

高等学校教学用书

几何与三角

A. H. 别列别尔基娜 著
C. H. 諾伏謝洛夫

高等教育出版社

高等学校教学用书



几 何 与 三 角

A. H.	别列别尔基娜	著
C. H.	諾伏謝洛夫	著
尹	伯	平
丁	寿	田
		譚校

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部國立教科書出版社 (Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР) 出版的別列別爾基娜 (А. Н. Перепелкина) 與諾伏謝洛夫 (С. И. Новоселов) 所著“幾何與三角”(Геометрия и тригонометрия) 一書 1947 年版譯出的。原書經蘇聯俄羅斯社會主義共和國教育部審定作為師範專科學校的教本。

几 何 与 三 角

А. Н. 別列別爾基娜, С. И. 諾伏謝洛夫著

尹伯平譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市書刊出版業營業許可證出字第054号)

上海印刷學校印刷 新华书店发行

統一書号 13710·61 开本 850×1168 1/32 印張 12 14/16
字數 323,000 印數 80,501—83,000 定价 (4) 元 1.40

1955 年 3 月第 1 版 1959 年 11 月上海第 10 次印刷

序

這是一本寫給師範專科學校數理系學生用的幾何與三角教科書。

本書幾何部分，對於七年制學校教學大綱中的教材講得最詳細。幾何其他部分就講得比較簡略了；我們的目的是要有系統地敘述幾何基本問題使學生能由此發展起空間的觀念而又希望不重複中學的課程。

不論平面部分或立體部分都準備有大量的作圖問題，並且指示了解法。對於解問題的方法有許多詳細解出的例題來說明。

在幾何學最後一章裏，我們對近代科學觀點下的幾何教程公理化結構給一個大略的概念。

三角部分，按照教學大綱，僅僅敘述了這學科的一些基本問題。既然學生在中學已學過三角，我們儘可能講得簡單，而同時給出基本概念的定义並且以一般形式推導出主要的公式使適用於任意的角。對於函數觀點我們認為應加注意，因此把三角函數看作純數自變數的函數來研究並舉一些這樣的初等函數的圖象的例子，這些函數是用含有三角運算的公式給出的。

這本書的幾何部分是 A. H. 別列別爾基娜寫的，三角部分是 C. И. 諾伏謝洛夫寫的。

承 B. И. 傑普塔托夫教授和 C. B. 菲利捷夫教授仔細校閱原稿，並指出寶貴的意見。這些意見我們最後校訂原稿時已加注意。謹在此表示深切的感謝。

1946 年 10 月 21 日於莫斯科。

A. H. 別列別爾基娜

C. И. 諾伏謝洛夫

目 錄

幾 何

序

緒論.....	1
---------	---

第一篇 平面幾何

第一章 基本概念.....	5
§ 1. 線段, 射線.....	5
§ 2. 角.....	7
§ 3. 三角形.....	9
§ 4. 三角形的相等, 三角形相等的第一與第二判別法.....	9
§ 5. 等腰三角形和等邊三角形, 三角形相等的第三判別法.....	12
§ 6. 三角形外角的性質, 三角形相等的第四判別法.....	14
§ 7. 直角三角形的相等.....	17
§ 8. 圓.....	18
§ 9. 最簡單的幾何作圖.....	21
§ 10. 定理的分類.....	24
§ 11. 關於三角形的邊和角的基本不等式.....	26
§ 12. 垂線和斜線.....	29
§ 13. 直線和圓的相互位置.....	31
第二章 作圖題, 軌跡法.....	34
§ 14. 作圖題的可能性.....	34
§ 15. 解作圖題的程序.....	35
§ 16. 點的軌跡.....	38
§ 17. 軌跡法.....	42
第三章 平行線.....	45
§ 18. 一直線截其他兩直線所形成的角, 平行性的判別法.....	45
§ 19. 平行公理和它的系.....	47
§ 20. 對應邊平行的角和對應邊垂直的角.....	49
§ 21. 三角形及凸多邊形諸內角之和.....	50

