Xianxing Daishu Xuexi Zhidao

线性代数学习指导

主　编　胡建华
副主编　程林凤 张祥芝 李苏北 陆凤玲
主　审　朱开永

☆学习指导
☆内容提要
☆疑难解答
☆典型例题
☆综合测试

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

线性代数学习指导

主　编　胡建华
副主编　程林凤　张祥芝
　　　　李苏北　陆凤玲
主　审　朱开永

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是学习《线性代数》的辅导书，理论体系和章节安排与同济大学应用数学系编写的《线性代数》（高等教育出版社，第四版）基本相同。全书共分七章：行列式、矩阵、初等变换、向量、线性方程组、特征值、二次型。每章包括：学习指导、内容提要、疑难解答、典型例题。最后为综合测试题。

本书是为工科本科生同步学习、复习应试和备考研究生而编写的，也可作为教师的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/胡建华主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2009.9

ISBN 978-7-5646-0488-2

Ⅰ.线… Ⅱ.胡… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 169857 号

书　　名 线性代数学习指导
主　　编 胡建华
责任编辑 杨传良
责任校对 何晓惠
出版发行 中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）
营销热线 (0516) 83885307　83884995
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
排　　版 中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销 新华书店
开　　本 787×960　1/16　**印张** 11.75　**字数** 224 千字
版次印次 2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 17.00 元

前　言

本书是学习《线性代数》的辅导书，是为工科本科生同步学习、复习应试和备考研究生而编写的，也可作为教师的教学参考用书。理论体系和章节安排与同济大学应用数学系编写的《线性代数》(高等教育出版社，第四版)基本相同。全书共分七章：行列式、矩阵、初等变换、向量、线性方程组、特征值、二次型。每章包括学习指导、内容提要、疑难解答、典型例题四部分内容。最后为综合测试题。

一、学习指导：概括本章内容，突出重要定理，强调学习重点，建议学习方法。这部分内容是每一章的“总纲”，建议读者在学习每章前先阅读“学习指导”，以求对本章知识有一个总体轮廓，然后按照“学习指导”的要求进行学习。

二、内容提要：简明扼要地对本章内容作了归纳总结，对教材内容作了进一步剖析、讲解，并作了适当的深化和扩充。

三、疑难解答：针对读者在学习中不易理解和掌握的一些概念、方法，选编了若干问题予以分析、解答，以帮助读者释疑解难并加深对教材的理解。

四、典型例题：每章列举了近30个典型例题并予以分析解答。例题紧扣本章内容，由浅入深。大部分例题后面有评注，归纳总结解题方法，开拓解题思路。

本书最后给出了160个综合测试题并附有答案，以检测读者的学习效果。

由于编者水平所限，本书难免存在缺点、错误，欢迎读者及同行批评指正。

编者

2009年9月

目　录

第一章 行 列 式

一、学习指导

本章内容包括：

(1) 行列式的定义；

(2) 行列式的性质；

(3) 行列式展开定理；

(4) 克莱姆法则；

(5) 行列式乘法定理；

(6) 行列式的计算方法。

行列式起源于求解线性方程组，它是一种速记的表达式，它的产生比矩阵的产生早了约 100 年。但是，现在求解线性方程组几乎不采用行列式的方法，而采用矩阵的方法。尽管如此，行列式仍是数学中非常有用的工具，行列式的价值主要体现在理论推导上。

行列式的定义常见的有两种等价的定义，即递归定义法和逆序数定义法。

本章学习的重点是行列式的计算和行列式的应用。行列式的计算技巧有很多，其中要重点掌握化三角形法和递推法，不要过分地追求行列式的计算技巧。

本章中用到了矩阵的有关知识，对于没学习过矩阵的读者可暂时跳过这些内容，待学过矩阵后再回来学习。

本章的重要定理：

(1) 行列式展开定理；

(2) 克莱姆法则；

(3) 行列式乘法定理。

二、内容提要

1. 行列式的定义

定义 1.1 记 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

任取 D 的 k 行(如 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行)和 k 列(如 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列)所构成的 k 阶行列式

$$D\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ j_1,j_2,\cdots,j_k \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

称为 D 的 k 阶子式。

特别地，称 $D\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix}$ 为 D 的 k 阶主子式。称 $D\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,k \\ 1,2,\cdots,k \end{pmatrix}$ 为 D 的 k 阶顺序主子式。

在 D 中划去 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列余下的元素构成的 $n-k$ 阶子式称为 k 阶子式(1.2)的余子式，记为 $D_C\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ j_1,j_2,\cdots,j_k \end{pmatrix}$。称

$$\hat{D}_C\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ j_1,j_2,\cdots,j_k \end{pmatrix}=(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}D_C\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ j_1,j_2,\cdots,j_k \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

