

高等学校教材

# 结构分析 中的有限元法

JIE GOU  
FEN XI  
ZHONG DE YOU XIAN YUAN FA

主编 文国治 李正良



武汉理工大学出版社  
WUTP Wuhan University of Technology Press

高等学校教材

# 结构分析中的有限元法

主 编 文国治 李正良

武汉理工大学出版社

· 武汉 ·

## 内 容 提 要

本书将结构力学中的“矩阵位移法”和弹性力学中的“有限单元法”有机结合,使学生初步掌握结构分析中有限元法的原理和方法,同时让学生了解基本的程序设计及使用方法。

全书共 6 章,内容包括矩阵位移法基本原理及平面刚架的计算、矩阵位移法计算各种杆系结构、杆系结构的自由振动分析、弹性力学的基本方程、用有限元法解弹性力学平面问题、用有限元法解弹性力学空间问题。每章在讲解了基本原理后,接着介绍程序设计方法,并在所附光盘中提供了用 C 语言编制的源程序及其可执行程序。书后附录还提供了部分习题答案。

本书可作为普通高等学校土木工程专业(包括建筑工程、道路与桥梁工程、地下建筑和水利工程等方向)的教材,也可供有关专业工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

结构分析中的有限元法/文国治,李正良主编.——武汉:武汉理工大学出版社,2010.4  
ISBN 978-7-5629-3180-5

- I. ① 结…
- II. ① 文… ② 李…
- III. ① 结构分析:有限元分析-高等学校-教材
- IV. ① 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 064887 号

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路 122 号 邮编 430070)

<http://www.techbook.com.cn> 理工图书网

经 销 者:各地新华书店

印 刷 者:武汉理工大印刷厂

开 本:787×1092 1/16

印 张:10.25

字 数:262 千字

版 次:2010 年 4 月第 1 版

印 次:2010 年 4 月第 1 次印刷

印 数:1~3000 册

定 价:22.00 元(含光盘)

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:(027)87394412 87383695 87384729

# 前 言

随着复杂工程结构及巨型结构的大量出现和电子计算机的飞速发展,在土木、水利等工程专业本科学生中加强电算能力的培养显得尤为迫切。本书正是为适应这一需要而编写的,也是教学改革研究的产物。书中尝试将结构力学中的“矩阵位移法”和弹性力学中的“有限单元法”有机结合,使学生初步掌握结构分析中有限元法的基本原理和方法,并具有编制、使用计算机程序对复杂结构进行分析的能力,同时,也为其在今后的学习和工作中正确选择和有效使用大型的综合程序打下基础。

本书第 1 章结合平面刚架介绍了矩阵位移法的基本原理及其程序实现,给出了一个用矩阵位移法先处理法编制的平面刚架计算程序。第 2 章直接运用矩阵位移法基本原理解决各种平面及空间杆系结构的静力计算问题,给出了一个统一的计算程序。第 3 章初步介绍了杆系结构自由振动分析的矩阵方法。第 4 章至第 6 章为弹性力学有限元内容。第 4 章介绍了弹性力学的基本方程。第 5 章讲述了弹性力学平面问题的有限元法,并结合三结点三角形单元给出了计算程序。第 6 章介绍了弹性力学空间问题的有限元分析方法。书后附录提供了部分习题答案,所附光盘中提供了用 C 语言编制的几个源程序及其可执行程序。

本书编写时,力求做到对基本概念的阐述条例清楚,内容安排由浅入深,点面结合,并将原理及时转化为计算程序。本书内容是对先修诸门课程的综合运用,包括高等数学、线性代数、理论力学、材料力学、结构力学、弹性力学和算法语言等。考虑到大多数院校的算法语言课开设 C 语言这一实际情况,以及目前国际上有限元编程的发展趋势,本书所给程序均采用 C 语言编制。

本书由重庆大学土木工程学院多位老师共同编写,文国治编写第 1 章,王达谕编写第 2 章、光盘中“VC++6.0 集成开发环境使用方法简介”和“杆系结构静力分析程序 PFF\_All”(包括第一程序),陈名弟编写第 3 章,李正良编写第 4 章、第 6 章,晏致涛编写第 5 章及光盘中“弹性力学三结点三角形单元静力分析程序”,文国治、李正良任主编。由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,欢迎读者指正。

