

普通高等院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计 同步解析

GAILULUN YU SHULI TONGJI
TONGBU JIEXI

主编 康健



国防工业出版社

National Defense Industry Press

普通高等院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计同步解析

主 编 康 健

副主编 赵峥嵘 毕秀国 于加武

刘 超 张大海 刘 燕

王军昌

北京理工大学出版社

2010.8

ISBN 978-7-119-07007-1

概率论与数理统计同步解析 康健主编 北京理工大学出版社

031

中国标准书号

北京理工大学出版社

北京理工大学出版社

北京理工大学出版社

北京理工大学出版社

北京理工大学出版社

2010年8月 25.00元

国防工业出版社

北京理工大学出版社

·北京·

发行部电话: (010) 68414474

发行部电话: (010) 68438432

发行部电话: (010) 68438432

发行部电话: (010) 68414474

林慧敏等主编 内容简介

全书是普通高等教育“十一五”规划教材《概率论与数理统计》(康健等)的配套辅导用书。全书共分九章,每章均按内容提要、习题全解、典型例题、练习题和练习题答案五个部分。本书依据“概率论与数理统计”教学大纲的要求,注重基本概念、基本理论和基本方法的训练,内容循序渐进,深入浅出,结合工科实际,注重概率统计知识应用能力的培养。

本书是一本本科院校公共基础课辅导教材,可作为高等学校本科生的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步解析/康健主编. —北京:国防工业出版社,2010.8

ISBN 978-7-118-07007-1

I. ①概... II. ①康... III. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. ①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 147467 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11¼ 字数 280 千字

2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 22.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

“概率论与数理统计”作为现代数学的重要分支,在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都有广泛应用.特别是近30年来,随着计算机技术的普及和发展,概率统计在通信、交通、生物、医学等方面的应用得到了迅速的发展.正是概率统计的这种广泛应用,才使得它成为国内外高等院校各专业大学生最重要的数学课之一.“概率论与数理统计”课程是学生首次接触的以数学方法以研究随机现象的统计规律为主的一门数学分支,它具有自己独特的概念和逻辑思维方法,使得初学者常常对许多概念的实质难以理解,许多问题不知如何分析或解答.因此,觉得课程非常难学.为了配合课程教学,我们编写了这门课程的同步解析.试图通过典型例题的分析,帮助学生正确地理解概率统计的基本概念,掌握解题方法和技巧,并通过适当的练习题来巩固所学内容,培养学生分析问题和解决问题的能力.这是我们编写本辅导书的目的之一.

全书共分九章,每章均按内容提要、习题全解、典型例题、练习题和练习题答案五个部分.本书的基本概念和基本方法的介绍,力求从分析、比较入手,简明分析问题的思维方法及应用技巧.在例题的选择上,力求具有代表性,由浅入深,突出重点,一些题目给出了多种解题方法,注重分析问题和解决问题的能力的提高的训练.

本书由大连工业大学数学系组织编写,参加编写的有康健(第1,4章),赵峥嵘(第3章),毕秀国(第7章),于加武(第8章),刘超(第2章),张大海(第5,6章),刘燕(第9章),全书由康健统稿且最后定稿.

鉴于编者水平有限,疏漏与不当之处在所难免,恳切希望同行及学生给予批评指正.

