高等学校教学用書

几何与三角

A. H. 别列别尔基娜
C. И. 諾伏謝洛夫 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

几何与三角

A. H. 别列别尔基娜 著
C. И. 諾伏謝洛夫
尹伯平 譯
丁寿田 校

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部國立教科書出版社（Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР）出版的別列別爾基娜（А. Н. Перепелкина）與諾伏謝洛夫（С. И. Новоселов）所著"幾何與三角"（Геометрия и тригонометрия）一書1947年版譯出的。原書經蘇聯俄羅斯社會主義共和國教育部審定作爲師範專科學校的教本。

几 何 与 三 角

А. Н. 别列别尔基娜，С. И. 諾伏謝洛夫著

尹伯平譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

上海印刷学校印刷　新华书店发行

統一书号 13010·64　开本 850×1168 1/32　印張 12 14/16

字数 323,000　印数 80,501—83,000　定价(4)￥1.40

1955年3月第1版　1959年11月上海第10次印刷

序

這是一本寫給師範專科學校數理系學生用的幾何與三角教科書。

本書幾何部分，對於七年制學校教學大綱中的教材講得最詳細。幾何其他部分就講得比較簡略了；我們的目的是要有系統地敍述幾何基本問題使學生能由此發展起空間的觀念而又希望不重複中學的課程。

不論平面部分或立體部分都準備有大量的作圖問題，並且指示了解法。對於解問題的方法有許多詳細解出的例題來說明。

在幾何學最後一章裏，我們對近代科學觀點下的幾何教程公理化結構給一個大略的概念。

三角部分，按照教學大綱，僅僅敍述了這學科的一些基本問題。既然學生在中學已學過三角，我們儘可能講得簡單，而同時給出基本概念的定義並且以一般形式推導出主要的公式使適用於任意的角。對於函數觀點我們認爲應加注意，因此把三角函數看作純數自變數的函數來研究並舉一些這樣的初等函數的圖象的例子，這些函數是用含有三角運算的公式給出的。

這本書的幾何部分是 A. H. 別列別爾基娜寫的，三角部分是 C. И. 諾伏謝洛夫寫的。

承 B. H. 傑普塔托夫教授和 C. B. 菲利捷夫教授仔細校閱原稿，並指出寶貴的意見。這些意見我們最後校訂原稿時已加注意。謹在此表示深切的感謝。

1946 年 10 月 21 日於莫斯科。

A. H. 別列別爾基娜

C. И. 諾伏謝洛夫

目　　錄

幾　何

第二篇　立體幾何

第三篇 幾何基礎論綱要

三 角

幾 何

緒 論

幾何學研究的是圖形的性質。

所謂圖形就是點、直線、平面的集合。

因此，圖形概念本身就用“集合”、“點”、“直線”、“平面”這些最簡單的概念來下定義。

上面所說的四個概念是最簡單的，是不必下定義的。“集合”的概念不是專屬於幾何學的，也屬於代數及數學分析。“點”、“直線”、“平面”等概念則專屬於幾何學。

原始的概念，也和所有其他概念一樣，都是從實際經驗中得來的。人們在自然界中觀察與這些概念相應的事物，把所得印象加以抽象，結果就得出這些概念來。

一塊一塊的石子、一粒一粒的沙子、鉛筆或鋼筆在紙面上點下的痕迹，這一切都使我們產生一種事物的印象，數學的點就是這種印象的抽象。

直鋪的鐵軌、電線、拉緊的繩子、牆簷、光線——這一切也使我們產生一種印象，直線就是這些印象的數學抽象。

桌面、地板、天花板、紙張等等經我們抽象而成平面的概念。

另一方面，兩個適當的互相緊貼的立體，其交界也使我們得出平面的概念，例如，蜂窩的各房之間的交界就給我們平面的印象，金屬或木

製的立方體放在貯有液體的容器裏，立方體的壁與液體接觸的交界也給我們平面的印象，諸如此類。

兩個平面的交界（或交線），例如，房角（即兩面牆的交界）、桌子的邊、書脊等等也使我們得到直線的概念。

兩線的交界，例如，立方體相鄰各稜的交界及屋簷的交界等等可使我們得到點的概念。

歐幾里得在他所著的"幾何原本"裏企圖對這些原始概念來下定義，例如，他以如下方式給點下定義："點是沒有部分的"。但是，這樣的定義顯然沒有給我們以任何精確的或本質上的認識，只不過對我們上面所說從經驗中抽象出來的點的性質加以描述罷了。

一些原始概念，包括"點"、"直線"、"平面"等，其基本性質將在許多不加證明的命題——所謂公理——中指出。

例如，下面就是一些這種關於直線與平面的公理：

1. 兩點屬於[1]一條直線，並且只屬於一條直線。

2. 不屬於一直線的三點屬於一個平面，並且只屬於一個平面。

3. 如果直線上的兩點屬於一個平面，則此直線上一切點都屬於這個平面。

4. 兩個平面如果有一公點，則必還有另一公點。

在公理中只指出一些原始概念最基本的性質而沒有證明，如果不指出這些性質我們一般就不可能利用這些概念了。這些概念的所有其餘的性質，以及一些用基本概念來下定義的比較複雜的概念的性質，都要根據公理加以證明。