本书的编写得到了重庆大学相关部门和土木工程学院的大力支持,还得到了建筑力学教研室老师的热情帮助,在此一并致以衷心的感谢。

编 者

2009.11

# 目 录

1 矩阵位移法基本原理及平面刚架的计算 .....	(1)
1.1 概述 .....	(1)
1.1.1 结构分析及其发展 .....	(1)
1.1.2 结构矩阵分析方法 .....	(1)
1.1.3 矩阵位移法分析杆件结构的步骤 .....	(2)
1.2 杆件结构的离散化 .....	(4)
1.2.1 结构的离散化 .....	(4)
1.2.2 单元的杆端力与杆端位移 .....	(4)
1.2.3 单元坐标转换 .....	(6)
1.3 单元坐标系中的单元刚度矩阵 .....	(7)
1.4 结构坐标系中的单元刚度矩阵 .....	(10)
1.5 用先处理法形成结构刚度矩阵 .....	(11)
1.5.1 先处理法和后处理法 .....	(11)
1.5.2 结点位移分量的统一编号 .....	(11)
1.5.3 单元定位向量 .....	(12)
1.5.4 结构的整体分析 .....	(12)
1.5.5 直接刚度法形成结构刚度矩阵 .....	(15)
1.6 结构的综合结点荷载 .....	(18)
1.6.1 等效结点荷载 .....	(18)
1.6.2 计算结构综合结点荷载列阵的步骤 .....	(19)
1.7 矩阵位移法的计算 .....	(22)
1.7.1 单元杆端力 .....	(22)
1.7.2 矩阵位移法的计算步骤 .....	(22)
1.8 平面刚架程序设计 .....	(26)
1.8.1 程序说明及总框图 .....	(26)
1.8.2 子程序流程图 .....	(27)
1.8.3 算例及 PFF 源程序 .....	(29)
1.9 支座位移及温度变化问题的处理 .....	(43)
1.9.1 支座位移的处理 .....	(43)
1.9.2 温度变化的处理 .....	(46)
1.10 斜支座与弹性支座的处理 .....	(46)
1.10.1 有斜支座的结构 .....	(46)
1.10.2 有弹性支座的结构 .....	(46)
习题 .....	(47)

2	矩阵位移法计算各种杆系结构	(52)
2.1	连续梁	(52)
2.1.1	无结点线位移的连续梁	(52)
2.1.2	有结点竖向线位移的连续梁	(53)
2.2	平面桁架	(56)
2.3	空间桁架	(60)
2.4	交叉梁系	(63)
2.4.1	单元刚度矩阵	(64)
2.4.2	单元固端力	(67)
* 2.5	空间刚架	(71)
2.5.1	整体坐标系下的单元杆端力 $F^e$ 和杆端位移 $\delta^e$	(71)
2.5.2	单元坐标系下的单元杆端力 $\bar{F}^e$ 和杆端位移 $\bar{\delta}^e$	(71)
2.5.3	单元坐标系下的刚度矩阵 $\bar{k}^e$	(72)
2.5.4	坐标转换矩阵 $T$	(72)
2.5.5	整体坐标系下的单刚 $k^e$	(75)
2.5.6	单元固端力	(75)
2.6	各类杆系结构的程序设计说明	(78)
2.6.1	PFF_All 程序编制原理概述	(78)
2.6.2	PFF_All 程序的使用方法	(80)
2.6.3	PFF_All 源程序	(87)
习题		(87)
3	杆系结构的自由振动分析	(90)
3.1	概述	(90)
3.1.1	杆系结构自由振动分析的目的和方法	(90)
3.1.2	杆系结构自由振动的矩阵分析	(91)
3.2	特征对求解中的雅可比法	(92)
3.2.1	自由振动特征值问题的标准形式	(92)
3.2.2	实对称矩阵特征值求解中雅可比法的基本原理	(92)
3.2.3	动力矩阵的对称化	(93)
3.2.4	求解剪切型多层框架结构的自振频率和振型	(94)
3.3	SDP 程序设计及使用说明	(95)
3.3.1	程序概况	(95)
3.3.2	程序基本流程	(95)
3.3.3	源程序 SDP.C	(95)
3.3.4	程序使用示例	(99)
习题		(101)
4	弹性力学的基本方程	(102)
4.1	基本方程	(102)
4.1.1	引言	(102)