18
28
38
48
58
68
78
88
98
108
118
128
138
148
158
168
178
188
198
208
218
228
238
248
258
268
278
288
298
308
318
328
338
348
358
368
378
388
398
408
418
428
438
448
458
468
478
488
498
508
518
528
538
548
558
568
578
588
598
608
618
628
638
648
658
668
678
688
698
708
718
728
738
748
758
768
778
788
798
808
818
828
838
848
858
868
878
888
898
908
918
928
938
948
958
968
978
988
998
1008
1018
1028
1038
1048
1058
1068
1078
1088
1098
1108
1118
1128
1138
1148
1158
1168
1178
1188
1198
1208
1218
1228
1238
1248
1258
1268
1278
1288
1298
1308
1318
1328
1338
1348
1358
1368
1378
1388
1398
1408
1418
1428
1438
1448
1458
1468
1478
1488
1498
1508
1518
1528
1538
1548
1558
1568
1578
1588
1598
1608
1618
1628
1638
1648
1658
1668
1678
1688
1698
1708
1718
1728
1738
1748
1758
1768
1778
1788
1798
1808
1818
1828
1838
1848
1858
1868
1878
1888
1898
1908
1918
1928
1938
1948
1958
1968
1978
1988
1998
2008
2018
2028
2038
2048
2058
2068
2078
2088
2098
2108
2118
2128
2138
2148
2158
2168
2178
2188
2198
2208
2218
2228
2238
2248
2258
2268
2278
2288
2298
2308
2318
2328
2338
2348
2358
2368
2378
2388
2398
2408
2418
2428
2438
2448
2458
2468
2478
2488
2498
2508
2518
2528
2538
2548
2558
2568
2578
2588
2598
2608
2618
2628
2638
2648
2658
2668
2678
2688
2698
2708
2718
2728
2738
2748
2758
2768
2778
2788
2798
2808
2818
2828
2838
2848
2858
2868
2878
2888
2898
2908
2918
2928
2938
2948
2958
2968
2978
2988
2998
3008
3018
3028
3038
3048
3058
3068
3078
3088
3098
3108
3118
3128
3138
3148
3158
3168
3178
3188
3198
3208
3218
3228
3238
3248
3258
3268
3278
3288
3298
3308
3318
3328
3338
3348
3358
3368
3378
3388
3398
3408
3418
3428
3438
3448
3458
3468
3478
3488
3498
3508
3518
3528
3538
3548
3558
3568
3578
3588
3598
3608
3618
3628
3638
3648
3658
3668
3678
3688
3698
3708
3718
3728
3738
3748
3758
3768
3778
3788
3798
3808
3818
3828
3838
3848
3858	

目 录

第一章 概率论的基本概念	1
一、内容提要	1
二、习题全解	4
三、典型例题	12
四、练习题	20
五、练习题答案	24
第二章 随机变量及其分布	27
一、内容提要	27
二、习题全解	30
三、典型例题	40
四、练习题	49
五、练习题答案	53
第三章 二维随机变量及其分布	56
一、内容提要	56
二、习题全解	58
三、典型例题	68
四、练习题	76
五、练习题答案	81
第四章 随机变量的数字特征	84
一、内容提要	84
二、习题全解	87
三、典型例题	97
四、练习题	103
五、练习题答案	106
第五章 大数定律和中心极限定理	107
一、内容提要	107

二、习题全解	107
三、典型例题	110
四、练习题	112
五、练习题答案	112
第六章 样本及抽样分布	114
一、内容提要	114
二、习题全解	116
三、典型例题	119
四、练习题	121
五、练习题答案	122
第七章 参数估计	123
一、内容提要	123
二、习题全解	126
三、典型例题	137
四、练习题	143
五、练习题参考答案	146
第八章 假设检验	147
一、内容提要	147
二、习题全解	148
三、典型例题	152
四、练习题	155
五、练习题答案	156
第九章 回归分析	158
一、内容提要	158
二、习题全解	161
三、典型例题	165
四、练习题	171
五、练习题答案	172

第一章 概率的基本概念

一、内容提要

(一) 事件及其概率

(1) 概率论与数理统计都是研究随机现象的统计规律性的一门数学分支学科。
(2) 随机试验:对客观事物进行一次观察或一次试验,统称为一个试验.如果这个试验满足条件:

- ① 试验可以在相同条件下重复进行;
- ② 每次试验的结果不止一个,且事先明确知道试验的所有可能结果;
- ③ 在一次试验之前不能确定哪一个结果一定出现,则称这个试验为随机试验,记为 E .

(3) 随机事件:在随机试验中,可能发生,也可能不发生的结果称为随机事件,简称事件.记为 A 或 B 或 C 等.

- ① 必然事件:在一次试验中必然发生的事件称为必然事件,记为 Ω .
- ② 不可能事件:在一次试验中一定不能发生的事件称为不可能事件,记为 \emptyset .

必然事件和不可能事件都是确定的,只是为了需要,我们把它归结为随机事件的两种特例.

