普通高等院校数学类规划教材

# 应用微积分

# CALCULUS

大连理工大学城市学院基础教学部　组编

上册

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等院校数学类规划教材

# 应用微积分

# CALCULUS

大连理工大学城市学院基础教学部　组编

主编　曹铁川

编者（以编写章节先后排序）

孙晓坤　高桂英　佟小华

刘怡娣　牛方平　宋尚文

上册

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

应用微积分. 上册 / 大连理工大学城市学院基础教学部组编. — 大连 ：大连理工大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-5611-5620-9

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 127265 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023
发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　印张：15.5　字数：359 千字
2010 年 7 月第 1 版　　2010 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑：王　伟　　责任校对：骁　杰
封面设计：熔点创意

ISBN 978-7-5611-5620-9　　定　价：29.80 元

# 前言

在高等教育中，微积分是理工、经管、农医等众多院校、众多专业的一门重要的基础课，其理论与方法有着广泛的应用领域。

微积分课程一般也称为高等数学。可能有人会问：大学阶段学习的高等数学与中学阶段学习的初等数学在研究对象与研究方法上有什么不同呢？我们知道，数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学。初等数学研究的基本上是常量，即在某一运动过程中保持不变的量；初等数学研究的图形多是形状确定的规则几何形体。在研究方法上，初等数学基本上是采用形式逻辑的方法，静止孤立地对具体的“形”与“数”逐个进行研究。高等数学研究的对象主要是变量；高等数学研究的图形多是不规则的几何形体，如抽象的曲线、曲面以及由它们构成的几何形体，而且将“形”与“数”紧密联系在一起，相互渗透。在研究方法上，高等数学不再是孤立地、逐个地讨论问题，而是从整体上普遍地解决问题。

例如，导数或微分与积分构成了微积分理论的两个重要方面，导数是从微观上研究函数在某一点处的变化状态，而积分则是从宏观上研究函数在某一区间或区域上的整体形态。在研究方法上，无论是导数还是积分都引入了“无限”的思想，通过极限的方法使问题得以解决。简而言之，函数是微积分的主要研究对象，极限是微积分的研究方法和基础。

微积分产生于17世纪，正值工业革命的盛世。航海造船业的兴起，机械制造业的发展，运河渠道的开掘，天文物理的研究诸多领域面临着许多亟待解决的应用难题，呼唤着新的数学理论和方法的出现。牛顿和莱布尼兹总结了数学先驱们的研究成果，集大成，创立了微积分，并直接将其应用于科研与技术领域，使科学技术呈现出突飞猛进的崭新面貌。可以说，微积分是继欧几里得几何以后全部数学中最伟大的创造。直至今日，作为数学科学的重要支柱，微积分仍保持着强大的生命力。

当今世界正从工业时代步入信息时代。科学技术的日新月异，大大扩展了数学的应用领域。相应地，对当代大学生数学素养的要求也在不断提高，期待着更多数学基础扎实，创新能力强，综合素质佳的人才涌现。

《应用微积分》是为普通高等院校所编写的数学教材。通过本课程的学习，可获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用，以及向量代数与空间解析几何、无穷级数与微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能。考虑到授课对象的特点，在编写过程中，我们力求突出以下几个方面：

(1)在教材内容的选择上，既注意到微积分理论的系统性，又在不失严谨的前提下，适

当删减或调整知识体系。例如，在极限部分，突出了函数极限的地位，而把数列极限作为函数极限的特例，避免了叙述上的重复，使主旨内容更为简明；在一元函数积分，学中，先讲定积分概念，而不定积分和积分法作为定积分的计算工具自然引出，这样就还原和强调了积分的思想。在多元函数积分学中，把重积分、第一型曲线、曲面积分统一为数量值函数在几何形体上的积分，与一元函数定积分前后呼应，既便于理解，又削减了篇幅。在微分方程的初等积分法中，突出了一阶线性微分方程，而把一阶齐次方程、伯努利方程、可降阶方程统一归为利用变量代换求解的微分方程，使这部分内容脉络更为清晰。