4.1.2	外力的平衡方程 .....	(103)
4.1.3	内力的平衡方程 .....	(103)
4.1.4	应力-应变关系(本构关系) .....	(104)
4.1.5	应变-位移关系 .....	(107)
4.1.6	边界条件 .....	(109)
4.1.7	协调方程 .....	(109)
4.2	虚位移原理 .....	(110)
	习题 .....	(112)
<b>5</b>	<b>用有限元法解弹性力学平面问题 .....</b>	<b>(114)</b>
5.1	连续介质的离散化 .....	(114)
5.2	位移函数 .....	(116)
5.3	形函数的性质与面积坐标 .....	(117)
5.3.1	形函数的性质 .....	(117)
5.3.2	面积坐标 .....	(118)
5.4	单元应变 .....	(119)
5.4.1	应变方程 .....	(119)
5.4.2	初应变 .....	(120)
5.5	单元应力 .....	(121)
5.5.1	平面应力问题 .....	(121)
5.5.2	平面应变问题 .....	(122)
5.6	单元刚度矩阵 .....	(122)
5.7	整体刚度矩阵 .....	(124)
5.7.1	先处理法 .....	(124)
5.7.2	后处理法 .....	(125)
5.8	等效结点荷载 .....	(126)
5.8.1	均值等厚度平面单元的体积力 .....	(126)
5.8.2	分布边界力的等效结点荷载 .....	(127)
5.8.3	初应变引起的结点荷载 .....	(128)
5.9	单元应力计算及结果整理 .....	(129)
5.9.1	单元应力计算 .....	(129)
5.9.2	计算结果的整理 .....	(130)
5.10	计算步骤和算例 .....	(131)
5.11	程序设计及说明 .....	(136)
5.11.1	先处理法程序 PreFin .....	(136)
5.11.2	后处理法程序 PostFin .....	(139)
5.12	程序使用实例 .....	(141)
	习题 .....	(143)
<b>6</b>	<b>用有限元法解弹性力学空间问题 .....</b>	<b>(145)</b>
6.1	常应变四面体单元 .....	(145)

6.1.1	位移函数	(145)
6.1.2	单元应变	(146)
6.1.3	单元应力	(147)
6.1.4	单元刚度矩阵	(148)
6.1.5	结点荷载	(149)
6.2	体积坐标	(149)
6.3	高次四面体单元	(150)
6.3.1	10 结点线性应变四面体单元	(151)
6.3.2	20 结点四面体单元	(151)
附录	部分习题答案	(153)
参考文献		(156)



# 1 矩阵位移法基本原理及平面刚架的计算

## 1.1 概 述

### 1.1.1 结构分析及其发展

所谓结构分析,是指在一定的条件下计算结构的内力和位移。除此之外,还包括分析结构的几何组成关系,分析结构失稳时的临界荷载,分析刚度变化对结构内力的影响,以及选择适当的结构型式等。

结构分析方法的发展与人类生产活动以及科学技术水平的发展有着密切的联系。譬如,桁架结构分析理论和分析方法的发展与钢结构的广泛应用有直接关系,刚架结构的分析方法则与钢筋混凝土结构的大量出现有关。在未广泛使用计算机前,结构分析主要依赖手算完成。因此,为了使计算得以简化,提出了许多针对各种不同类型结构的近似分析方法,如迭代法、D值法、反弯点法、分层法等。即便如此,这些近似计算方法能解决的工程问题仍非常有限。随着结构型式越来越复杂,分析难度越来越大的大跨度、超高层等巨型建筑物的出现,原有计算方法和计算工具已经不能适应。所幸的是,随着计算机的飞速发展,有限元法等数值方法也有了迅猛的发展,矩阵代数等数学方法得到了广泛的应用。在这种情况下,结构矩阵分析方法不但应用范围越来越广,而且它本身的理论、方法和手段也日臻完善。

### 1.1.2 结构矩阵分析方法

结构矩阵分析方法是经典结构力学理论为基础,以矩阵方法和线性代数作为其数学描述手段,以电子计算机作为计算工具来实现结构分析的。可以把结构矩阵分析看成传统的结构力学的延伸,但在处理问题的方法和手段上又与传统的结构力学不同。

结构矩阵分析的方法有矩阵位移法、矩阵力法及矩阵混合法等。

矩阵位移法实际上是用矩阵形式表示的位移法分析过程,其基本原理与位移法是一致的,所选取的基本未知量是结点位移。该方法亦称刚度法。矩阵位移法的最大优点是,它的基本体系和结点位移未知量的选择一般来说是唯一的,具有较强的通用性,适合于电算的要求,有利于通用计算程序的编制。因此,矩阵位移法在结构矩阵分析中得到了广泛的应用。

矩阵力法是以矩阵形式表示的力法分析过程,其基本原理与力法是一致的,所选取的基本未知量为多余约束中的未知力。该方法亦称柔度法。对于一个给定的超静定结构来说,矩阵力法的基本体系和多余未知力的选择因人而异,不是唯一的,这就给编制通用计算程序带来了困难。