- ③ 基本事件:随机试验的每一结果(不能再分的)称为基本事件.

(4) 事件与点集关系:将事件定义为样本点的某个集合,即基本事件(样本点)可视为集合中的一个点 ω ;随机试验 E 的所有基本结果的全体称为样本空间(集合),仍记为 Ω (必然事件);不包含任何点的集合称为空集(不可能事件),仍记为 \emptyset . 这样就能将集合论的知识全部用来解释事件及事件的运算.

(二) 事件间的关系及其运算

(1) 包含:如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称 B 包含 A ,或 A 包含于 B ,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

包含关系具有如下性质.

- ① $A \subset A$;
- ② 若 $A \subset B$,且 $B \subset C$ 则 $A \subset C$;
- ③ $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

(2) 事件 A 与 B 相等:若 $A \subset B$,且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

(3) 事件 A 与 B 的并(和):即两事件 A, B 至少有一个发生,称为事件 A 与 B 的并

(和),记为 $A \cup B$ 或 $A+B$.

(4) 事件 A 且 B 交(积):即 A 与 B 同时发生,称为 A 与 B 的交(积),记为 $A \cap B$ 或 AB .

(5) 事件 A 与 B 差:事件 A 发生,但 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差,记为 $A-B$ 或 $A\bar{B}$.

(6) 互斥(互不相容):若事件 A 与 B 满足 $AB=\emptyset$,则称 A 与 B 互斥.

(7) 对立事件:如果事件 A 与 B 满足条件 $A \cup B = \Omega, AB = \emptyset$,则称 A 与 B 互为对立事件,记为 $B = \bar{A}$ 或 $A = \bar{B}$,其中 B 称为 A 的逆事件.

对立事件具有性质 $\overline{\bar{A}} = A, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

(三) 事件的运算规律

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, AB = BA$.

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$.

(3) 分配律: $(A \cup B)C = AC \cup BC, (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.

(4) 摩根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (可推广到任意多个的情形).

除上述基本运算规律外,还有如下规律.

蕴涵律: $A \cup B \supset A, A \cup B \supset B, AB \subset A, AB \subset B$.

重叠律: $A \cup A = A, AA = A$.

吸收律: $A \cup \Omega = \Omega, A \cup \emptyset = A, A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.

对立律: $A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset$.

(四) 事件的 概率

1. 频率

若在 n 次试验中,事件 A 发生了 μ 次,则称

$$F_n(A) = \frac{\mu}{n}$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的频率.

2. 概率的定义

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间,如果对于任意事件 $A \subset \Omega$,都有一个实数 $p(A)$ 与之对应,并且满足如下条件.

(1) 非负性: $P(A) \geq 0$

(2) 规范性: $P(\Omega) = 1$

(3) 可列可加性:若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $p(A)$ 为事件 A 的概率.

3. 古典概型

若随机试验 E 具有两点, 即样本空间的基本事件个数为有限; 每个基本事件发生的可能性相同(等概), 则称此模型为古典概型.

在古典概型中, 若基本事件个数为 n , 而事件 A 包含了 m 个基本事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

4. 伯努利概型

在 n 重独立重复试验的前提下, 若每次试验有两种结果 A 及 \bar{A} 且 $P(A) = p, P(\bar{A}) = 1 - p$, 则称为 n 重伯努利(Bernoulli)试验, 也称伯努利概型.

若在一次试验中事件 A 发生的概率为 $P(A) = p (0 < p < 1)$, 则在 n 重伯努利试验中事件恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n; q = 1 - p$$

(五) 概率的基本性质

性质 1.1 $P(\emptyset) = 0$.

性质 1.2(有限可加性) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 满足 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

性质 1.3(逆事件的概率) 对任何事件 A , 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

性质 1.4(减法公式) 对任意事件 A 与 B , 有

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

性质 1.5(加法公式) 对任意事件 A 与 B , 有

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB)$$

(六) 条件概率及乘法公式

1. 条件概率

设 A, B 为两个事件, 当 $P(B) > 0$ 时, 称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生条件下 A 发生的条件概率.