(2)考虑到应用型本科院校的实际，在引出概念、定理、公式方面，尽可能按照认识规律，从直观背景出发，深入浅出，提出问题，解决问题，水到渠成地得出结论。对某些概念还从不同角度加以阐述、类比，使学生接受起来形象易懂。例如，对于闭区间上连续函数的介值定理和罗尔中值定理，除讲明其几何意义外，还给出其物理解释；在引出初学者不易理解的泰勒公式时，不厌其详地阐述多项式逼近函数的思想，结合几何形象，分析如何获取最为理想的多项式，并以二阶泰勒公式为例，自然推广，引出泰勒定理。本教材十分重视基础的训练和基本能力的培养，和一些传统教材相比，每一章节围绕着相关定理和运算法则，配置的例题更为丰富，每一节后的习题数量也较为充足。考虑到有的学生有志于攻读更高层次的学位，在每一章后附有复习题，这些题目概念性强，综合性强，可满足这部分学生的学习需要。

(3)注重应用意识的培养，突出微积分的强大应用功能。当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者 P·D·拉克斯(Lax,Peter,D.)指出："目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃，而且成就辉煌，但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其他学科的相互关系。这种不平衡对于数学及其使用者都是有害的。纠正这种不平衡是一种教育工作，这必须从大学一开始做起，微积分是最适合从事这项工作的一门课程。""在微积分里，学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言，可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉。最后，很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案。"我们非常赞赏这些观点。为了激发学生的学习热情，开阔眼界，活跃思想，培养学习兴趣和应用意识，在选材上，我们非常注意联系应用实际，除经典的力学、物理学实例外，还增加了化学、生态、经济、管理、生命科学、军事、气象、医学、农业及日常生活中的实例。特别是在每一章的后面都设有"应用实例阅读"一节，提出了一些饶有趣味且具有真实背景的实际问题，用本章学到的微积分知识加以解决，相信这些内容的设置，会进一步激发学生的学习兴趣。

(4)本教材注重高等数学与初等数学内容的衔接，附有初等数学中的常见曲线、基本初等函数、极坐标与直角坐标的基本内容。对于重要数学名词还给出了中英文对照，为学生阅读英文材料提供方便。

本教材由大连理工大学城市学院基础教学部组织编写，曹铁川任主编并负责统稿。

参加上册编写的教师有孙晓坤、高桂英、佟小华、刘怡娣、肖厚国、宋尚文；参加下册编写的教师有王淑娟、麻艳、高旭彬、张宇红、杜娟、张鹤、牛方平。

本教材还配有《应用微积分同步辅导》教学参考书。

当前我国高等教育正从精英教育向大众教育转化，办学模式和培养目标也呈现出了多元化的特点。本教材的编写也是为适应新形势而做的探索和尝试。我们期待着读者和同行提出宝贵的意见和建议。

**编著者**

**于大连理工大学城市学院**

**2010 年 6 月**

# 目　录

# 第 1 章　函数、极限与连续

函数是微积分的研究对象；极限是微积分的基本运算，极限方法是研究函数的主要工具，它奠定了微积分学的基础；连续性是函数的重要性质，它是现实世界中广泛存在的渐变现象的数学描述. 连续函数在理论研究和实际应用中都占有重要地位. 本课程研究的函数主要是连续函数.

在本章中，我们先介绍函数的概念、函数的特性以及初等函数的概念.

极限是本章的重点，这部分主要介绍函数极限概念，而把数列极限作为函数极限的特例来处理. 极限部分内容包括：极限概念、极限的性质与运算、两个应用广泛的重要极限、无穷小与无穷大概念、无穷小的性质及其应用.

函数连续性的概念放在本章最后，内容包括：函数连续性概念、函数的间断点及其分类、连续函数的性质及初等函数的连续性. 最后从几何上介绍闭区间上连续函数的一些重要性质.

## 1.1　函　数

### 1.1.1　函数的概念

在科学实验、生产实践和日常生活中，经常会遇到各种各样的量，如质量、温度、压强、速度、时间、成本、利润等，它们的实际意义或性质可能千差万别，但从数量变与不变的角度来看，大致可以分为两类：一类量在过程中会发生变化，可以取不同的数值，这种量称为**变量**(variable)；另一类量在过程中相对不发生变化，保持同一数值，这种量称为**常量**(constant). 通常用 $x,y,z,t$ 等字母表示变量，用 $a,b,c,d$ 等字母表示常量.