将矩阵位移法与矩阵力法结合起来的方法,即为矩阵混合法。该方法所取的基本未知量为两部分,一部分是结点位移,另一部分是多余约束力。

本书主要介绍矩阵位移法。需要指出的是,矩阵位移法用于分析杆件结构(亦称一维结构)时,也可称为杆件结构有限元法,所得结果为精确解。而对于分析二维结构或三维实体结

构的弹性力学有限元法来说,所得结果为近似解。

### 1.1.3 矩阵位移法分析杆件结构的步骤

下面以两跨连续梁为例说明矩阵位移法的分析过程。设需绘如图 1.1(a)所示连续梁的弯矩图,则必须求出各杆的杆端弯矩(亦称杆端力)。

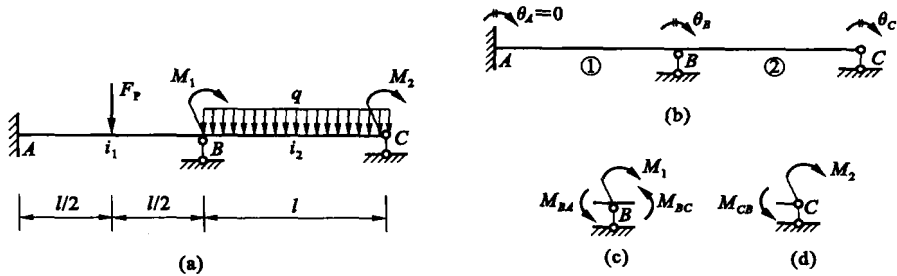


图 1.1 矩阵位移法计算步骤示例

(a) 两跨连续梁; (b) 离散化; (c)、(d) 结点平衡

第一步,结构的离散化。

用矩阵位移法计算时,首先应对结构进行离散化,即将结构划分为若干个单元。本例可划分为①、②两个单元,如图 1.1(b)所示,以 B、C 两个结点的转角  $\theta_B$ 、 $\theta_C$  为未知量。

第二步,对各个单元进行分析。

单元分析的目的是建立其杆端力与杆端位移之间的关系。由两端固支单跨梁的转角位移方程,并注意到与同一结点相连的杆端的转角等于该结点转角,可写出各单元杆端弯矩的表达式如下:

单元①

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i_1\theta_A + 2i_1\theta_B - \frac{1}{8}F_P l \\ M_{BA} &= 2i_1\theta_A + 4i_1\theta_B + \frac{1}{8}F_P l \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

单元②

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= 4i_2\theta_B + 2i_2\theta_C - \frac{1}{12}ql^2 \\ M_{CB} &= 2i_2\theta_B + 4i_2\theta_C + \frac{1}{12}ql^2 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式(a)、式(b)可分别用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}F_P l \\ \frac{1}{8}F_P l \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}ql^2 \\ \frac{1}{12}ql^2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

进一步简记为

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)} \boldsymbol{\delta}^{(1)} + \mathbf{F}_P^{(1)} \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)} \boldsymbol{\delta}^{(2)} + \mathbf{F}_P^{(2)} \quad (1.1b)$$

其中,  $\mathbf{F}^{(1)}$ 、 $\mathbf{F}^{(2)}$  为单元杆端力列阵,  $\mathbf{F}_P^{(1)}$ 、 $\mathbf{F}_P^{(2)}$  为非结点荷载引起的单元固端力列阵,  $\boldsymbol{\delta}^{(1)}$ 、 $\boldsymbol{\delta}^{(2)}$  为单元杆端位移列阵。

当没有非结点荷载, 即  $\mathbf{F}_P^{(1)} = 0$ 、 $\mathbf{F}_P^{(2)} = 0$  时, 式(1.1a)、式(1.1b)分别成为

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)} \boldsymbol{\delta}^{(1)} \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)} \boldsymbol{\delta}^{(2)} \quad (1.2b)$$

式(1.2a)、式(1.2b)分别称为①、②两个单元的单元刚度方程,  $\mathbf{k}^{(1)}$ 、 $\mathbf{k}^{(2)}$  分别称为①、②两个单元的单元刚度矩阵。由式(c)、式(d)可知

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

第三步, 整体分析。

将结点 B、C 分别取出分析, 如图 1.1(c)、(d) 所示。

由  $\sum M_B = 0$ , 得

$$M_{BA} + M_{BC} = M_1 \quad (e)$$

由  $\sum M_C = 0$ , 得

$$M_{CB} = M_2 \quad (f)$$

将式(a)、式(b)代入式(e)、式(f)中, 并注意到  $\theta_A = 0$ , 得

$$(4i_1 + 4i_2)\theta_B + 2i_2\theta_C + \left(\frac{1}{8}F_P l - \frac{1}{12}ql^2\right) = M_1 \quad (g)$$

$$2i_2\theta_B + 4i_2\theta_C + \frac{1}{12}ql^2 = M_2 \quad (h)$$

将式(g)、式(h)合并写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}F_P l + \frac{1}{12}ql^2 \\ -\frac{1}{12}ql^2 \end{bmatrix} \quad (1.4a)$$

简记为

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F}_J + \mathbf{F}_E \quad (1.4b)$$

或

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F} \quad (1.5)$$

式(1.4a)、式(1.4b)、式(1.5)均为结构刚度方程, 代表了结点位移与结点荷载之间的关系。  $\mathbf{A} = [\theta_B \quad \theta_C]^T$  称为结构的结点位移列阵;  $\mathbf{F}$  称为结构的综合结点荷载列阵, 它由直接结点荷载列阵  $\mathbf{F}_J$  和等效结点荷载列阵  $\mathbf{F}_E$  两部分组成, 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_J + \mathbf{F}_E \quad (1.6)$$