为 k 阶子式(1.2)的代数余子式。

特别地，记 $M_{ij}=D_C\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$，称之为 (i,j) 元的余子式，记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称之为 (i,j) 元的代数余子式。

注 对于矩阵也有相应的子式、主子式等概念，其定义同上。

定义 1.2 设 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，如果 $i<j$ 而 $p_i>p_j$，则称该排列出现一个逆序，出现的逆序总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

例如：$\tau(1,2,3,4)=0,\tau(4,3,2,1)=6,\tau(3,4,2,1)=5$。

定义 1.3(行列式的递归定义) n 阶行列式(1.1)的值定义如下：

当 $n=1$ 时，则 $D=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，假设对 $n-1$ 阶的行列式已有定义，则

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1} \tag{1.4}$$

其中 M_{ij} 为 (i,j) 元的余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 (i,j) 元的代数余子式。

定义 1.4(行列式的逆序数定义) n 阶行列式(1.1)的值定义如下：

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{1.5}$$

其中 $i_1 i_2\cdots i_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n}$ 是对所有这样的排列求和，共有 $n!$ 项，$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$ 是排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数。

即 n 阶行列式的值等于取自不同行不同列的 n 个元素乘积项的代数和，每项的符号由列下标排列的逆序数决定，正负号各一半。

注 定义 1.3 与定义 1.4 等价。

定义 1.5 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式定义为

$$|\boldsymbol{A}|=\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵；否则，称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵。

2. 行列式的性质(见教材)

3. 主要定理

定理 1.1(代数基本定理) n 次复系数多项式在复数域内有且只有 n 个根(重根按重数计算)。

定理 1.2(行列式展开定理) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$ 为 $|\boldsymbol{A}|$ 的 (i,j) 元的代数余子式，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}| & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases},\qquad \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}| & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases} \tag{1.7}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n)$$

式(1.7)用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} \tag{1.8}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，即

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

注 行列式的展开定理可记忆为“行列式可以按任一行或任一列展开，错行或错列展开必为零”。

定理 1.3[克莱姆(Cramer)法则] $n\times n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.10}$$

用矩阵表示为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1.11}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵(即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$)，则方程组(1.10)有唯一解

$$x_i = \frac{D_i}{|\boldsymbol{A}|}(i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.12}$$

其中

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i = 1,2,\cdots,n)$$

解(1.12)的向量形式为

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{1.13}$$

定理 1.4 $n\times n$ 的齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \tag{1.14}$$

只有零解的充分必要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$(等价地，有非零解的充分必要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$)。

定理 1.5(行列式乘法定理) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则

$$|AB| = |A||B| \tag{1.15}$$

注 当 $m \neq n$ 时，$|A_{m\times n}B_{n\times m}|$ 有意义，但 $|A_{m\times n}|$ 和 $|B_{n\times m}|$ 都没意义。

定理 1.6 设 A 是 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A_m & O \\ C & B_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_m & D \\ O & B_n \end{vmatrix} = |A||B| \tag{1.16}$$

$$\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B| \tag{1.17}$$

注 其证明参见例 1.21。

定理 1.7(行列式降阶定理) 设分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中 A 和 D 都是方矩阵。如果 A 可逆，则

$$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| \tag{1.18}$$

如果 D 可逆，则

$$|M| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C| \tag{1.19}$$

推论 1 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，B 是 $n\times m$ 阶矩阵，$m \geqslant n$，则

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA| \tag{1.20}$$

注 这是关于矩阵特征值的一个常用结论，以后不妨称之为特征值的降阶定理。

推论 2 设 A 是 n 阶方阵，α, β 都是 n 维列向量，则

$$|A + \alpha\beta^{\mathrm{T}}| = |A| + \beta^{\mathrm{T}}A^{*}\alpha = |A|(1 + \beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha) \tag{1.21}$$

(上面最后一项假设 A 可逆)

推论 3 设 α, β 都是 n 维列向量，则

$$|E + \alpha\beta^{\mathrm{T}}| = 1 + \beta^{\mathrm{T}}\alpha \tag{1.22}$$

注 该定理及推论的证明见例 1.22。

定理 1.8[拉普拉斯(Laplace)定理] 在行列式(1.1)中任取 k 行：$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，则

$$D = \sum_{1\leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n} \left| D\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \right| \left| \hat{D}_C\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \right| \tag{1.23}$$