在同一过程中，往往有若干个变量，它们的变化并不是孤立进行的，而是相互依赖，相互制约，并遵循一定的规律，下面要介绍的函数概念其本质就是变量之间的这种规律或关系.

**【例 1-1】**　在初速度为零的自由落体运动中，下落距离 $h$ 和时间 $t$ 是两个变量，它们之间满足关系

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g$ 是重力加速度. 若物体落地时刻为 $T$,则当 $t$ 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一值时,按上式确定的规律,$h$ 就有一个确定的值与之对应.

**【例 1-2】** 图 1-1 是某地气象台用自动温度记录仪描绘的一天之内气温变化曲线. 当时间 $t$ 在闭区间 $[0,24]$ 上任取一值时,通过曲线就可得到该时刻的气温 $T$.

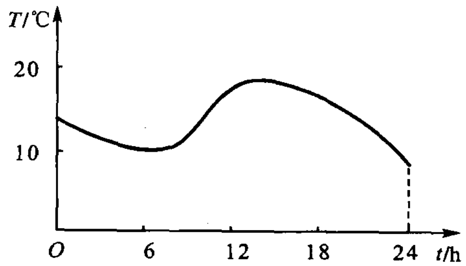


图 1-1

**【例 1-3】** 邮政局规定普通信函的质量($m$,单位:g)与邮资($c$,单位:元)间的关系如下表:

| 信函质量($m$/g) | 0 ~ 20 | 21 ~ 40 | 41 ~ 60 | 61 ~ 80 | 81 ~ 100 | 101 ~ 200 | 201 ~ 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 邮资($c$/元) | 0.80 | 1.60 | 2.40 | 3.20 | 4.00 | 5.20 | 6.40 |

当质量 $m$ 在区间 $[0,300]$ 上任取一个值时,由上表,邮资 $c$ 就有一个确定的值与之对应.

在上面三个例子中,都各有两个变量,它们之间的关系无论是用公式给出,还是用图形给出,或是用表格给出,都反映了两个变量之间一定的对应规律,即一个量的变化会引起另一个量的变化,当前者在其变化范围内任取一值时,后者依对应规律就有确定的值与之对应,我们称这两个变量之间存在着**函数**(function)关系.

**定义 1-1** 设有非空数集 $X$ 和实数集 $\mathbf{R}$,$f$ 是一个确定的法则(或关系),对于每个 $x \in X$,都有唯一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之相对应,并且把与 $x$ 对应的 $y$ 记作 $y = f(x)$,则称 $f$ 是定义在 $X$ 上的**一元函数**(one-variable function),简称为**函数**,称 $x$ 为**自变量**(independent variable),$y$ 为**因变量**(dependent variable).

这里,$f(x)$ 称为当自变量为 $x$ 时,这个函数的函数值;称 $x$ 的取值范围 $X$ 为函数 $f$ 的**定义域**(domain of definition),记作 $D(f)$,即 $D(f) = X$. 当 $x$ 取遍 $X$ 中一切值,函数值 $y = f(x)$ 的变化范围称为函数 $f$ 的**值域**(range of values),记作 $R(f)$.

需要说明的是,$f$ 表示由 $x(x \in X)$ 产生 $y[y \in R(f)]$ 的对应规则,而 $y$ 或 $f(x)$ 表示通过 $f$ 在 $R(f)$ 中与 $x$ 对应的数值,二者是有区别的. 但是用 $y = f(x)$ 表示一个函数时,$f$ 所代表的对应规则已完全确定,因而习惯上也把 $y$ 或 $f(x)$ 称为自变量 $x$ 的函数. 对应于 $x = x_0$ 的函数值记作 $f(x_0)$,或 $y|_{x=x_0}$. 当某一过程中涉及多个函数时,不同的函数要用不同的字母表示,如 $y = F(x)$,$y = g(x)$,$y = \varphi(x)$ 等,以示区别.

在函数定义中,最重要的是定义域和对应法则,给出一个函数时,必须同时说明这两个要素.