$\mathbf{K}$  称为结构刚度矩阵, 在本例中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

第四步, 解方程组(1.4)或(1.5), 可求出结点位移  $\mathbf{A}$ 。

第五步,将  $\Delta$  中的  $\theta_B$ 、 $\theta_C$  代入式(1.1),即可求出杆端弯矩的最终值,并由此绘出原结构的弯矩图。

综上所述,用矩阵位移法求解杆件结构时,可按结构离散化、单元分析、整体分析、解方程组求结点位移以及计算各单元杆端力这五个步骤进行。这些步骤用于平面刚架的情况将在以下各节中作详细讨论。

## 1.2 杆件结构的离散化

### 1.2.1 结构的离散化

杆件结构是由若干根杆件构成的。在矩阵位移法中,必须首先把结构离散成一根根独立的杆件——单元,把结构看成有限个单元的集合体,这就是结构的离散化。

为了计算方便,通常采用等截面直杆这种形式的单元。单元与单元之间通过结点互相连接,并通过支座连在地基上。因此,划分单元的结点应该是杆件的连接点、截面的突变点、结构的支承点和自由端等。有时为了计算上的需要也把杆件中某些特殊点当作结点,如集中荷载作用点等。如有的杆件横截面是连续变化的,可以将该杆件分成若干段,以每段中间的截面作为各分段的截面,即将此变截面杆件近似地用几段等截面杆件代替。对于等截面的曲杆,可以用若干段折线形杆件来近似代替。确定了结构的全部结点,也就确定了单元的划分。

具体对一个结构进行离散化时,可根据上述原则划分结构的单元和结点,并进行编号。单元编号用①、②、③、…表示,结点编号用 1、2、3、…表示,如图 1.2 所示。

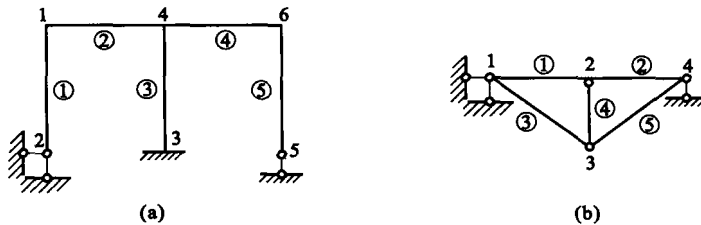


图 1.2 结构的离散化  
(a) 平面刚架;(b) 组合结构

### 1.2.2 单元的杆端力与杆端位移

组成结构的各杆方向不尽相同,为了分析的方便,需要采用两种直角坐标系。一种是在整体分析时对整个结构建立的坐标系,称为结构坐标系或整体坐标系,用  $x-y$  表示。另一种是在单元分析时为每个单元建立的坐标系,称为该单元的单元坐标系或局部坐标系,用  $\bar{x}-\bar{y}$  表示。结构坐标系的原点位置可任意选取(但应便于确定各结点坐标值), $x$  轴水平向右为正。单元坐标系的原点设在单元的一个端点(称该端点为单元的始端,另一端为末端), $\bar{x}$  轴与单元的轴线重合,从单元的始端到末端为正。结构坐标系和单元坐标系可采用左手直角坐标系,即从  $x$  (或  $\bar{x}$ ) 轴顺时针方向旋转  $90^\circ$  就得到  $y$  (或  $\bar{y}$ ) 轴,如图 1.3(a) 所示。

为了减少图上的标注,使图形看上去更简洁,各单元的单元坐标系可不画出,而在单元的  $\bar{x}$  轴方向加画一箭头表示,如图 1.3(b) 所示。

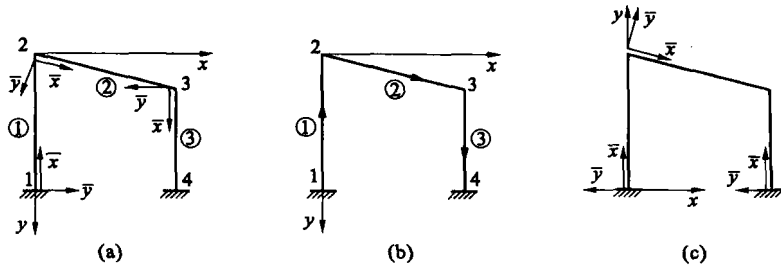


图 1.3 结构坐标系与单元坐标系

(a)、(b) 左手直角坐标系；(c) 右手直角坐标系

在用矩阵位移法计算某一结构时，还可采用右手直角坐标系，即从  $x$  (或  $\bar{x}$ ) 轴逆时针方向旋转  $90^\circ$  得到  $y$  (或  $\bar{y}$ ) 轴，如图 1.3(c) 所示。对于同一结构，采用左手直角坐标系或右手直角坐标系均可，根据所得结果绘出的内力图相同。本书中采用左手直角坐标系。