注 拉普拉斯定理是行列式展开定理的推广，作为补充知识了解一下。

三、疑难解答

问题 1 行列式与行列式的值有区别吗？

答 严格地说是有区别的，但习惯上不作区分。这类似于 $f(x)$ 既表示一个函数关系 f，又表示函数的值。

问题 2 行列式的递归定义、行列式的展开定理和克莱姆法则之间有何关系？

答 消元法求解线性方程组的思想就是对每个方程乘上一个适当的数，然后把所有方程相加，希望只剩下一个未知数而其余的未知数全消掉。定义行列式的唯一目的是使得线性方程组的解有克莱姆法则如此工整的表示形式。

行列式的递归定义、行列式的展开定理和克莱姆法则三者有着密切的关系。下面以 3 阶线性方程组为例来说明(假设已有 2 阶行列式的定义和 2 阶方程组的克莱姆法则)：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

将方程(1),(2),(3)分别乘以待定常数 A_{11}, A_{21}, A_{31} 后相加，并令 x_2, x_3 的系数全为零，从而解出这三个待定常数并求出 x_1。

$$\begin{cases} a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0 \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}} \tag{5}$$

为确定 A_{11}, A_{21}, A_{31} 的值，把方程组(4)改为

$$\begin{cases} a_{22}\dfrac{A_{21}}{A_{11}} + a_{32}\dfrac{A_{31}}{A_{11}} = -a_{12} \\[2ex] a_{23}\dfrac{A_{21}}{A_{11}} + a_{33}\dfrac{A_{31}}{A_{11}} = -a_{13} \end{cases}$$

用 2 阶行列式解得

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{A_{31}}{A_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

不妨令

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

则 A_{11}, A_{21}, A_{31} 满足方程组(4)。如果定义 3 阶行列式的值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \tag{6}$$

由式(5)得

$$x_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

进一步可以证明按式(6)所定义的行列式又满足：

$$D=\sum_{i=1}^{3}a_{i2}A_{i2}=\sum_{i=1}^{3}a_{i3}A_{i3},\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ik}=0(j\neq k)$$

这就是行列式展开定理，它是行列式定义成功的关键。用上面类似的方法并借助于行列式展开定理可求得

$$x_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},x_3=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

综上，为解线性方程组有了行列式的递归定义，为使方程组有克莱姆法则如此工整的形式就要求行列式的定义要满足行列式的展开定理。这就是三者之间的关系。

问题 3 是否可按对角线法则计算高阶行列式？

答 对于 2 阶和 3 阶行列式可以用对角线法则来计算，结果与我们的定义恰好一致。引入高阶(4 阶和 4 阶以上)行列式的目的是使克莱姆法则成立。

对于高阶行列式如果按照对角线法则来计算，则克莱姆法则不再成立，是没有意义的。实际上按对角线法则计算四阶行列式只有 8 项，而按行列式的定义计算有 24 项。因此，对于高阶行列式不能用对角线法则来计算。

四、典型例题

例 1.1 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x-2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ x & 1 & 2x & 3 \end{vmatrix}$$

求：$f(x)$中 x^4，x^3 的系数分别为多少？

解 根据行列式的逆序数定义，能够出现 x^4，x^3 的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 和 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，见下

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{x-2} \\ 1 & 2 & \boxed{x} & 3 \\ 1 & \boxed{x} & 2 & 3 \\ \boxed{x} & 1 & 2x & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{x-2} \\ \boxed{1} & 2 & x & 3 \\ 1 & \boxed{x} & 2 & 3 \\ x & 1 & \boxed{2x} & 3 \end{vmatrix}$$

计算逆序数知，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$的符号为正，$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$的符号为负，故

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + \cdots \\ &= (x-2)\cdot x\cdot x\cdot x-(x-2)\cdot 1\cdot x\cdot(2x)+\cdots \\ &= x^4-4x^3+\cdots \end{aligned}$$

所以 $f(x)$中 x^4，x^3 的系数分别是 1，-4。

评注 本题如果把 $f(x)$全部计算出来是相当复杂的，只需计算能够出现 x^4，x^3 的项即可。按照行列式的逆序数定义：行列式等于取自不同行不同列的 n 个元素乘积项的代数和，简单地作一下分析即可知只有上面两种情况。下面取法是不对的，为什么？

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{x-2} \\ 1 & 2 & \boxed{x} & 3 \\ 1 & \boxed{x} & 2 & 3 \\ x & 1 & \boxed{2x} & 3 \end{vmatrix}$$

例 1.2 计算行列式

$$D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

解 $D(x)$是关于 x 的多项式，由 $D(x)$的结构易知

$$D(\pm 1)=D(\pm 2)=0$$

而且 $D(x)$的最高次数为 4。因此 $D(x)$具有如下形式

$$D(x)=C(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

其中 C 是待定的常数。行列式中含有 x^4 的项只有两项

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} &= (2-x^2)(9-x^2)=x^4+\cdots - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\ &= -2\cdot(2-x^2)\cdot 2\cdot(9-x^2)=-4x^4+\cdots \end{aligned}$$