如果函数关系是由一个公式表示的，则约定函数的定义域是使公式有意义的一切实数组成的集合，这样的定义域称为函数的**自然定义域**. 例如，$y=\sqrt{x}$ 的定义域 $D(f)=[0,+\infty)$；$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$ 的定义域是 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

如果函数是由实际问题确定的，则其定义域要由问题本身的意义来确定. 例如，自由落体运动中，物体下落的距离 $h$ 是时间 $t$ 的函数：$h=\dfrac{1}{2}gt^2$. 如果开始下落的时刻为 $t=0$，落地时刻为 $t=T$，则这个函数的定义域为 $[0,T]$. 若不考虑该问题的背景，函数 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域则是 $(-\infty,+\infty)$.

本课程是在**实数**(real number) 范围内讨论，由于实数集 $\mathbf{R}$ 中的数和实数轴上的点是一一对应的，因此除特别声明外，数和点将不加区别. 例如，函数 $f(x)$ 在数 $x=x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$ 和在点 $x=x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$ 是同一含义.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $X$，对于任意取定的 $x\in X$，对应的函数值为 $y=f(x)$，从几何上看，在平面直角坐标系中，点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**(graph). 一个函数的图形通常是一条曲线，$y=f(x)$ 也叫做这条曲线的方程，函数图形简明直观，使人能一眼看出函数变化的全貌. 这样，函数的一些性态可借助图形来研究，而一些几何问题也常借助于函数来作理论探讨.

在数学发展的过程中，形成了最简单的五类函数，即**幂函数**(power function)、**指数函数**(exponential function)、**对数函数**(logarithmic function)、**三角函数**(trigonometric function) 和**反三角函数**(inverse trigonometric function)，描述现实世界千变万化关系的函数常常由这几类函数和常数构成. 因此，把它们称为**基本初等函数**(basic elementary function). 它们的定义、性质和图形在中学已学过，这里不再赘述. 下面再举几个函数例子，以加深理解.

**【例 1-4】**　常数函数 $y=2$. 它的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{2\}$，其图形如图 1-2 所示.

**【例 1-5】**　绝对值函数 $y=|x|$.

由绝对值定义可知

$$y=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases},$$

它的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=[0,+\infty)$，其图形如图 1-3 所示.

例 1-5 中出现的函数在自变量不同的取值范围内，用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**(piecewise-defined function)，这种函数在工程技术中经常出现. 注意，分段函数表示的是一个函数，而不是几个函数.

**【例 1-6】**　最大整数函数 $y=[x]$. 符号 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，例如，$[-3]=-3$，$[-1.5]=-2$，$[0.3]=0$，$[1.7]=1$. 这个函数的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{整数\}$，其图形呈逐步升高的阶梯形(图 1-4). 这类函数称为**阶梯函数**.

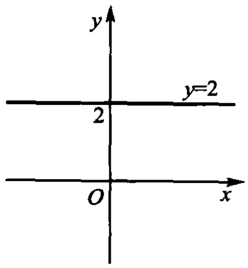


图 1-2

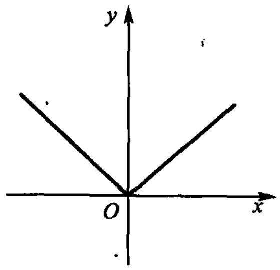


图 1-3

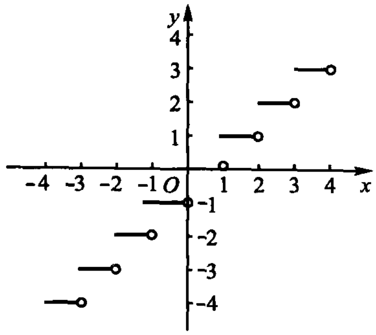


图 1-4

有许多实际问题可以用阶梯函数表示，如长途电话收费和通话时间的函数关系，出租车计价器显示的金额和行车里程的函数关系等.