§ 22. 三角形的外接圓、內切圓及旁切圓	51
§ 23. 點的軌跡，作圖題	53
第四章 平行四邊形與梯形	57
§ 24. 平行四邊形	57
§ 25. 平行四邊形的對稱	60
§ 26. 平行移位	63
§ 27. 梯形	64
§ 28. 三角形的中點連線	66
§ 29. 梯形的中點連線	67
§ 30. 分線段為若干相等的部分	68
§ 31. 三角形中的共點線	69
第五章 圓	71
§ 32. 弦與中心角	71
§ 33. 圓周角，點的軌跡	72
§ 34. 直線與圓以及圓與圓的相切	77
§ 35. 圓內接四邊形與圓外切四邊形	81
§ 36. 歐拉圓	84
第六章 比例與相似	86
§ 37. 線段的測量，兩線段的公度	86
§ 38. 兩線段之比	88
§ 39. 成比例的線段	89
§ 40. 位似變換	96
§ 41. 圓的位似變換	102
§ 42. 伸縮儀	105
§ 43. 用位似變換法解作圖題	105
§ 44. 圖形的相似	107
§ 45. 三角形的相似	108
§ 46. 多邊形的相似	110
第七章 度量關係	112
§ 47. 直角三角形內的度量關係	112
§ 48. 斜三角形與平行四邊形內的度量關係	113
§ 49. 圓內成比例的線段	115
§ 50. 用代數方法解作圖題	116

§ 51. 二次方程式根的作圖	121
第八章 直線形的面積	125
§ 52. 直線形面積的概念	125
§ 53. 矩形的面積	125
§ 54. 平行四邊形、三角形與梯形的面積	128
§ 55. 畢達哥拉斯定理	138
第九章 正多邊形。圓周的長。圓的面積	134
§ 56. 正多邊形	134
§ 57. 用外接圓半徑表出正多邊形的邊	135
§ 58. 用所設正多邊形的邊與其外接圓半徑表出該圓內邊數加倍的內接正多邊形及邊數相同的外切正多邊形的邊	138
§ 59. 內接及外切凸多邊形周長的性質	140
§ 60. 圓周的長	142
§ 61. 圓周率 π 的計算。屆長法	144
§ 62. 圓面積的計算	147
第十章 圓的幾何學	149
§ 63. 點對於圓的幂、根軸與根心	149
§ 64. 圓束	154
§ 65. 圓簇	158
§ 66. 反演變換	160
§ 67. 阿波羅尼問題	164

第二篇 立體幾何

第十一章 直線與平面的相互位置	167
§ 68. 關聯公理	167
§ 69. 兩直線的相互位置	168
§ 70. 直線與平面的相互位置	172
§ 71. 兩平面的相互位置	178
§ 72. 空間中的作圖題	185
§ 73. 空間中點與直線的軌跡	193
第十二章 多面體	201
§ 74. 三面角與多面角	201

§ 75. 空間中的對稱性.....	205
§ 76. 平行六面體.....	207
§ 77. 平行六面體的面積與體積.....	210
§ 78. 角柱.....	214
§ 79. 角錐.....	219
§ 80. 截角錐.....	223
§ 81. 凸多面體.....	225
第十三章 圓體.....	232
§ 82. 柱.....	232
§ 83. 錐.....	233
§ 84. 截錐.....	234
§ 85. 圓柱、圓錐、截圓錐等旋轉體.....	236
§ 86. 球面.....	238

第三篇 幾何基礎論綱要

第十四章 幾何學發展小史.....	241
§ 87. 歐幾里得的“幾何原本”.....	241
§ 88. 歐幾里得的第五公設.....	244
§ 89. 尼·伊·羅巴契夫斯基的非歐幾何.....	252
第十五章 近代公理學.....	261
§ 90. 對公理所提出的要求.....	261
§ 91. 希爾伯特脫的公理體系.....	262
§ 92. 第一組公理，關聯公理.....	263
§ 93. 第二組公理，順序公理.....	265
§ 94. 第三組公理，疊合公理.....	267
§ 95. 第四組公理，平行公理.....	270
§ 96. 第五組公理，連續公理.....	270