下面解释两种坐标系中的单元杆端力和杆端位移。

图 1.4 所示为一平面刚架单元  $e$ ，其始端和末端的结点编号分别为  $i$  和  $j$ 。

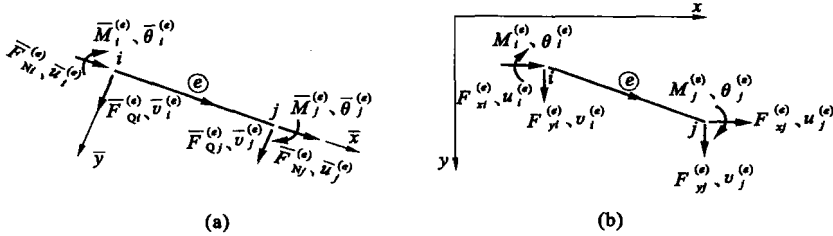


图 1.4 单元杆端力和杆端位移

(a) 单元坐标系中；(b) 结构坐标系中

在单元坐标系中，平面刚架单元的每个端点有三个杆端力分量，即沿  $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$  方向的杆端力  $\bar{F}_N^{(e)}$ 、 $\bar{F}_Q^{(e)}$  和杆端弯矩  $\bar{M}^{(e)}$ 。与之对应的三个杆端位移分量分别用  $\bar{u}^{(e)}$ 、 $\bar{v}^{(e)}$  和  $\bar{\theta}^{(e)}$  表示，如图 1.4(a) 所示。则单元杆端力列阵  $\bar{F}^e$  和杆端位移列阵  $\bar{\delta}^e$  可表示为

$$\bar{F}^e = \begin{bmatrix} \bar{F}_i^e \\ \bar{F}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1^{(e)} \\ \bar{f}_2^{(e)} \\ \bar{f}_3^{(e)} \\ \bar{f}_4^{(e)} \\ \bar{f}_5^{(e)} \\ \bar{f}_6^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{N_i}^{(e)} \\ \bar{F}_{Q_i}^{(e)} \\ \bar{M}_i^{(e)} \\ \bar{F}_{N_j}^{(e)} \\ \bar{F}_{Q_j}^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (1.8a)$$

$$\bar{\delta}^e = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_i^e \\ \bar{\delta}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1^{(e)} \\ \bar{\delta}_2^{(e)} \\ \bar{\delta}_3^{(e)} \\ \bar{\delta}_4^{(e)} \\ \bar{\delta}_5^{(e)} \\ \bar{\delta}_6^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i^{(e)} \\ \bar{v}_i^{(e)} \\ \bar{\theta}_i^{(e)} \\ \bar{u}_j^{(e)} \\ \bar{v}_j^{(e)} \\ \bar{\theta}_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (1.8b)$$

在结构坐标系中,平面刚架单元杆端力和杆端位移如图 1.4(b)所示。单元杆端力列阵  $F^e$  和杆端位移列阵  $\delta^e$  可表示为

$$F^e = \begin{bmatrix} F_i^e \\ \dots \\ F_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \\ \dots \\ f_4^{(e)} \\ f_5^{(e)} \\ f_6^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x^{(e)} \\ F_y^{(e)} \\ M_i^{(e)} \\ \dots \\ F_{xj}^{(e)} \\ F_{yj}^{(e)} \\ M_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (1.9a)$$

$$\delta^e = \begin{bmatrix} \delta_i^e \\ \dots \\ \delta_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1^{(e)} \\ \delta_2^{(e)} \\ \dots \\ \delta_4^{(e)} \\ \delta_5^{(e)} \\ \delta_6^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ \theta_i^{(e)} \\ \dots \\ u_j^{(e)} \\ v_j^{(e)} \\ \theta_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (1.9b)$$

正负号规定为,无论是在单元坐标系还是在结构坐标系中,沿坐标轴正方向的杆端力和杆端位移为正,顺时针方向的杆端弯矩和杆端转角为正,反之皆为负。图 1.4 所示的方向都是规定的正方向。

### 1.2.3 单元坐标转换

在结构矩阵分析中,单元分析采用的是单元坐标系,而整体分析采用的是结构坐标系。一般来说,各单元坐标系的方向各不相同。为了利用单元坐标系中的单元杆端力和杆端位移来建立结构坐标系中的结构刚度方程,有必要建立单元杆端力和杆端位移在两种坐标系之间的转换关系。