**【例 1-7】** 根据 2008 年新修改的个人所得税法规定，个人月收入扣除各项社会保险费等免税项目，再扣除 2 000 元（起征额）的余额部分为纳税所得额. 纳税所得额不超过 500 元的部分，税率为 5%；超过 500 元到 2 000 元的部分，税率为 10%；超过 2 000 元到 5 000 元的部分，税率为 15%. 据此规定，可以写出月收入在 7 000 元（已扣除免税项目）以下者的月收入 $x$（元）与应交纳个人所得税 $y$（元）之间的函数关系：

$$y=\begin{cases} 0 & (x \leqslant 2\,000) \\ (x-2\,000)\cdot \dfrac{5}{100} & (2\,000 < x \leqslant 2\,500) \\ 25+(x-2\,500)\cdot \dfrac{10}{100} & (2\,500 < x \leqslant 4\,000) \\ 25+150+(x-4\,000)\cdot \dfrac{15}{100} & (4\,000 < x \leqslant 7\,000) \end{cases}.$$

## 1.1.2 函数的几种常见性态

### 1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 $X$ 上有定义，若存在某个确定的常数 $M>0$，使得对一切 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上**有界**(bounded). 反之，若对任意给定的正数 $M$（无论 $M$ 多么大），总存在 $x_1\in X$，使得 $|f(x_1)|>M$，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**(unbounded).

函数有界的定义也可以这样表述：如果存在常数 $l$ 和 $L$，使得对任一 $x\in X$，都有 $l<f(x)<L$，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上有界，并称 $l$ 和 $L$ 分别是 $f(x)$ 在 $X$ 上的一个**下界**和一个**上界**.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内只有下界，而无上界，因而无界. 但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上却是有界的，因为在 $[1,2]$ 上，显然 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

**2. 单调性**

设函数 $f(x)$ 在数集 $X$ 上有定义，若对 $X$ 上的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$[或 $f(x_1) > f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**单调增加**(monotone increasing)[或**单调减少**(monotone decreasing)]. 单调增加或单调减少的函数均称为**单调函数**(monotonic function).

单调增加函数的图形沿 $x$ 轴的正向呈上升状，单调减少函数的图形沿 $x$ 轴的正向呈下降状.

例如，正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，而在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内单调减少. 当 $a > 1$ 时，指数函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

**3. 奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 $X$ 关于原点对称(即若 $x \in X$，则必有 $-x \in X$)，若对任意的 $x \in X$，等式 $f(-x) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**(even function)；若对任意的 $x \in X$，等式 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function).

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 例如，$y = x^2$，$y = \cos x$ 是偶函数；$y = x^3$，$y = \sin x$ 是奇函数. 而 $y = x^2 + \sin x$ 既非偶函数，也非奇函数.

**4. 周期性**

设函数 $f(x)$ 的定义域是 $X$，若存在一个非零常数 $T$，使得对每个 $x \in X$，有 $x \pm T \in X$，且 $f(x \pm T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)，$T$ 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期. 如 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，$y = \tan x$，$y = \cot x$ 是周期为 $\pi$ 的周期函数.

### 1.1.3　复合函数与反函数

复合函数与反函数是经常遇到的函数形式.

**【例 1-8】**　某金属球的体积 $V$ 是其半径 $r$ 的函数：$V = \frac{4}{3}\pi r^3$. 由于热胀冷缩，球的半径又随着温度 $T$ 变化，设 $r$ 随 $T$ 的变化规律是 $r = r_0(1 + 0.017T)$，其中 $r_0$ 是常数. 将 $r = r_0(1 + 0.017T)$ 代入 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$，就得到体积 $V$ 与温度 $T$ 之间的函数关系

$$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3(1 + 0.017T)^3$$

像这样把一个函数代入另一个函数而得到的函数，称为由这两个函数构成的复合函数.

**定义 1-2**　设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$；函数 $u = g(x)$ 的定义域为 $D(g)$，值域为 $R(g) \subseteq D(f)$，则对任意的 $x \in D(g)$，通过 $u = g(x)$ 有唯一的 $u \in R(g) \subseteq D(f)$，再通过 $y = f(u)$ 又有唯一的 $y \in R(f)$. 这样，对任意的 $x \in D(g)$，通过 $u$ 有唯一的 $y \in R(f)$ 与之对应，因此 $y$ 是 $x$ 的函数，我们称这个函数为 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的**复合函数**(composite function)，记作

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad [x \in D(g)],$$

并称 $u$ 为**中间变量**，$u = g(x)$ 为**中间函数**.