由此得 $C=-3$，于是

$$D(x)=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

评注 这种方法称为因子分析法。再参见后面例 1.8 解法 2 对范德蒙行列式的计算。

例 1.3 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的特征多项式定义为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}\lambda+(-1)^nc_n \tag{1.24}$$

求系数 c_1 和 c_n。

解 根据行列式的定义,能够出现 λ^{n-1} 的项只有对角线元素的乘积(请思考为什么),故

$$f(\lambda)=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})+\cdots$$
$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots$$

由此得

$$c_1=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$$

这里 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹。又

$$(-1)^nc_n=f(0)=\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^n\,|\boldsymbol{A}|$$

所以 $c_n=|\boldsymbol{A}|$。

综上,$f(\lambda)=\lambda^n-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|$ (1.25)

评注 设 $f(\lambda)=0$ 在复数域上的 n 个根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值)。于是

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1.26}$$

比较式(1.25)与式(1.26)的系数,立即得下面常用结论:

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$

这两个结论在本书第六章中是常用的。

另外,还可以证明式(1.24)中的系数

$$c_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\left|\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\ i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right| \tag{1.27}$$

即 c_k 等于 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有 k 阶主子式之和。证明如下:

在行列式(1.24)中任取一个 k 阶主子式

$$D\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\ i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix} \tag{1.28}$$

它是 λ 的 k 次多项式,其常数项为

$$(-1)^k\left|A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right|$$

在 k 阶主子式(1.28)的余子式中恰有 $n-k$ 个形如 $\lambda-a_{ii}$ 元(它们都在对角线上)。从而在行列式(1.24)中仅含有 $n-k$ 个 λ 的项的和为

$$(-1)^k\left|A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right|\lambda^{n-k}$$

由于 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 在 $1,2,\cdots,n$ 的取法有 C_n^k 个。所以

$$c_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}\right|$$

例 1.4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\-1&2&-1&0\\1&-1&0&2\\2&1&1&0\end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&0&-2&4\\0&1&1&-2\\0&5&3&-8\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&2\\0&1&1&-2\\0&5&3&-8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-5r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&2\\0&0&2&-4\\0&0&8&-18\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-4r_3}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&2\\0&0&2&-4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-4$$

评注 通过此例可看出,对于任意阶的行列式只用 r_i+kr_j 类型的变换(相应于矩阵的第三种初等行变换)就可化为三角形。这种方法具有很强的规律性,计算阶数较高的数字行列式是方便的,稍加改进就是计算机中常用的方法。

例 1.5 计算爪形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&x_2&\cdots&x_n\\y_2&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\y_n&&&a_n\end{vmatrix}$$

解 假设 $a_2a_3\cdots a_n\neq0$,化三角形

$$D \xlongequal[k=2,\cdots,n]{c_1-\frac{y_k}{a_k}c_k} \begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k} & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k}\right)=a_1a_2\cdots a_n-\sum_{j=2}^{n}x_jy_j(\prod_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{n}a_k)$$

上式最后的结果并不出现 $a_2,a_3,\cdots a_n$ 做分母，因此对于 $a_2a_3\cdots a_n=0$ 的情况也成立。（见下面的评注）

评注 如果 $a_2a_3\cdots a_n=0$，总可找到无穷多的 x 使得 $(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_n+x)\neq 0$，把 a_k 换成 a_k+x，得

$$D_n(x)=a_1(a_2+x)(a_n+x)\cdots(a_n+x)-\sum_{j=2}^{n}x_jy_j(\prod_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{n}(a_k+x))$$

由于上式是关于 x 的多项式，并且对无穷多的 x 成立，因此，由代数基本定理，上式必是恒等式。于是，令 $x=0$ 也成立，即

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n-\sum_{j=2}^{n}x_jy_j(\prod_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{n}a_k)$$

这种思想是以后常用的。

另外，爪形行列式还有（请读者自行计算）

$$\begin{vmatrix} a_n & & & x_n \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_2 & x_2 \\ y_n & \cdots & y_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x_n & \cdots & x_2 & a_1 \\ & & a_2 & y_2 \\ & \iddots & & \vdots \\ a_n & & & y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_n & & & a_n \\ \vdots & & \iddots & \\ y_2 & a_2 & & \\ a_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k}\right)$$

例 1.6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

解法 1 从第 2 列起每列减第 1 列就化为爪形行列式