很明显, 在 $P(A) > 0$ 或 $P(B) > 0$ 时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

2. 全概率公式

设事件 A_1, A_2, \dots, A_n 为样本空间 Ω 中的完备事件组(划分), 且 $P(A_i) > 0, i = 1,$

$2, \dots, n$, 对任意事件 B , 称

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

为全概率公式.

3. 贝叶斯公式

设事件 A_1, A_2, \dots, A_n 为样本空间 Ω 中的完备事件组(划分), 且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$, 对任意事件 B

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

4. 事件的独立性

对事件 A 与 B , 若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 与 B 相互独立.

由独立性可得:

(1) 若 A 与 B 独立, $P(A) > 0$, 有 $P(B|A) = P(B)$;

(2) 若 A, B 独立, 则 $A, \bar{B}; \bar{A}, B; \bar{A}, \bar{B}$ 也独立.

对三个事件 A, B, C , 如果满足 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, 且 $P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C)$, 则称 A, B, C 相互独立.

注意: 若 A, B, C 相互独立, 一定两两独立; 但两两独立, 不能保证 A, B, C 相互独立.

5. 乘法公式

(1) 当 A, B 相互独立时, 有 $P(AB) = P(A)P(B)$;

(2) 当 A, B 不独立时, 有 $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$.

二、习题全解

1. 写出下列试验的样本空间.

(1) 将一硬币抛掷两次, 观察出现正面的次数;

(2) 抛两颗骰子, 观察出现的点数之和;

(3) 在单位圆内任取一点, 记录它的坐标;

(4) 观察某医院一天内前来就诊的人数.

解 (1) $\Omega_1: \{0, 1, 2\}$;

(2) $\Omega_2: \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;

(3) $\Omega_3: \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(4) $\Omega_4: \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2. 抛两颗骰子, 观察出现的点数. 令 $A = \{\text{两次抛出的点数相同}\}$, $B = \{\text{点数之和为 } 10\}$, $C = \{\text{最小点数为 } 4\}$. 试说明事件 $A \cup B, ABC, A - C, C - A, \bar{B}C$ 各表

示什么含义?

解 $A \cup B$ 表示{两次抛出的点数相同}或{两次抛出的点数为 4 和 6};

ABC 表示{两次抛出的点数均为 5};

$A - C$ 表示{两次抛出的点数均为 1};

$C - A$ 表示{点数为 5, 7, 9, 11};

$B\bar{C}$ 表示不可能事件.

3. 试用 Ω 中的三个事件 A, B, C 表示如下事件.

(1) A 发生, 而 B 与 C 都不发生;

(2) A, B, C 中至少发生一个;

(3) A 与 B 都发生, 而 C 不发生;

(4) B 发生, 而 A 与 C 不发生;

(5) A, B, C 都不发生;

(6) A, B, C 中不多于一个发生;

(7) A, B, C 中不多于两个发生.

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$; (2) $A \cup B \cup C$; (3) $AB\bar{C}$; (4) $B\bar{A}\bar{C}$;

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; (6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC$.

4. 设 $P(A)=a, P(B)=b, P(AB)=c$, 用 a, b, c 表示下面事件的概率: $P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}), P(\bar{A} \cup B), P(\bar{A}\bar{B})$.

解 $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB)$

$$= a + b - c$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{B}) + P(\bar{A}) - P(\bar{A}\bar{B})$$

$$= P(B) + P(A) - (P(B) - P(AB))$$

$$= a + b - (b - c) = a + c$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}B) + P(AB) = 1 - c$$

由于 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B})$

所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = (1-a) + (1-b) - (1-c) = 1-a-b+c$

5. 设 A, B 为随机事件, $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$, 求 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

解 由于 $P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0.3$

所以 $P(AB) = 0.7 - 0.3 = 0.4$

故 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$

6. 设 A, B 为随机事件, $P(A)=0.4, P(B)=0.25, P(A-B)=0.25$, 求 $P(AB)$; $P(A \cup B); P(\bar{A}\bar{B}); P(\bar{A} \cup B)$.