例如,由 $y=\sqrt{u^2+1}$ 和 $u=10^x$ 复合得到函数 $y=\sqrt{10^{2x}+1}(x\in\mathbf{R})$. 又如 $y=\arcsin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\arcsin x$ 复合而成.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成,也可由更多的函数复合而成. 例如,函数 $y=\sqrt{1+\lg(2+\cos\sqrt{x})}$ 是由 4 个简单函数 $y=\sqrt{u}$,$u=1+\lg v$,$v=2+\cos w$,$w=\sqrt{x}$ 复合而成的.

应该注意的是,并非任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合,因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 对应的 $u$,都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义. $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 能否复合,关键在于是否满足定义中的 $R(g)\subseteq D(f)$.

**【例 1-9】** 函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 可以看做由 $y=\arcsin u$ 和 $u=\dfrac{x-1}{2}$ 复合而成.

由于 $y=\arcsin u$ 的定义域是[-1,1],所以要求

$$|u|=\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\quad 即 -1\leqslant x\leqslant 3.$$

由此可知 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域是[-1,3].

本例说明,经复合后的函数,其自然定义域未必是中间函数的自然定义域.

研究任何事物,往往要从正反两个方面来研究,函数 $y=f(x)$ 反映了当自变量 $x$ 变化时,因变量 $y$ 随之变化的规律,有时根据需要,则要反过来研究 $x$ 随着 $y$ 变化的规律,这就产生了反函数的概念.

例如,一物体从距地面高 $H$ 处自由落下,下落距离与时间 $t$ 的函数的关系是

$$h=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right].$$

如果研究物体下落不同距离所用的时间,则有

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}},\quad h\in[0,H].$$

这是一个以 $h$ 为自变量,$t$ 为因变量的函数. 像这样交换了自变量与因变量位置的函数 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$,称为 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的反函数.

**定义 1-3** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,值域为 $R(f)$,如果对每一个 $y\in R(f)$,都有唯一的 $x\in D(f)$,使 $y=f(x)$,则 $x$ 也是 $y$ 的函数,我们将这个函数记作 $x=f^{-1}(y)$,并把它称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**(inverse function),而 $y=f(x)$ 则称为反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的**直接函数**. 显然 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

在定义中,反函数的自变量用 $y$ 表示,因变量用 $x$ 表示,这与用 $x$ 表示自变量,用 $y$ 表示因变量的习惯不符. 因而,一般把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写作 $y=f^{-1}(x)$,字母的改变并没改变该函数的定义域和对应法则,当然可以说 $y=f(x)$ 的反函数就是 $y=f^{-1}(x)$. 例如,由 $y=10^x$ 得 $x=\lg y$,于是得到 $y=10^x$ 的反函数 $y=\lg x$.

**【例 1-10】** 设函数 $y=f(x)=3x+2$,从中解出 $x=\dfrac{1}{3}(y-2)$,则 $y=3x+2$ 的

反函数为 $y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}(x-2)(x \in \mathbf{R})$. 这两个函数的图形如图 1-5 所示.

容易证明，在同一平面直角坐标系中，$y = f^{-1}(x)$ 和 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称. 图 1-6 描绘的是指数函数 $y = 10^x$ 和它的反函数，即对数函数 $y = \lg x$ 的图形.

但是，并不是所有的函数都存在反函数. 可以证明，如果 $y = f(x)$ 是单调增加(或单调减少)的函数，则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 就一定存在，并且也是单调增加(或单调减少)的函数.

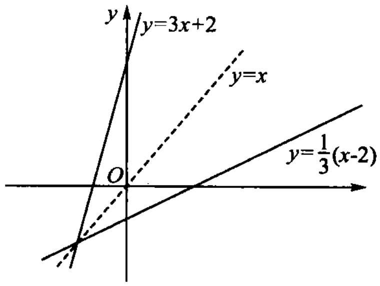


图 1-5

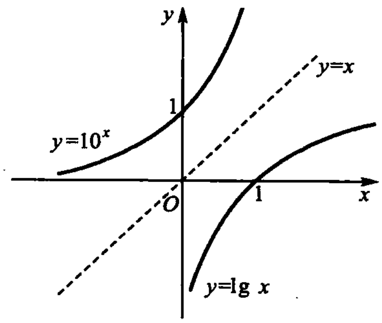


图 1-6

### 1.1.4　初等函数与非初等函数

在微积分学中，定量描述各种运动变化的函数，大都是由基本初等函数和常数经过四则运算、函数复合及分析运算构成的.