三 角

第一章 三角函數.....	272
§ 1. 直線上和平面上的矢量.....	272
§ 2. 角與弧的測量.....	274

§ 3. 任意值的角	275
§ 4. 平面上點的坐標	277
§ 5. 任意角的三角函數	278
§ 6. 三角圓	283
§ 7. 三角函數的自變數	285
§ 8. 已知一個三角函數的值求作其相應角	287
§ 9. 三角函數間的關係	289
§ 10. 三角函數的週期性	295
§ 11. 三角函數的奇偶性	297
§ 12. 誘導公式	299
§ 13. 三角函數的討論及其圖象的作法	306
§ 14. $Y = A \sin(nx + a)$ 類型的函數	314
第二章 測角術	318
§ 15. 投影的基本定理	318
§ 16. 相加定理	321
§ 17. 倍角(弧)的三角函數	324
§ 18. 半角(弧)的三角函數	325
§ 19. 化三角函數的乘積為和差的公式	328
§ 20. 適於對數計算的形式公式	330
§ 21. 三角恆等式變換雜例	332
第三章 反三角函數	338
§ 22. 反函數的概念	338
§ 23. 反三角函數	339
§ 24. 弧函數的三角運算	344
§ 25. 弧函數之間的關係	348
§ 26. 初等函數	352
第四章 三角方程式	357
§ 27. 最簡單的三角方程式	357
§ 28. 有理化的代換	360
§ 29. 三角方程式解法雜例	365
§ 30. 解方程式的特殊情形	370
§ 31. 含有反三角函數的方程式	371

第五章 三角形解法.....	374
§ 32. 三角形的基本元素與各元素間的關係.....	374
§ 33. 各度的元素.....	375
§ 34. 解三角形問題的種種類型.....	380
§ 35. 用三角方法解幾何問題的例子.....	388
索引.....	393

幾何

緒論

幾何學研究的是圖形的性質。

所謂圖形就是點、直線、平面的集合。

因此，圖形概念本身就用“集合”、“點”、“直線”、“平面”這些最簡單的概念來下定義。

上面所說的四個概念是最簡單的，是不必下定義的。“集合”的概念不是專屬於幾何學的，也屬於代數及數學分析。“點”、“直線”、“平面”等概念則專屬於幾何學。

原始的概念，也和所有其他概念一樣，都是從實際經驗中得來的。人們在自然界中觀察與這些概念相應的事物，把所得印象加以抽象，結果就得出這些概念來。

一塊一塊的石子、一粒一粒的沙子、鉛筆或鋼筆在紙面上點下的痕迹，這一切都使我們產生一種事物的印象，數學的點就是這種印象的抽象。

直鋪的鐵軌、電線、拉緊的繩子、牆簷、光線——這一切也使我們產生一種印象，直線就是這些印象的數學抽象。

桌面、地板、天花板、紙張等等經我們抽象而成平面的概念。

另一方面，兩個適當的互相緊貼的立體，其交界也使我們得出平面的概念，例如，蜂窩的各房之間的交界就給我們平面的印象，金屬或木

製的立方體放在貯有液體的容器裏，立方體的壁與液體接觸的交界也給我們平面的印象，諸如此類。

兩個平面的交界（或交線），例如，房角（即兩面牆的交界）、桌子的邊、書脊等等也使我們得到直線的概念。

兩線的交界，例如，立方體相鄰各稜的交界及屋簷的交界等等可使我們得到點的概念。

歐幾里得在他所著的“幾何原本”裏企圖對這些原始概念來下定義，例如，他以如下方式給點下定義：“點是沒有部分的”。但是，這樣的定義顯然沒有給我們以任何精確的或本質上的認識，只不過對我們上面所說從經驗中抽象出來的點的性質加以描述罷了。

一些原始概念，包括“點”、“直線”、“平面”等，其基本性質將在許多不加證明的命題——所謂公理——中指出。

例如，下面就是一些這種關於直線與平面的公理：

1. 兩點屬於^①一條直線，並且只屬於一條直線。
2. 不屬於一直線的三點屬於一個平面，並且只屬於一個平面。
3. 如果直線上的兩點屬於一個平面，則此直線上一切點都屬於這個平面。
4. 兩個平面如果有一公點，則必還有另一公點。

在公理中只指出一些原始概念最基本的性質而沒有證明，如果不指出這些性質我們一般就不可能利用這些概念了。這些概念的所有其餘的性質，以及一些用基本概念來下定義的比較複雜的概念的性質，都要根據公理加以證明。