解 由于 $P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0.25$

得 $P(AB) = 0.4 - 0.25 = 0.15$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB) = 0.25 + 0.4 - 0.15 = 0.5$$

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.15 = 0.85$$

由于
所以

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB})$$

$$P(\overline{AB}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A \cup B})$$

$$= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB})$$

$$= (1 - 0.4) + (1 - 0.25) - 0.85 = 0.5$$

7. 设 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ 且 A, B 互斥, 求 $P(A \cup B)$, $P(\overline{A \cup B})$.

解 由 $AB = \emptyset$ 得 $P(AB) = 0$, 由加法公式, 得

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

$$P(\overline{A \cup B}) = P(B) + P(\overline{A}) - P(\overline{AB})$$

$$= P(B) + (1 - P(A)) - (P(B) - P(AB))$$

$$= 0.3 + (1 - 0.4) - 0.3 = 0.6$$

8. 某城市的电话号码由七位数字组成, 每位数可以是 0 到 9 这十个数字中的任意一个, 求电话号码最后四位数全不相同的概率.

解 设 $A = \{\text{电话号码最后四位数全不相同}\}$,

由古典概型样本点总数为 10^7 , 事件 A 包含的样本点个数为 $10^3 \cdot A_{10}^4$,

所以

$$P(A) = A_{10}^4 / 10^4$$

9. 今从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 十个数字中任取三个不同的数字. 设 $A = \{\text{三个数字中不含 0 和 5}\}$, $B = \{\text{三个数字中最大号码为 7}\}$, 求 $P(A)$, $P(B)$.

解 该题为古典概型, 其样本点总数为 C_{10}^3 , 事件 A 包含的样本点个数为, 事件 B 包含的样本点个数为 C_7^2 , 则

$$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3}$$

$$P(B) = \frac{C_7^2}{C_{10}^3}$$

10. 袋中有 3 个红球, 12 个白球, 依次随机地从袋中不放回地取 10 球, 每次取一个, 求(1)第一次取到红球的概率; (2)第五次取到红球的概率.

解 设 $A = \{\text{第一次取到红球}\}$, $B = \{\text{第五次取到红球}\}$, 则

$$P(A) = \frac{C_3^1 A_{14}^9}{A_{15}^{10}}$$

$$P(B) = \frac{C_3^1 A_{14}^9}{A_{15}^{10}}$$

11. 在一副扑克(52)中, 任取 3 张, 求取出的牌中至少有 2 张花色相同的概率.

解 设 $A = \{\text{取出的牌中至少有 2 张花色相同}\}$, 则

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4C_{13}^3}{C_{52}^3} = \frac{1282}{1285}$$

12. 在 1000 件产品中含有 10 件次品,今从中任意取 2 件,求其中至少有 1 件是次品的概率.

解 设 A = “其中至少有 1 件是次品”, 则

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{990}^2}{C_{1000}^2}$$

13. 掷两粒骰子, 求出现“点数之和为偶数或小于 5”的概率.

解 设 A = “点数之和为偶数”, B = “点数之和小于 5” 易得 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(AB) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, 则所求概率为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

14. 已知 $P(A) = 0.25$, $P(B|A) = 0.3$, $P(A|B) = 0.5$, 求 $P(A \cup B)$.

解 $P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.25 \times 0.3 = 0.075$

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{0.075}{0.5} = 0.15$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.25 + 0.15 - 0.075 = 0.325$$

15. 20 个零件中有 5 个次品, 每次从中任意取 1 个, 作不放回的抽取, 求第 3 次才取得合格品的概率.

解 设 $A_1 = \{\text{第 1 次取得合格品}\}$, $A_2 = \{\text{第 2 次取得合格品}\}$,

$A_3 = \{\text{第 3 次取得合格品}\}$, $B = \{\text{第 3 次才取得合格品}\}$; 则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \frac{5}{20} \times \frac{4}{19} \times \frac{15}{18} = \frac{5}{114} \end{aligned}$$

16. 证明: 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(B|A) > P(B)$.

证 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} > P(A)$

则 $P(AB) > P(A)P(B)$

故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} > \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$

即 $P(B|A) > P(B)$

17. 证明: 若 $P(A) = a$, $P(B) = b$, 则 $P(A|B) \geq \frac{a+b-1}{b}$.