函数四则运算指的是：如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在数集 $X$ 上有定义，则通过代数四则运算 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可得到新的函数. 这里当函数相除时，需在 $X$ 中去掉分母函数 $g(x)$ 的零点，即 $x \in X$，且 $g(x) \neq 0$.

由常数和基本初等函数，即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并且可以用一个算式表示的函数，称为**初等函数**(elementary function).

例如，$y = \lg \sin^2 x$，$y = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{\tan x}}$，$y = 2^{\arctan \frac{x}{2}}$ 等，都是初等函数.

在微积分学中大量出现的是初等函数，但也会遇到一些非初等函数，常见的非初等函数有分段函数、隐函数、用参数方程确定的函数以及用极坐标方程确定的函数等.

**【例 1-11】**　$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$，这是电子技术中常用到的“单位阶跃函数”，是一个非初等函数.

**【例 1-12】**　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-7 所示.

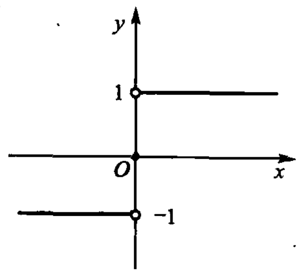

图 1-7

$\operatorname{sgn} x$ 是表征 $x$ 正负的特征函数，对任何 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x| = x\operatorname{sgn} x$ 或 $x = \operatorname{sgn} x\cdot|x|$. 常见的绝对值函数实际上都是分段函数，即 $|f(x)| = f(x)\operatorname{sgn} f(x)$. 因而在实际演算或推理时，若遇到绝对值函数，我们常将其分解为分段函数的形式.

**【例 1-13】** 考虑方程 $2^y = xy+2$，$x$ 在$(-\infty,0]$内每取一个实数值，$y$ 就有唯一一个确定的值与之对应. 由此，方程 $2^y = xy+2$ 就在$(-\infty,0]$内确定了一个 $y$ 关于 $x$ 的函数关系，虽然这个函数不能用初等函数表示，但是 $y$ 对于 $x$ 的依赖关系是客观存在的.

在函数关系中，如果因变量 $y$ 能用自变量 $x$ 的算式明显地表示出来，如 $y = x^2+\cos x$，$y=\lg(x-5)+2^{\frac{1}{x}}$ 等，这种函数称为**显函数**(explicit function). 有时因变量 $y$ 与自变量 $x$ 的对应关系是由一个方程 $F(x,y)=0$[$F(x,y)$ 为变量 $x$ 和 $y$ 的一个算式]确定时，即在一定条件下，当 $x$ 在某一区间内取定任何一值时，相应地总有满足方程的唯一 $y$ 值存在，这时称方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个 $y$ 关于 $x$ 的**隐函数**(implicit function).

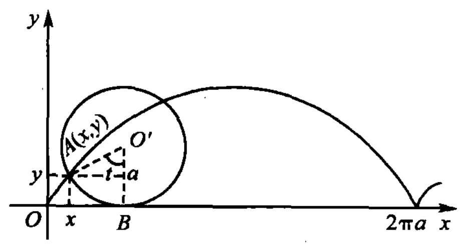

图 1-8

**【例 1-14】** 设点 $A$ 是半径为 $a$ 的动圆圆周上一定点，开始时，点 $A$ 位于原点 $O$ 处. 当动圆在 $x$ 轴上作无滑动地滚动时，点 $A$ 的运动轨迹称为**摆线**或**旋轮线**(图 1-8). 该曲线确定了 $x$ 与 $y$ 之间的某种函数关系，但我们不能用初等函数将其表示，也很难用一个方程 $F(x,y)=0$ 描述这个函数关系.