凡正確性須加證明的命題稱為定理。

定理包括兩部分——條件與結論。定理中已知部分稱為定理的條件，而須證明的部分稱為結論。

例如我們來看這個定理：

① 在近代公理學中往往用“屬於”一辭來替代“在…上”或“通過”。

如果兩條直線已有一公點，則它們不可能再另有公點。

定理的條件是肯定兩條直線有一公點。定理的結論是這兩條直線不可能有第二公點。

現在我們來證明這個定理。

假定這兩條直線有第二公點，於是按公理 1，這兩條直線就不可能是兩條不相同的直線，而是互相重合的一條直線了。

可見，這兩條直線不可能有第二公點。

我們再來看這個定理：

有一公點的兩個平面必相交於一直線。

這定理的條件是肯定兩平面有一公點；這定理的結論是這樣的兩個平面應該有一公直線。

我們來證明這個定理。

如果兩個平面有一公點 A ，則按公理 4，它們還有一公點 B 。

但按公理 1，兩點 A 與 B 屬於某一直線 a 。

直線 a 與第一平面有兩公點 A 與 B ；再按公理 3，直線 a 上所有的點都屬於第一平面。

同樣的證法也可應用於第二平面。所以這定理就證明了，因為直線 a 既屬於第一平面，又屬於第二平面，所以直線 a 就是兩平面的交線。

某些命題，我們當作定理來證明，但並沒有獨立的意義，只是證明後面的定理時所必需，這種命題稱為“引”。

直接從某一定理推證出來的命題稱為該定理的“系”。

如果嚴格地按邏輯（按公理學）來建立幾何學科，就得舉出在證明構成該學科具體內容的定理時所不可少的一切公理，但這不是編初等幾何學所要遵循的方針。現在的初等幾何教程，也如歐幾里得的“幾何原本”這一最早的初等幾何系統教程一樣，只舉出了為理解幾何事實所絕對不可少的幾條公理。就中許多原始概念如“在…之間”、“等於”、

“連續”都沒有在相當的公理中加以闡明，而默認為這對所有的人都是顯而易見的並且是可以憑直覺來理解的。

初等幾何一方面未舉出嚴格按邏輯來建立該學科時所不可少的一切公理，同時却爲了敘述的具體化起見，又容許加進一些多餘的公理，這就是說，有些命題，如果嚴格按邏輯來建立該學科的話，本可以根據以前已包括進去的公理來證明的，却也當作公理了。

在幾何學教程裏圖形相等的概念是一個基本的概念。

圖形相等概念我們要用運動來下定義，這就有損用純幾何方式來講幾何學的這種嚴格精神了，因為我們把其他學科中的因素引用到幾何學裏來了。但從敘述的具體性着眼，則爲了理解許多幾何事實，運動倒是一個重要的因素。

所以我們姑且採納下面這個運動公理。

公理 5. 任何圖形可在空間裏移動，而形狀大小不變。

公理 6. 疊置起來能重合的圖形稱爲相等的圖形。

本書以後將按照大多數初等幾何教本所採用的講法。這就是說，爲簡便計在有些個別場合我們直把可由所採公理推證出來的定理，當作公理。另一方面，我們也把一些按嚴密講法本須添加新公理的概念認爲是顯明的。在本書最後部分（第三卷）才對幾何學的完全嚴密的結構法講一個大概。聯繫着這種嚴密結構法產生了許多新的、比較複雜的問題。這類問題的解決已超出初等幾何範圍之外，而屬於幾何學的另一個專門部門，叫做“幾何基礎論”。

第一篇 平面幾何

第一章 基本概念

§ 1. 線段. 射線

平面幾何研究落在一個平面上的圖形的性質。

這種落在一個平面上的圖形稱為平面形。

最簡單的平面形是線段和射線。

如果在直線上取兩點 A 和 B ，則直線被分成三部分——兩射線（從點 A 向左，從點 B 向右）和一線段 AB （圖 1）。

由點 A, B 及直線上一切介乎 A 和 B 兩點之間的點所組成的集合稱為線段 AB ，而點 A 和 B 稱為線段的兩端。在 A 和 B 之間的點稱為線段 AB 的內點。

所謂“從點 A 出發的射線”是指這樣一個點集：它包含點 A 並且包含直線上一切這樣的點 X ，使點 A 恆介乎 X 與 B 之間，這裏 B 是直線上一個不屬於該射線的點。換句話說，點 A 和直線上所有在點 A 某一側的點所組成的集合稱為一射線，而點 A 稱為該射線的原點（圖 2）。

由公理 5 及公理 6，如果給出了兩線段 AB 和 CD （圖 3），則線段 CD 可以移到直線 AB 上，使線段的一端，比方說 C ，與線段 AB 的一端，比方說 B ，疊合，於是線段 CD 的另一端 D 在直線 AB 上佔據了新的位置 M 或 M' 。根據公理 6，線段 BM 與 BM' 都等於 CD 。