证 由于 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq a + b - 1$

故 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq \frac{a+b-1}{b}$

18. 一个工人照管甲、乙、丙三台机床, 在 1h 内, 各机床不需工人照管的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7. 求 1h 内:

- (1) 只有丙机床需人照管的概率;
 (2) 三台机床,至少有一台需要照管的概率.

解 设 $A = \{\text{甲机床需工人照管}\}$, $B = \{\text{乙机床需工人照管}\}$,
 $C = \{\text{丙机床需工人照管}\}$. 则

- (1) 只有丙机床需人照管的概率为

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0.7 = 0.3$$

- (2) 三台机床,至少有一台需要照管的概率为

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.559$$

19. 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个白球,今有两人依次随机地从袋中各取 1 球,取后不放回,求第 2 个人取得黄球的概率.

解 设 $B = \{\text{第 2 个人取得黄球}\}$,

$A_1 = \{\text{第 1 个人取得黄球}\}$, $A_2 = \{\text{第 1 个人取得白球}\}$,

由全概率公式,第 2 个人取得黄球的概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^2 P(A_i)P(B|A_i) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{19}{49} + \frac{3}{5} \times \frac{30}{49} = 0.4 \end{aligned}$$

20. 袋中有 15 个球,其中有 9 个新球,6 个旧球,第一次比赛时从中任意取 1 个,比赛完后仍放回袋中,第二次比赛时再从袋中任意取 1 个,试求:

- (1) 第一次恰好抽到新球的概率;
 (2) 第二次恰好抽到新球的概率;
 (3) 已知第二次恰好抽到新球,求第一次也抽到新球的概率.

解 设 $A_1 = \{\text{第一次恰好抽到新球}\}$, $A_2 = \{\text{第一次恰好抽到旧球}\}$;
 $B = \{\text{第二次恰好抽到新球}\}$.

(1) $P(A_1) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

- (2) 由全概率公式,第二次恰好抽到新球的概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^2 P(A_i)P(B|A_i) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{8}{15} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{42}{75} \end{aligned}$$

- (3) 由贝叶斯公式,已知第二次恰好抽到新球,第一次也抽到新球的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{8}{15}}{\frac{42}{75}} = \frac{12}{21} \end{aligned}$$

21. 某厂甲、乙、丙三个车间生产同一种产品,其产量分别占全厂总产量的40%,38%,22%,经检验知各车间的次品率分别为0.04,0.05,0.03.现从该种产品中任意取一件进行检查,试求:

(1) 这件产品是次品的概率;

(2) 已知抽得的一件是次品,问来自甲、乙、丙各车间的概率各是多少?

解 设 $A_i = \{\text{产品是第 } i \text{ 个车间生产的}\}, (i = \text{甲、乙、丙})$;
 $B = \{\text{产品是次品}\}.$

(1) 由全概率公式,产品是次品的概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) \\ &= 0.4 \times 0.04 + 0.38 \times 0.05 + 0.22 \times 0.03 = 0.0316 \end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式,如果抽得的一件是次品,它是甲车间的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{0.4 \times 0.04}{0.0316} = 0.506 \end{aligned}$$

如果抽得的一件是次品,它是乙车间的概率为

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.38 \times 0.05}{0.0316} = 0.6$$

如果抽得的一件是次品,它是丙车间的概率为

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.22 \times 0.03}{0.0316} = 0.207$$

22. 发报台分别以概率0.6和0.4发出信号“·”和“—”,由于通信系统受到干扰,当发出信号“·”时,收报台未必收到信号“·”,而是分别以概率0.8和0.2收到信号“·”和“—”;又当发出信号“—”时,收报台以概率0.9和0.1收到信号“—”和“·”,求:

(1) 收报台收到信号“·”的概率;

(2) 当收报台收到信号“·”时,发报台是发出信号“·”的概率.