若设参变量 $t$ 为圆心角 $\angle AO'B$(图 1-8)，其中点 $B$ 是动圆与 $x$ 轴的切点，则点 $A$ 的横坐标

$$x = |OB| - a\sin t = |\overset{\frown}{AB}| - a\sin t = at - a\sin t,$$

点 $A$ 的纵坐标

$$y = |O'B| - a\cos t = a - a\cos t,$$

由此得到摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases},$$

则 $x$ 与 $y$ 之间的函数关系就体现在这个参数方程当中.

一般地，若用参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

来确定 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系，则称此函数是**由参数方程所确定的函数**.

以后掌握了积分和级数工具后，还会看到一些很有用的非初等函数.

## 习题 1-1

**1.** 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$；　　(2) $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$；

(3) $y=\arcsin\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$；　　(4) $y=\sqrt{\cos x-1}$.

**2.** 判断下列各组函数是否相同：

(1) $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　　(2) $f(x)=\lg x^2$ 和 $g(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 和 $g(x)=(\sqrt{x})^2$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 和 $g(x)=|x|$；

(5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$ 和 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$；　　(6) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 和 $g(x)=1$.

**3.** 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & \left(|x|<\dfrac{\pi}{3}\right)\\ 0 & \left(|x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\right)\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出 $\varphi(x)$ 的图形.

**4.** 正圆柱体内接于高为 $h$，底半径为 $r$ 的正圆锥体内，设圆柱体的高为 $x$，试将圆柱体的底半径 $y$ 与体积 $V$ 分别表示为 $x$ 的函数.

**5.** 有一长 1 m 的细杆，记作 $OAB$，$OA$ 段长 0.5 m，其线密度（单位长度细杆的质量）为 2 kg/m，$AB$ 段长 0.5 m，其线密度为 3 kg/m. 设 $M$ 是细杆上任一点，$OM$ 的长为 $x$，质量为 $m$，试将 $m$ 表示为 $x$ 的函数.

**6.** 由经验得知，潜水者在水中所受的压力 $p$ 与潜水的深度 $d$ 的关系为：$p=kd+1$（$k$ 为常数）；当 $d=0$ m 时，压力为 1 atm；当 $d=100$ m 时，压力大约为 10.94 atm，求潜水者在水平面下 50 m 时受到的压力.

**7.** 表示地震强度一般采用里氏强度（Richter scale），其公式为

$$R=\lg\left(\frac{a}{T}\right)+B,$$

其中，$R$ 为强度；$a$ 为在监测站中地表震动的振幅，以微米（$\mu$m）为单位；$T$ 的单位是秒(s)，代表震波的周期；$B$ 是一个实验常数，用以模拟震波随着离震中距离的增加而减弱的情况. 一般情况下，5 级地震即会造成损害，目前的世界纪录为 8.5 级. 设在一次强地震时，某地震中强度为里氏 7.8 级，此时监测站的记录器显示振幅为 $a=10\ \mu$m，周期为 $T=1$ s，若在余震中，测得的振幅为 $a=0.1\ \mu$m，周期为 $T=1$ s，问余震强度是多少？

**8.** 当一模型火箭发射时，推进器燃烧数秒，使火箭向上加速. 当燃烧结束后，火箭再向上升了一会，便向地面自由下落. 当火箭下降一段短时间后，火箭张开一个降落伞，降落伞使得火箭下降速度减慢，以免着陆时破裂. 图 1-9 为火箭飞行的速度数据，利用此图回答下列问题：

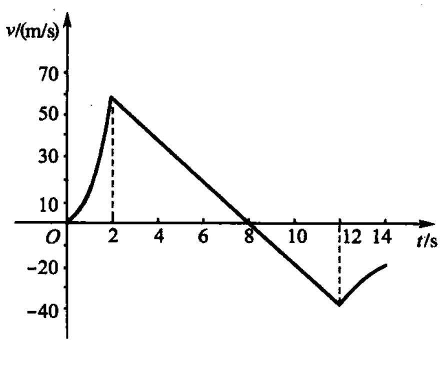


图 1-9

(1) 当推进器停止燃烧时，火箭上升的速度是多少？

(2) 推进器燃烧了多久？

(3) 火箭什么时候达到最高点？此时速度是多少？