凡正確性須加證明的命題稱爲定理。

定理包括兩部分——條件與結論。定理中已知部分稱爲定理的條件，而須證明的部分稱爲結論。

例如我們來看這個定理：

[1] 在近代公理學中往往用"屬於"一辭來替代"在…上"或"通過"。

如果兩條直線已有一公點，則它們不可能再另有公點。

定理的條件是肯定兩條直線有一公點。定理的結論是這兩條直線不可能有第二公點。

現在我們來證明這個定理。

假定這兩條直線有第二公點，於是按公理 1，這兩條直線就不可能是兩條不相同的直線，而是互相重合的一條直線了。

可見，這兩條直線不可能有第二公點。

我們再來看這個定理：

有一公點的兩個平面必相交於一直線。

這定理的條件是肯定兩平面有一公點；這定理的結論是這樣的兩個平面應該有一公直線。

我們來證明這個定理。

如果兩個平面有一公點 A，則按公理 4，它們還有一公點 B。

但按公理 1，兩點 A 與 B 屬於某一直線 a。

直線 a 與第一平面有兩公點 A 與 B；再按公理 3，直線 a 上所有的點都屬於第一平面。

同樣的證法也可應用於第二平面。所以這定理就證明了，因為直線 a 既屬於第一平面，又屬於第二平面，所以直線 a 就是兩平面的交線。

某些命題，我們當作定理來證明，但並沒有獨立的意義，只是證明後面的定理時所必需，這種命題稱為"引"。

直接從某一定理推證出來的命題稱為該定理的"系"。

如果嚴格地按邏輯（按公理學）來建立幾何學科，就得舉出在證明構成該學科具體內容的定理時所不可少的一切公理，但這不是編初等幾何學所要遵循的方針。現在的初等幾何教程，也如歐幾里得的"幾何原本"這一最早的初等幾何系統教程一樣，只舉出了為理解幾何事實所絕對不可少的幾條公理。就中許多原始概念如"在…之間"、"等於"、

"連續"都沒有在相當的公理中加以闡明，而默認爲這對所有的人都是顯而易見的並且是可以憑直覺來理解的。

初等幾何一方面未舉出嚴格按邏輯來建立該學科時所不可少的一切公理，同時却爲了敍述的具體化起見，又容許加進一些多餘的公理，這就是說，有些命題，如果嚴格按邏輯來建立該學科的話，本可以根據以前已包括進去的公理來證明的，却也當作公理了。

在幾何學教程裏圖形相等的概念是一個基本的概念。

圖形相等概念我們要用運動來下定義，這就有損用純幾何方式來講幾何學的這種嚴格精神了，因爲我們把其他學科中的因素引用到幾何學裏來了。但從敍述的具體性着眼，則爲了理解許多幾何事實，運動倒是一個重要的因素。

所以我們姑且採納下面這個運動公理。

公理 5. 任何圖形可在空間裏移動，而形狀大小不變。

公理 6. 疊置起來能重合的圖形稱爲相等的圖形。

本書以後將按照大多數初等幾何教本所採用的講法。這就是說，爲簡便計在有些個別場合我們直把可由所採公理推證出來的定理，當作公理。另一方面，我們也把一些按嚴密講法本須添加新公理的概念認爲是顯明的。在本書最後部分(第三卷)才對幾何學的完全嚴密的結構法講一個大概。聯繫着這種嚴密結構法產生了許多新的、比較複雜的問題。這類問題的解決已超出初等幾何範圍之外，而屬於幾何學的另一個專門部門，叫做"幾何基礎論"。

第一篇　平面幾何

第一章　基本概念

§1. 線段．射線

平面幾何研究落在一個平面上的圖形的性質。

這種落在一個平面上的圖形稱爲平面形。

最簡單的平面形是線段和射線。

如果在直線上取兩點 A 和 B，則直線被分成三部分——兩射線（從點 A 向左，從點 B 向右）和一線段 AB（圖 1）。

圖 1

由點 A, B 及直線上一切介乎 A 和 B 兩點之間的點所組成的集合稱爲線段 AB，而點 A 和 B 稱爲線段的兩端。在 A 和 B 之間的點稱爲線段 AB 的內點。

所謂"從點 A 出發的射線"是指這樣一個點集：它包含點 A 並且包含直線上一切這樣的點 X，使點 A 恆介乎 X 與 B 之間，這裏 B 是直線上一個不屬於該射線的點。換句話說，點 A 和直線上所有在點 A 某一側的點所組成的集合稱爲一射線，而點 A 稱爲該射線的原點（圖 2）。

