所以 $f(x) = x^4 - x^2 + 8$ 是偶函数。

$$(2) \text{ 因为 } f(-x) = \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

所以 $f(-x) + f(x) = \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$
 $= \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lg 1 = 0$ ，
 即 $f(-x) = -f(x)$ 。

所以 $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数。

2. 函数的周期性

定义 3 给定函数 $y = f(x)$, $x \in D$ ，若存在常数 T 使得 $x \in D \Rightarrow x + T \in D$ 且 $f(x + T) = f(x)$, $x \in D$ ，则称 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 称为周期。满足条件的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期，通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期。例 $\sin x$, $\cos x$ 是周期为 2π 的函数， $\tan x$, $\cot x$ 是周期为 π 的函数。以 T 为周期的函数图像沿 x 轴方向左右平移 T 的整数倍，图像将重合。

3. 函数的单调性

定义 4 若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(如图 1-3)，区间 I 称为单调递增区间；若 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少(如图 1-4)，区间 I 称为单调递减区间。

单调增加与单调减少分别称为递增与递减。单调递增区间或单调递减区间统称为单调区间。

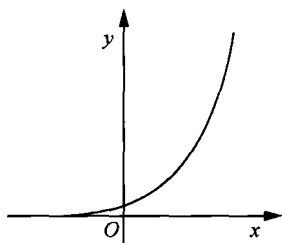


图 1-3

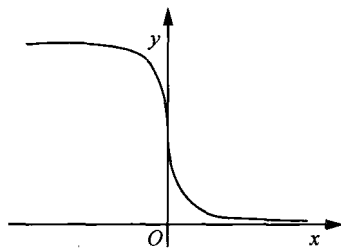


图 1-4

4. 函数的有界性

定义 5 若存在正数 M ，使得在区间 I 上 $|f(x)| \leq M$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上有界。否则称为无界。

例如函数 $y = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $|\cos x| \leq 1$ ，所以函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的。

习 题 1.1

1. 下列函数是否表示同一函数? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$

(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, $g(x) = \cos x$

(4) $f(x) = \ln x^3$, $g(x) = 3\ln x$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} -(x+1) & x < -1 \\ \sqrt{1+x^2} & -1 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$, 求 $f(-2)$, $f(0)$.

3. 求下列函数的反函数.

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = x(x+1)(x-1)$

(2) $f(x) = x \sin x$

(3) $y = 3^x$

(4) $y = e^x - e^{-x}$

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

常函数: $y = c$ (c 为常数).

幂函数: $y = x^a$ (a 为常数).

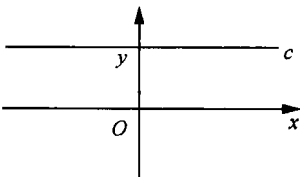
指数函数: $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, a 为常数).

对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, a 为常数).

三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

以上五类函数统称为基本初等函数, 为了大家便于复习, 现将它们的定义域、值域、图像和性质列表, 见表 1.1.

表 1.1

函 数	表 达 式	定义域与值域	图 像	特 性
常 函 数	$y = c$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \{c\}$		偶函数

续表

函 数	表 达 式	定义域与值域	图 像	特 性
幂函数	$y = x^a$	定义域与值域随 a 的不同而不同		若 $a > 0$, 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加 若 $a < 0$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y = a^x$ $a > 0$, $a \neq 1$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		$a > 1$, a^x 单调增加 $0 < a < 1$, a^x 单调减少
对数函数	$y = \log_a x$ $a > 0$, $a \neq 1$	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		$a > 1$, $\log_a x$ 单调增加 $0 < a < 1$, $\log_a x$ 单调减少
正弦函数	$y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期 2π , 有界
余弦函数	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期 2π , 有界