图 1.5 所示为平面刚架单元②在两种坐标系中的杆端力,规定  $\alpha$  由  $x$  轴顺时针转到  $\bar{x}$  轴为正。

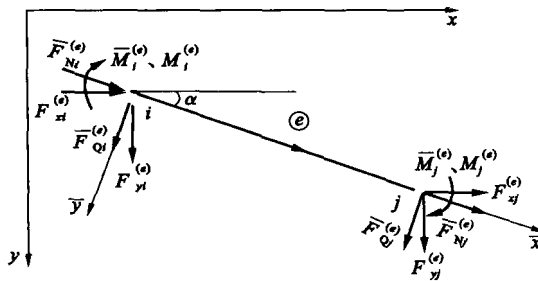


图 1.5 单元坐标转换

根据两种坐标系之间杆端力的等效关系,对  $i$  端可写出

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Ni}^{(e)} &= F_x^{(e)} \cos \alpha + F_y^{(e)} \sin \alpha \\ \bar{F}_{Qi}^{(e)} &= -F_x^{(e)} \sin \alpha + F_y^{(e)} \cos \alpha \\ \bar{M}_i^{(e)} &= M_i^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

同理,对  $j$  端有

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Nj}^{(e)} &= F_{xj}^{(e)} \cos\alpha + F_{yj}^{(e)} \sin\alpha \\ \bar{F}_{Qj}^{(e)} &= -F_{xj}^{(e)} \sin\alpha + F_{yj}^{(e)} \cos\alpha \\ \bar{M}_j^{(e)} &= M_j^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式(a)、式(b)合并写成矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^{(e)} \\ \bar{F}_{Qi}^{(e)} \\ \bar{M}_i^{(e)} \\ \dots \\ \bar{F}_{Nj}^{(e)} \\ \bar{F}_{Qj}^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xi}^{(e)} \\ F_{yi}^{(e)} \\ M_i^{(e)} \\ \dots \\ F_{xj}^{(e)} \\ F_{yj}^{(e)} \\ M_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

简记为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T} \mathbf{F}^e \quad (1.11)$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

称为平面刚架单元坐标转换矩阵,它是正交矩阵,即满足下式

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (1.13)$$

结合式(1.11)和式(1.13),可导出

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}^e \quad (1.14)$$

对于单元杆端位移,也可导出与式(1.11)和式(1.14)相同的关式,即

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \mathbf{T} \boldsymbol{\delta}^e \quad (1.15)$$

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{T}^T \bar{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (1.16)$$

### 1.3 单元坐标系中的单元刚度矩阵

在单元坐标系中,平面刚架的单元刚度方程可参照式(1.2)写为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (1.17)$$

它表示单元在杆端有任意给定位移  $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$  时所产生的杆端力为  $\bar{\mathbf{F}}^e$ ,  $\bar{\mathbf{F}}^e$  和  $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$  按式(1.8)确定。式(1.17)中,  $\bar{\mathbf{k}}^e$  就是平面刚架单元在单元坐标系中的单元刚度矩阵,简称单刚。

图 1.6 所示为一等截面平面刚架单元②的杆端力与杆端位移,在线性弹性范围内,可忽略轴向变形与弯曲变形之间的相互影响。其轴向力  $\bar{F}_{N1}^{(e)}$ 、 $\bar{F}_{N2}^{(e)}$  与轴向位移  $\bar{u}_1^{(e)}$ 、 $\bar{u}_2^{(e)}$  之间(如图 1.7所示)的关系,由材料力学可得

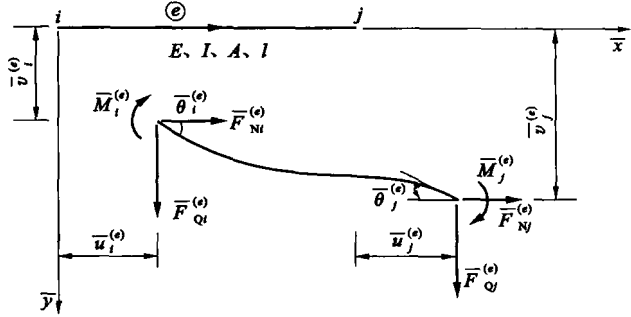


图 1.6 平面刚架单元杆端力与杆端位移之间的关系

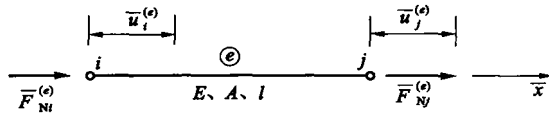


图 1.7 轴向力与轴向位移之间的关系

$$\bar{F}_{Nj}^{(e)} = \frac{EA}{l}(\bar{u}_j^{(e)} - \bar{u}_i^{(e)}) = -\frac{EA}{l}\bar{u}_i^{(e)} + \frac{EA}{l}\bar{u}_j^{(e)} \quad (a)$$

再根据单元的平衡条件,有

$$\bar{F}_{Ni}^{(e)} = -\bar{F}_{Nj}^{(e)} = \frac{EA}{l}\bar{u}_i^{(e)} - \frac{EA}{l}\bar{u}_j^{(e)} \quad (b)$$