由公理 5 及公理 6，如果給出了兩線段 AB 和 CD（圖 3），則線段 CD 可以移到直線 AB 上，使線段的一端，比方說 C，與線段 AB 的一端，比方說 B，疊合，於是線段 CD 的另一端 D 在直線 AB 上佔據了新的位置 M 或 M'。根據公理 6，線段 BM 與 BM' 都等於 CD。

圖 2

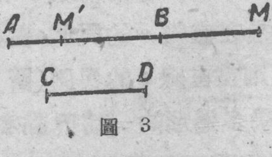

圖 3

在這情形下，當線段 AB 與 BM 沒有公內點時，則線段 AM 稱爲

線段 AB 與 CD 之和。當線段 AB 與 BM' 有公內點時，則線段 AM' 稱爲線段 AB 與 CD 之差。從兩線段之和的作圖法可以推出線段與整數的乘積的作圖法。

從公理 6 又可以推出兩線段相等的傳遞性，就是說，如果線段 AB 與 $A'B'$ 都等於第三線段 CD，則線段 AB 與線段 $A'B'$ 相等。

理由是，如果 AB 與 $A'B'$ 移在 CD 上能與它重合，則 AB 或 $A'B'$ 互相移置時也會彼此重合，所以也就彼此相等。

畫線段時用直尺，而移位時用圓規。

依次連結一系列的點 A, B, C, D, E，其中任何三個相鄰的點都不在一直線上，這樣一些線段所成的集合稱爲一條折線(圖 4)。

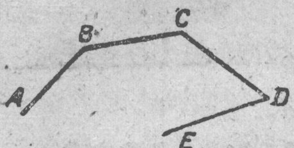

圖 4

起點與終點相疊合的折線稱爲多邊形(或多角形)。

構成折線的各線段稱爲多邊形的邊，線段的端點稱爲多邊形的頂點。如果通過多邊形的每一頂點只有兩條邊，任何頂點也不是任何邊的內點，任何兩邊也沒有公內點，則此多邊形稱爲簡單多邊形。

在圖 5 上有幾個非簡單多邊形的例子。

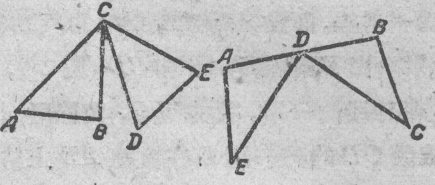

圖 5

定義　如果連結兩點 A 和 B 的線段 AB 與直線 a 沒有公點，則點 A 和 B 是在直線 a 的同側；在相反的情形，兩點 C 和 D 則在直線 a 的異側(圖 6)。

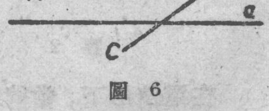

圖 6

如果多邊形的一切頂點都在每一邊的同側，則此多邊形稱爲凸多邊形(圖 7)。

在圖 8 上有非凸多邊形的例子。

例如,我們可以看出,頂點 B 與 F 是在直線 ED 的異側。

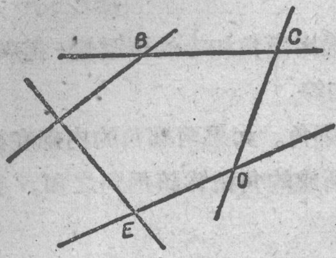

圖 7

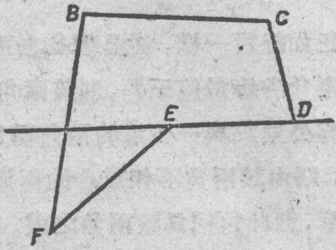

圖 8

§2. 角

從一點出發的兩條射線所構成的集合稱爲一個角。諸射線稱爲該角的邊,而兩邊的公點稱爲該角的頂點。

每個角用三個字母 A, B, C 來表示: 寫成 $\angle ABC$, 其中 B 是角的頂點, A 和 C 是在角每一邊上的點。有時在圖上從頂點 B 只作了一個角,則可用一個字母 B 來表示這個角, 即 $\angle B$。

如果在一角的每邊上各取一點 M 和一點 N, 用線段連結這兩點,則線段 MN 所在的這一部分平面稱爲該角的內部(圖 9)。

不在角的內部也不屬於兩邊的點形成這角的外部。

如果形成一角的兩射線屬於同一直線,則這種角稱爲平角。

有時我們把前面所規定的角的內部作爲外部。這時候我們把角看成大於平角(圖 10)。

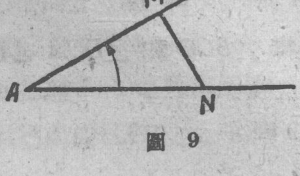

圖 9

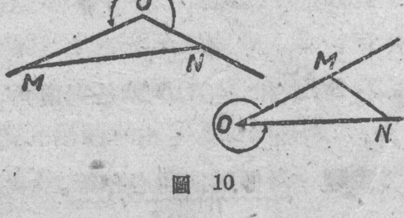

圖 10