解 设 $A_1 = \{\text{发报台发出信号“·”}\}, A_2 = \{\text{发报台发出信号“—”}\};$
 $B = \{\text{收报台收到信号“·”}\}.$

(1) 由全概率公式,收报台收到信号“·”的概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^2 P(A_i)P(B|A_i) \\ &= 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1 = 0.52 \end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式,当收报台收到信号“·”时,发报台是发出信号“·”的概率为

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.6 \times 0.8}{0.52} = 0.925$$

23. 设第一个箱子中有 5 个白球、4 个红球、3 个黑球；设第二个箱子中有 3 个白球、4 个红球、5 个黑球；独立地分别在两个箱子中任取一球，试求：

- (1) 至少有一个白球的概率；
- (2) 有一个白球一个黑球的概率；
- (3) 已知至少有一个白球的，有一个白球一个黑球的概率。

解 设 $A = \{\text{至少有一个白球}\}$, $B = \{\text{有一个白球一个黑球}\}$ 。

(1) 至少有一个白球的概率为

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{9}{16}$$

(2) 有一个白球一个黑球的概率为

$$P(B) = \frac{5}{12} \times \frac{9}{12} + \frac{3}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{11}{24}$$

(3) 已知至少有一个白球的，有一个白球一个黑球的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{11}{24}}{\frac{9}{16}} = \frac{22}{27}$$

24. 设 A, B 为随机事件, $P(A) = 0.92, P(B) = 0.93, P(B|\bar{A}) = 0.85$, 求 $P(A|\bar{B}), P(A \cup B)$ 。

$$\text{解 } P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{0.93 - P(AB)}{0.08} = 0.85$$

则

$$P(AB) = 0.25$$

故

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} = \frac{0.92 - 0.25}{0.07} = 0.83$$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB) = 0.92 + 0.93 - 0.25 = 0.98$$

25. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.5, P(A \cup B) = 0.8$, 求 $P(\bar{A}\bar{B}), P(\bar{A} \cup \bar{B})$ 。

解 由于 A, B 相互独立, 有 $P(AB) = P(A)P(B)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(B) + P(A) - P(AB) \\ &= P(B) + P(A) - P(A)P(B) = 0.8 \end{aligned}$$

$$P(B) = \frac{0.8 - 0.5}{1 - 0.5} = 0.6$$

所以

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.5 - 0.5 \times 0.6 = 0.2$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - 0.5 \times 0.6 = 0.7$$

26. 设 $P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.7$, 在下列情况下, 求 $P(B)$ ：

(1) 若 A, B 互不相容；(2) 若 A, B 相互独立；(3) 若 $A \subset B$ 。

解 (1) 由 $AB = \emptyset$ 得 $P(AB) = 0$, 由加法公式可得

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) = 0.7$$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB) = 0.7 - P(AB) = 0.3$$

(2) 由于 A, B 相互独立, 有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB)$$

$$= P(B) + P(A) - P(A)P(B) = 0.7$$

$$P(B) = \frac{0.7 - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{0.7 - 0.4}{1 - 0.4} = 0.5$$

(3) 由于 $A \subset B$, 有

$$P(A \cup B) = P(B) = 0.7$$

27. 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, A, B, C 相互独立, 求

A, B, C 至少出现一个的概率.

解 A, B, C 至少出现一个的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \\ &= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

28. 若 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 试证明: 事件 A 与 B 相互独立.

证 由于 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ 有

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$$

$$\text{则 } (1 - P(A))P(AB) = P(A)(P(B) - P(AB))$$

$$\text{故 } P(AB) = P(A)P(B)$$

所以, 事件 A 与 B 相互独立.

29. 设事件 A 与 B 相互独立, 证明: \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立.

证 由于 A, B 相互独立, 有 $P(AB) = P(A)P(B)$

所以

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = (1 - P(B)) - (P(A) - P(A)P(B)) \\ &= (1 - P(B))(1 - P(A)) = P(\bar{A})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

故 \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立.

30. 证明若 $P(A) > 0$ 则 $P(B|A) \geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)}$.

证法一 利用 $P(B|A) + P(\bar{B}|A) = 1$

由于 $A\bar{B} \subset \bar{B}$, 故 $P(A\bar{B}) \leq P(\bar{B})$, 则

$$P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} \geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)}$$