圖 2

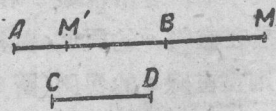


圖 3

在這情形下，當線段 AB 與 BM 沒有公內點時，則線段 AM 稱為

線段 AB 與 CD 之和。當線段 AB 與 BM' 有公內點時，則線段 AM' 稱為線段 AB 與 CD 之差。從兩線段之和的作圖法可以推出線段與整數的乘積的作圖法。

從公理 6 又可以推出兩線段相等的傳遞性，就是說，如果線段 AB 與 $A'B'$ 都等於第三線段 CD ，則線段 AB 與線段 $A'B'$ 相等。

理由是，如果 AB 與 $A'B'$ 移在 CD 上能與它重合，則 AB 或 $A'B'$ 互相移置時也會彼此重合，所以也就彼此相等。

畫線段時用直尺，而移位時用圓規。

依次連結一系列的點 A, B, C, D, E ，其中任何三個相鄰的點都不在一直線上，這樣一些線段所成的集合稱為一條折線（圖 4）。

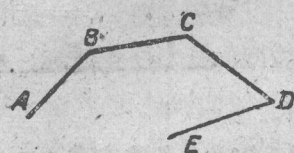


圖 4

起點與終點相疊合的折線稱為多邊形（或多角形）。

構成折線的各線段稱為多邊形的邊，線段的端點稱為多邊形的頂點。如果通過多邊形的每一頂點只有兩條邊，任何頂點也不是任何邊的內點，任何兩邊也沒有公內點，則此多邊形稱為簡單多邊形。

在圖 5 上有幾個非簡單多邊形的例子。

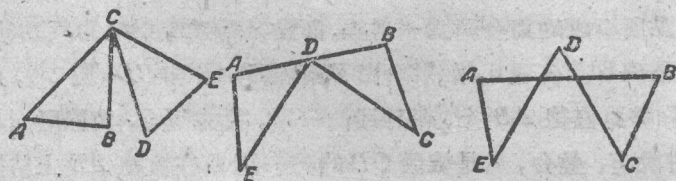


圖 5

定義 如果連結兩點 A 和 B 的線段 AB 與直線 a 沒有公點，則點 A 和 B 是在直線 a 的同側；在相反的情形，兩點 C 和 D 則在直線 a 的異側（圖 6）。

如果多邊形的一切頂點都在每一邊的同側，則此多邊形稱為凸多邊形（圖 7）。

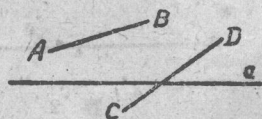


圖 6

在圖 8 上有非凸多邊形的例子。

例如，我們可以看出，頂點 B 與 F 是在直線 ED 的異側。

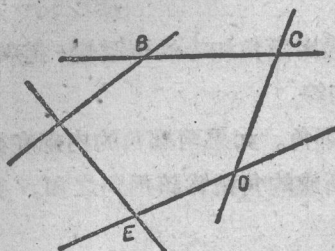


圖 7

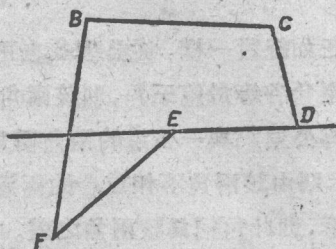


圖 8

§ 2. 角

從一點出發的兩條射線所構成的集合稱為一個角。諸射線稱為該角的邊，而兩邊的公點稱為該角的頂點。

每個角用三個字母 A, B, C 來表示：寫成 $\angle ABC$ ，其中 B 是角的頂點， A 和 C 是在角每一邊上的點。有時在圖上從頂點 B 只作了一個角，則可用一個字母 B 來表示這個角，即 $\angle B$ 。

如果在一角的每邊上各取一點 M 和一點 N ，用線段連結這兩點，則線段 MN 所在的這一部分平面稱為該角的內部（圖 9）。

不在角的內部也不屬於兩邊的點形成這角的外部。

如果形成一角的兩射線屬於同一直線，則這種角稱為平角。

有時我們把前面所規定的角的內部作為外部。這時候我們把角看成大於平角（圖 10）。

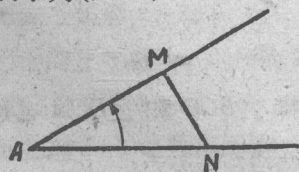


圖 9

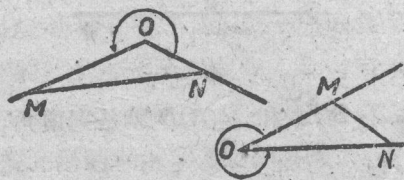


圖 10