而横向力和杆端弯矩  $\bar{F}_{Qi}^{(e)}$ 、 $\bar{F}_{Qj}^{(e)}$ 、 $\bar{M}_i^{(e)}$ 、 $\bar{M}_j^{(e)}$  与横向位移和转角  $\bar{v}_i^{(e)}$ 、 $\bar{v}_j^{(e)}$ 、 $\bar{\theta}_i^{(e)}$ 、 $\bar{\theta}_j^{(e)}$  之间的关系,可由无荷载作用时的等截面杆转角位移方程直接写出

$$\left. \begin{aligned} -\bar{F}_{Qi}^{(e)} &= -\frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_j^{(e)} + \frac{12EI}{l^3}(\bar{v}_j^{(e)} - \bar{v}_i^{(e)}) \\ \bar{M}_i^{(e)} &= \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_i^{(e)} + \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_j^{(e)} - \frac{6EI}{l^2}(\bar{v}_j^{(e)} - \bar{v}_i^{(e)}) \\ \bar{F}_{Qj}^{(e)} &= -\frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_j^{(e)} + \frac{12EI}{l^3}(\bar{v}_j^{(e)} - \bar{v}_i^{(e)}) \\ \bar{M}_j^{(e)} &= \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_i^{(e)} + \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_j^{(e)} - \frac{6EI}{l^2}(\bar{v}_j^{(e)} - \bar{v}_i^{(e)}) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将式(a)、式(b)、式(c)合为一式,并写成矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni} \\ \bar{F}_{Qi} \\ \bar{M}_i \\ \dots \\ \bar{F}_{Nj} \\ \bar{F}_{Qj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \dots \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (1.18)$$



式(1.18)就是式(1.17)的展开形式,单刚  $\bar{k}^e$  为

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

单元坐标系中的单刚  $\bar{k}^e$  具有以下性质:

(1) 单元刚度矩阵中元素的物理意义

单刚  $\bar{k}^e$  中元素  $\bar{k}_{lm}^{(e)}$  表示  $\bar{\delta}^e$  中第  $m$  个杆端位移分量等于 1 (其他杆端位移分量为零) 时,引起的  $\bar{F}^e$  中第  $l$  个杆端力之值。例如,式(1.19)中元素  $\bar{k}_{35}^{(e)} = -\frac{6EI}{l^2}$  表示  $v_j^{(e)} = 1$  时引起的第 3 个杆端力,即  $\bar{M}_i^{(e)}$  之值。依此类推, $\bar{k}^e$  中第  $m$  列的 6 个元素分别表示仅由第  $m$  个杆端位移发生单位位移时,所引起的 6 个杆端力的大小。图 1.8 表示  $v_j^{(e)} = 1$  所引起的各杆端力,将它们按顺序排列就得到式(1.19)中的第 5 列元素。

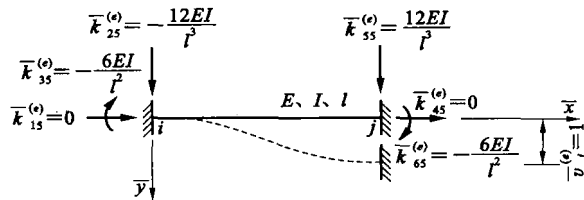


图 1.8 单刚中第 5 列元素

$\bar{k}^e$  中元素只与单元的弹性模量  $E$ 、横截面面积  $A$ 、惯性矩  $I$  及杆长  $l$  等有关,而与外荷载等其他因素无关。

(2) 单元刚度矩阵是对称矩阵

这一性质可由单刚元素的物理意义及反力互等定理加以证明。例如,在式(1.19)中, $\bar{k}_{25}^{(e)} = -\frac{12EI}{l^3}$  表示在两端固定的单元  $\textcircled{e}$  中,支座位移  $v_j^{(e)} = 1$  时引起的支座位移  $v_i^{(e)}$  方向的反力值,而  $\bar{k}_{52}^{(e)} = -\frac{12EI}{l^3}$  则表示  $v_i^{(e)} = 1$  时引起的  $v_j^{(e)}$  方向的反力值。根据反力互等定理,必有  $\bar{k}_{25}^{(e)} = \bar{k}_{52}^{(e)}$ 。

(3) 单元刚度矩阵是奇异矩阵

单刚的奇异性是指其对应的行列式之值为零,即不存在逆矩阵。这表明,如果给定单元的杆端位移,可由单元刚度方程式(1.17)或式(1.18)确定唯一的杆端力  $\bar{F}^e$ 。但若给定杆端力,却不能由式(1.17)或式(1.18)求得杆端位移  $\bar{\delta}^e$  的唯一解。从物理概念来理解,这是由于所讨